
Содержание



Предисловие к 4-му изданию	6
Принятые обозначения	7
Глава 1. Электростатическое поле в вакууме	9
§ 1.1. Электрическое поле	9
§ 1.2. Теорема Гаусса	14
§ 1.3. Применения теоремы Гаусса	17
§ 1.4. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	22
§ 1.5. Циркуляция вектора \mathbf{E} . Потенциал	25
§ 1.6. Связь между потенциалом и вектором \mathbf{E}	29
§ 1.7. Электрический диполь	33
Задачи	38
Глава 2. Проводник в электростатическом поле	45
§ 2.1. Поле в веществе	45
§ 2.2. Поле внутри и снаружи проводника	46
§ 2.3. Силы, действующие на поверхность проводника	49
§ 2.4. Свойства замкнутой проводящей оболочки.	51
§ 2.5. Общая задача электростатики. Метод изображений	53
§ 2.6. Емкость. Конденсаторы	57
Задачи	60
Глава 3. Электрическое поле в диэлектрике	68
§ 3.1. Поляризация диэлектрика	68
§ 3.2. Поляризованность \mathbf{P}	71
§ 3.3. Свойства поля вектора \mathbf{P}	72
§ 3.4. Вектор \mathbf{D}	76
§ 3.5. Условия на границе	80
§ 3.6. Поле в однородном диэлектрике	84
Задачи	86
Глава 4. Энергия электрического поля	96
§ 4.1. Электрическая энергия системы зарядов	96
§ 4.2. Энергия заряженных проводника и конденсатора	100
§ 4.3. Энергия электрического поля	102
§ 4.4. Система двух заряженных тел	106
§ 4.5. Силы при наличии диэлектрика	107
Задачи	112

Глава 5. Постоянный электрический ток	119
§ 5.1. Плотность тока. Уравнение непрерывности	119
§ 5.2. Закон Ома для однородного проводника	122
§ 5.3. Обобщенный закон Ома	125
§ 5.4. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа	129
§ 5.5. Закон Джоуля–Ленца	132
§ 5.6. Переходные процессы в цепи с конденсатором	135
Задачи	138
Глава 6. Магнитное поле в вакууме	145
§ 6.1. Сила Лоренца. Поле \mathbf{B}	145
§ 6.2. Закон Био–Савара	148
§ 6.3. Основные законы магнитного поля	151
§ 6.4. Применения теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B}	154
§ 6.5. Дифференциальная форма основных законов магнитного поля	157
§ 6.6. Сила Ампера	159
§ 6.7. Момент сил, действующих на контур с током	163
§ 6.8. Работа при перемещении контура с током	165
Задачи	167
Глава 7. Магнитное поле в веществе.	177
§ 7.1. Намагничивание вещества. Намагниченность \mathbf{J}	177
§ 7.2. Циркуляция вектора \mathbf{J}	180
§ 7.3. Вектор \mathbf{H}	182
§ 7.4. Граничные условия для \mathbf{B} и \mathbf{H}	187
§ 7.5. Поле в однородном магнетике	190
§ 7.6. Ферромагнетизм	193
Задачи	197
Глава 8. Относительность электрического и магнитного полей	204
§ 8.1. Электромагнитное поле. Инвариантность заряда	204
§ 8.2. Законы преобразования полей \mathbf{E} и \mathbf{B}	206
§ 8.3. Следствия из законов преобразования полей	212
§ 8.4. Инварианты электромагнитного поля	214
Задачи	215
Глава 9. Электромагнитная индукция	224
§ 9.1. Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.	224
§ 9.2. Природа электромагнитной индукции	227
§ 9.3. Явление самоиндукции	233
§ 9.4. Взаимная индукция	239
§ 9.5. Энергия магнитного поля.	243
§ 9.6. Магнитная энергия двух контуров с токами	246
§ 9.7. Энергия и силы в магнитном поле	249
Задачи	253

Глава 10. Уравнения Максвелла. Энергия электромагнитного поля	263
§ 10.1. Ток смещения	263
§ 10.2. Система уравнений Максвелла	267
§ 10.3. Свойства уравнений Максвелла	271
§ 10.4. Энергия и поток энергии. Вектор Пойнтинга . . .	274
§ 10.5. Импульс электромагнитного поля	278
Задачи	281
Глава 11. Электрические колебания	288
§ 11.1. Уравнение колебательного контура.	288
§ 11.2. Свободные электрические колебания	291
§ 11.3. Вынужденные электрические колебания.	296
§ 11.4. Переменный ток.	301
Задачи	304
Приложения	311
1. Единицы величин в СИ и системе Гаусса	311
2. Основные формулы электромагнетизма в СИ и системе Гаусса	312
3. Основные величины и единицы СИ	315
4. Греческий алфавит	316
5. Некоторые физические константы	316
Предметный указатель	317

Предисловие к 4-му изданию

Основная идея предлагаемой книги — органически совместить в одном учебном пособии изложение принципов теории и практику решения задач. С этой целью в каждой главе сначала излагается теория соответствующего вопроса (с иллюстрацией на конкретных примерах), а затем дается разбор ряда задач, где показывается, как, по мнению автора, надо подходить к их решению. Задачи тесно связаны с основным текстом, часто являются его развитием и дополнением, поэтому работа над ними должна проводиться параллельно с изучением основного материала. Кроме того, предлагаемый набор задач должен, по замыслу автора, дать возможность учащемуся дополнительно обдумать ряд важных вопросов и помочь представить (даже если многие задачи не решать, а просто прочитать) большой диапазон приложения изучаемых идей.

При изложении теоретического материала автор стремился исключить из текста все второстепенное, с тем чтобы сконцентрировать внимание на основных законах электромагнетизма и, в частности, на вопросах наиболее трудных для понимания. Стремление изложить основные идеи кратко, доступно и вместе с тем достаточно корректно побудило автора насколько возможно освободить материал от излишней математизации и перенести основной акцент на физическую сторону рассматриваемых явлений. С этой же целью широко использованы различные модельные представления, упрощающие факторы, частные случаи, соображения симметрии и др.

Изложение ведется в СИ. Вместе с тем, учитывая достаточно широкое использование системы Гаусса, в Приложении дана сводка основных единиц и наиболее важных формул как в СИ, так и в системе Гаусса.

Курсивом выделены важнейшие положения и термины. Петит используется для материала повышенной трудности и относительно громоздких расчетов (этот материал при первом чтении можно безболезненно опустить), а также для примеров и задач.

Книга как учебное пособие рассчитана на студентов вузов с расширенной программой по физике (в рамках общего курса физики). Она может быть также полезной и преподавателям вузов.

В четвертом издании внесены некоторые дополнения и уточнения, а также исправлены неточности и опечатки, замеченные читателями. Этим читателям автор искренне признателен.

И. Иродов

Принятые обозначения

Векторы обозначены жирным прямым шрифтом (например, \mathbf{r} , \mathbf{E}); та же буква светлым шрифтом (r , E) означает модуль вектора.

Средние величины отмечены скобками $\langle \rangle$, например $\langle v \rangle$, $\langle P \rangle$.

Символы перед величинами означают:

Δ — конечное приращение величины, т. е. разность ее конечного и начального значений, например $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$, $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$;

d — дифференциал (бесконечно малое приращение), $d\mathbf{E}$, $d\varphi$;

δ — элементарное значение величины, например δA ;

\propto — пропорционально, например $\varphi \propto q$;

\sim — величина порядка... Например $l \sim 10^2$ м.

Орты — единичные векторы:

\mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z (или \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}) — орты декартовых координат;

\mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z — орты цилиндрических координат ρ , φ , z ;

\mathbf{n} — орт нормали к элементу поверхности;

$\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к контуру или границе раздела.

Производная по времени от произвольной функции f обозначена $\partial f / \partial t$ или точкой, стоящей над функцией, \dot{f} .

Интегралы любой кратности обозначены одним единственным знаком \int и различаются лишь обозначением элемента интегрирования: dV , dS , $d\mathbf{l}$ — элементы объема, поверхности, контура. Знак \oint — интегрирование по замкнутому контуру или по замкнутой поверхности.

Векторный оператор ∇ (набла). Операции с ним обозначены так:

$\nabla \varphi$ — градиент φ ($\text{grad } \varphi$),

$\nabla \cdot \mathbf{E}$ — дивергенция \mathbf{E} ($\text{div } \mathbf{E}$),

$\nabla \times \mathbf{E}$ — ротор \mathbf{E} ($\text{rot } \mathbf{E}$).

Обозначения и названия единиц

А — ампер	Дж — джоуль	с — секунда
В — вольт	Кл — кулон	См — сименс
Вб — вебер	м — метр	ср — стерadian
Вт — ватт	мин — минута	Тл — тесла
Гн — генри	Мкс — максвелл	Ф — фарад
Гс — гаусс	Н — ньютон	ч — час
Гц — герц	Ом — ом	Э — эрстед
дин — дина	рад — радиан	эВ — электронвольт

Десятичные приставки к названиям единиц

Г — гига, 10^9	м — милли, 10^{-3}
М — мега, 10^6	мк — микро, 10^{-6}
к — кило, 10^3	н — нано, 10^{-9}
с — санти, 10^{-2}	п — пико, 10^{-12}

Электростатическое поле в вакууме



§ 1.1. Электрическое поле

Электрический заряд. В настоящее время известно, что в основе всего разнообразия явлений природы лежат четыре фундаментальных взаимодействия между элементарными частицами — сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Каждый вид взаимодействия связывается с определенной характеристикой частицы. Например, гравитационное взаимодействие зависит от масс частиц, электромагнитное — от электрических зарядов.

Электрический заряд частицы является одной из основных, первичных ее характеристик. Ему присущи следующие фундаментальные свойства:

1) электрический заряд существует в двух видах: как положительный, так и отрицательный;

2) в любой электрически изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется, это утверждение выражает *закон сохранения электрического заряда*;

3) электрический заряд является релятивистски инвариантным: его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

Эти фундаментальные свойства электрического заряда имеют, как мы увидим, далеко идущие последствия.

Электрическое поле. Согласно современным представлениям взаимодействие между зарядами осуществляется через поле. Всякий электрический заряд q изменяет определенным образом свойства окружающего его пространства — создает *электрическое поле*. Это поле проявляется в том, что помещенный в какую-либо его точку другой, «пробный», заряд испытывает действие силы.

Опыт показывает, что сила \mathbf{F} , действующая на неподвижный точечный пробный заряд q' , всегда может быть представлена как

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

где вектор \mathbf{E} называют *напряженностью* электрического поля в данной точке. Вектор \mathbf{E} , как видно из (1.1), можно определить как силу, действующую на единичный положительный неподвижный заряд. Здесь предполагается, что пробный заряд q' должен быть достаточно малым, чтобы его внесение не вызвало заметного искажения интересующего нас поля (вследствие возможного перераспределения создающих поле зарядов).

Поле точечного заряда. Из опыта (закон Кулона) непосредственно следует, что напряженность поля неподвижного точечного заряда q на расстоянии r от него можно представить как

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (1.2)$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная; \mathbf{e}_r — орт радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного из центра поля, в котором расположен заряд q , до интересующей нас точки. Формула (1.2) записана в СИ. Здесь коэффициент

$$1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф},$$

заряд q определяют в *кулонах* (Кл), напряженность поля \mathbf{E} — в *вольтах на метр* (В/м). В зависимости от знака заряда q вектор \mathbf{E} направлен так же, как и \mathbf{r} , или противоположно ему.

По существу формула (1.2) выражает не что иное, как **закон Кулона**, но в «полевой» форме. Весьма важно, что напряженность \mathbf{E} поля точечного заряда обратно пропорциональна квадрату расстояния r . Вся совокупность экспериментальных фактов показывает, что этот закон справедлив для расстояний от 10^{-13} см до нескольких километров, и пока нет никаких оснований ожидать, что этот закон не выполняется и при бóльших расстояниях.

Заметим еще, что в поле, создаваемом неподвижным точечным зарядом, сила, действующая на пробный заряд, не зависит от того, покоится пробный заряд или движется. Это относится и к системе неподвижных зарядов.

Принцип суперпозиции. Другой опытный факт, кроме закона (1.2), заключается в том, что напряженность поля системы точечных неподвижных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавали бы каждый из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_{ri}, \quad (1.3)$$

где r_i — расстояние между зарядом q_i и интересующей нас точкой поля.

Это утверждение называют *принципом суперпозиции* (наложения) электрических полей. Он выражает одно из самых замечательных свойств полей и позволяет вычислять напряженность поля любой системы зарядов, представив ее в виде совокупности точечных зарядов, вклад каждого из которых дается формулой (1.2).

Распределение зарядов. Для упрощения математических расчетов во многих случаях бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды имеют дискретную структуру (электроны, ядра), и считать, что они «размазаны» определенным образом в пространстве. Другими словами, удобно заменить истинное распределение точечных дискретных зарядов фиктивным непрерывным распределением. Это позволяет значительно упрощать расчеты, не внося сколько-нибудь значительной ошибки.

При переходе к непрерывному распределению вводят понятие о плотности зарядов — объемной ρ , поверхностной σ и линейной λ . По определению,

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \quad \sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl}, \quad (1.4)$$

где dq — заряд, заключенный соответственно в объеме dV , на поверхности dS и на длине dl .

С учетом этих распределений формула (1.3) может быть представлена в другой форме. Например, если заряд распределен по объему, то надо заменить q_i на $dq = \rho dV$ и Σ на \int , тогда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \mathbf{e}_r dV}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \mathbf{r} dV}{r^3}, \quad (1.5)$$

где интегрирование проводится по всему пространству, в котором ρ отлично от нуля.

Таким образом, зная распределение зарядов, мы можем полностью решить задачу о нахождении напряженности электрического поля по формуле (1.3), если распределение дискретно, или по формуле (1.5) и аналогично ей, если распределение непрерывно. В общем случае расчет сопряжен со значительными трудностями (правда, не принципиального характера). Действительно, для нахождения вектора \mathbf{E} надо вычислить сначала его проекции E_x , E_y , E_z , а это по существу три интеграла типа (1.5). И только в тех случаях, когда система зарядов обладает той или иной симметрией, задача, как правило, значительно облегчается. Приведем два примера.

Пример 1. Поле на оси тонкого равномерно заряженного кольца. Заряд $q > 0$ равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом a . Найти напряженность E электрического поля на оси кольца как функцию расстояния z от его центра.

Легко сообразить, что в данном случае вектор \mathbf{E} должен быть направлен по оси кольца (рис. 1.1). Выделим на кольце около точки A элемент dl . Запишем выражение для составляющей dE_z от этого элемента в точке C :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha,$$

где $\lambda = q/2\pi a$. Для всех элементов кольца r и α будут одними и теми же, поэтому интегрирование этого выражения сводится просто к замене λdl на q . В результате

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

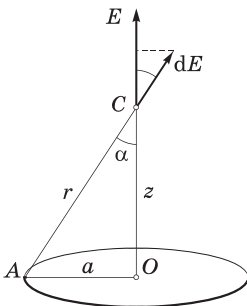


Рис. 1.1

Видно, что при $z \gg a$ поле $E \approx q/4\pi\epsilon_0 z^2$, т. е. на больших расстояниях эта система ведет себя как точечный заряд.

Пример 2. Поле равномерно заряженной прямой нити. Тонкая прямая нить длиной $2l$ заряжена равномерно зарядом q . Найти напряженность E поля в точке, отстоящей на расстояние x от центра нити и расположенной симметрично относительно ее концов.

Из соображений симметрии ясно, что вектор E должен иметь направление, показанное на рис. 1.2. Это подсказывает, как надо поступить далее: определим составляющую dE_x от элемента dl нити с зарядом dq и затем проинтегрируем по всем элементам нити. В нашем случае

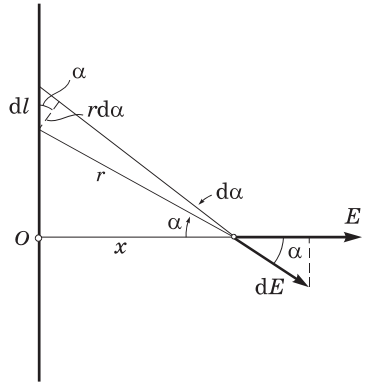


Рис. 1.2

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha,$$

где $\lambda = q/2l$ — линейная плотность заряда. Приведем это уравнение к виду, удобному для интегрирования. Из рис. 1.2 видно, что $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = x/\cos \alpha$, поэтому

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda r d\alpha}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos \alpha d\alpha.$$

Это выражение легко проинтегрировать:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \sin \alpha_0,$$

где α_0 — максимальное значение угла α , $\sin \alpha_0 = l/\sqrt{l^2 + x^2}$, поэтому

$$E = \frac{q/2l}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

И здесь $E \approx q/4\pi\epsilon_0 x^2$ при $x \gg l$, как поле точечного заряда.

Геометрическое описание электрического поля. Зная вектор \mathbf{E} в каждой точке, можно представить электрическое поле очень наглядно с помощью линий напряженности, или линий вектора \mathbf{E} . Эти линии проводят так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора \mathbf{E} , а густота линий, т. е. число линий, пронизывающих единичную площадку, перпендикулярную линиям в данной точке, была бы пропорциональна модулю вектора \mathbf{E} . Кроме того, этим линиям приписывают направление, совпадающее с направлением вектора \mathbf{E} . По полученной картине можно легко судить о конфигурации данного электрического поля — о направлении и модуле вектора \mathbf{E} в разных точках поля.

Об общих свойствах поля \mathbf{E} . Определенное выше поле \mathbf{E} обладает, как выяснилось, двумя чрезвычайно важными свойствами, знание которых помогло глубже проникнуть в суть самого понятия поля и сформулировать его законы, а также открыло возможность решить ряд вопросов весьма просто и изящно. Эти свойства — так называемые теорема Гаусса и теорема о циркуляции вектора \mathbf{E} — связаны с двумя важнейшими математическими характеристиками всех векторных полей: *поток* и *циркуляцией*. Как мы увидим, пользуясь только этими двумя понятиями, можно описать все законы не только электричества, но и магнетизма. Перейдем к последовательному рассмотрению этих свойств.

§ 1.2. Теорема Гаусса

Поток вектора \mathbf{E} . Для большей наглядности воспользуемся геометрической картиной описания электрического поля (с помощью линий вектора \mathbf{E}) и еще, для упрощения рассуждений, будем считать, что густота линий \mathbf{E} равна модулю вектора \mathbf{E} . Тогда число линий, пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль \mathbf{n} которой составляет угол α с вектором \mathbf{E} , определяется согласно рис. 1.3 как $E dS \cos \alpha$. Эта величина и есть поток $d\Phi$ вектора \mathbf{E} сквозь площадку dS . В более компактной форме

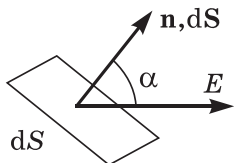


Рис. 1.3

$$d\Phi = E_n dS = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

где E_n — проекция вектора \mathbf{E} на нормаль \mathbf{n} к площадке dS , $d\mathbf{S}$ — вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с нормалью \mathbf{n} к площадке. Заметим, что выбор направления вектора \mathbf{n} (а следовательно, и $d\mathbf{S}$) условен, его можно было бы направить и в противоположную сторону.

Если имеется некоторая произвольная поверхность S , то поток вектора \mathbf{E} сквозь нее

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1.6)$$

Эта величина алгебраическая: она зависит не только от конфигурации поля \mathbf{E} , но и от выбора направления нормали. В случае *замкнутых* поверхностей принято нормаль \mathbf{n} брать *наружу* области, охватываемой этими поверхностями, т. е. выбирать *внешнюю* нормаль, что в дальнейшем будет всегда и подразумеваться.

Хотя здесь речь шла о потоке вектора \mathbf{E} , понятие потока в равной степени относится к любому векторному полю.

Теорема Гаусса. Поток вектора \mathbf{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S обладает удивительным и замечательным свойством: он зависит только от алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью. А именно

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{внутр}}, \quad (1.7)$$

где кружок у интеграла означает, что интегрирование проводится по замкнутой поверхности.

Это выражение и составляет суть **теоремы Гаусса**: *поток вектора \mathbf{E} сквозь замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ε_0 .*

Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим поле одного точечного заряда q . Окружим этот заряд произвольной замкнутой поверхностью S (рис. 1.4) и найдем поток вектора \mathbf{E} сквозь элемент $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi = \mathbf{E} d\mathbf{S} = E dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega, \quad (1.8)$$

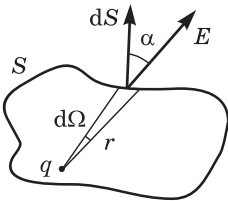


Рис. 1.4

где $d\Omega$ — телесный угол, опирающийся на элемент поверхности dS , с вершиной в точке расположения заряда q . Интегрирование этого выражения по всей поверхности S эквивалентно интегрированию по всему телесному углу, т. е. замене $d\Omega$ на 4π , и мы получим $\Phi = q/\epsilon_0$, как и требует формула (1.7).

Заметим, что при более сложной форме замкнутой поверхности углы α могут быть больше $\pi/2$, а значит, $\cos \alpha$ и $d\Omega$ в (1.8) принимают, вообще говоря, как положительные, так и отрицательные значения. Итак, $d\Omega$ — величина алгебраическая: если $d\Omega$ опирается на внутреннюю сторону поверхности S , то $d\Omega > 0$, если же на внешнюю сторону, то $d\Omega < 0$.

Отсюда, в частности, следует: если заряд q расположен вне замкнутой поверхности S , то поток вектора \mathbf{E} через нее равен нулю. Для этого достаточно провести из заряда q коническую поверхность так, чтобы она оказалась касательной к замкнутой поверхности S . Тогда интегрирование выражения (1.8) по поверхности S эквивалентно интегрированию по Ω (рис. 1.5): внешняя сторона поверхности S будет видна из точки q под углом $\Omega > 0$, а внутренняя под углом $-\Omega$ (оба угла по модулю равны). В сумме получим нуль, и $\Phi = 0$, что также совпадает с утверждением (1.7). На языке линий вектора \mathbf{E} это означает, что сколько линий входит в объем, ограниченный поверхностью S , столько и выходит.

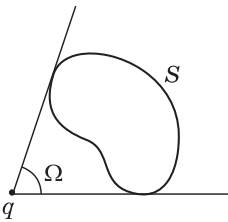


Рис. 1.5

Теперь обратимся к случаю, когда электрическое поле создается системой точечных зарядов q_1, q_2 и т. д. В этом случае согласно принципу суперпозиции $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$, где \mathbf{E}_1 — поле, создаваемое зарядом q_1 , и т. д. Тогда поток вектора \mathbf{E} можно записать так:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}_1 d\mathbf{S} + \oint \mathbf{E}_2 d\mathbf{S} + \dots = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

Согласно предыдущему каждый интеграл в правой части равен q_i/ϵ_0 , если заряд q_i находится *внутри* замкнутой поверхно-

сти S , и нулю, если *снаружи* поверхности S . Поэтому в правой части останется алгебраическая сумма *только* тех зарядов, которые находятся *внутри* поверхности S .

Для завершения доказательства теоремы остается учесть случай, когда заряды распределены непрерывно с объемной плотностью, зависящей от координат. В этом случае можно считать, что каждый элементарный объем dV содержит «точечный» заряд ρdV . Тогда в правой части (1.7)

$$q_{\text{внутр}} = \int \rho dV, \quad (1.9)$$

где интегрирование проводится только по объему, заключенному *внутри* замкнутой поверхности S .

Необходимо обратить внимание на следующее важное обстоятельство: в то время как само поле \mathbf{E} зависит от конфигурации *всех* зарядов, поток вектора \mathbf{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S определяется только алгебраической суммой зарядов *внутри* поверхности S . Это значит, что если передвинуть заряды, то поле \mathbf{E} изменится всюду, в частности, и на поверхности S ; изменится, вообще говоря, и поток вектора \mathbf{E} через S . Однако если передвижка зарядов произошла без пересечения поверхности S , поток вектора \mathbf{E} через эту поверхность останется *прежним*, хотя, повторяем, само поле \mathbf{E} может измениться, причем весьма существенно. Удивительное свойство электрического поля!

§ 1.3. Применения теоремы Гаусса

Поскольку поле \mathbf{E} зависит от конфигурации *всех* зарядов, теорема Гаусса, вообще говоря, не дает возможности найти это поле. Однако в ряде случаев теорема Гаусса оказывается весьма эффективным аналитическим инструментом: она позволяет получить ответы на некоторые принципиальные вопросы, не решая задачи, а также находить и само поле \mathbf{E} , причем чрезвычайно простым путем. Рассмотрим несколько примеров, а затем сформулируем некоторые общие выводы о том, в каких случаях применение теоремы Гаусса оказывается наиболее целесообразным.

Пример 1. О невозможности устойчивого равновесия заряда в электрическом поле. Пусть в вакууме имеется система неподвижных точечных зарядов, находящихся в равновесии. Рассмотрим один из этих зарядов — заряд q . Может ли состояние его равновесия быть устойчивым?

Чтобы ответить на этот вопрос, окружим заряд q небольшой замкнутой поверхностью S (рис. 1.6). Допустим, для определенности, что $q > 0$. Тогда для того чтобы равновесие заряда q было устойчивым, необходимо, чтобы во всех точках поверхности S поле \mathbf{E} , образованное всеми *остальными* зарядами системы, было направлено к заряду q : только в этом случае при любом малом смещении заряда q из положения равновесия на него будет действовать *возвращающая* сила, и положение равновесия действительно будет устойчивым.

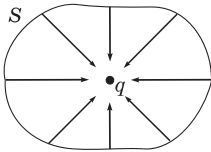


Рис. 1.6

Но такая конфигурация поля \mathbf{E} вокруг заряда q противоречит теореме Гаусса: поток вектора \mathbf{E} сквозь поверхность S отрицателен, согласно же теореме Гаусса он должен быть равным нулю, поскольку этот поток создается зарядами, расположенными *вне* поверхности S . А равенство потока вектора \mathbf{E} нулю означает, что в каких-то точках поверхности S вектор \mathbf{E} направлен внутрь, а в каких-то обязательно наружу. Отсюда и следует, что устойчивое равновесие заряда в любом электростатическом поле невозможно.

Пример 2. Поле равномерно заряженной плоскости. Пусть поверхностная плотность заряда равна σ . Из симметрии задачи очевидно, что вектор \mathbf{E} может быть только перпендикулярным заряженной плоскости. Кроме того,

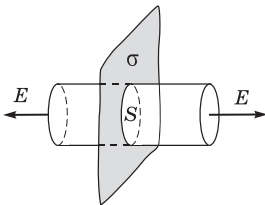


Рис. 1.7

ясно, что в симметричных относительно этой плоскости точках вектор \mathbf{E} одинаков по модулю и противоположен по направлению. Такая конфигурация поля подсказывает, что в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр, расположенный, как на рис. 1.7, где предполагается $\sigma > 0$.

Поток сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю, и поэтому полный поток через всю поверхность ци-

линдр будет $2E\Delta S$, где ΔS — площадь каждого торца. Внутри цилиндра заключен заряд $\sigma\Delta S$. Согласно теореме Гаусса $2E\Delta S = \sigma\Delta S/\epsilon_0$, откуда $E = \sigma/2\epsilon_0$. Точнее это выражение следует записать так:

$$E_n = \sigma/2\epsilon_0, \quad (1.10)$$

где E_n — проекция вектора \mathbf{E} на нормаль \mathbf{n} к заряженной плоскости, причем вектор \mathbf{n} направлен от этой плоскости. Если $\sigma > 0$, то и $E_n > 0$, значит, вектор \mathbf{E} направлен от заряженной плоскости, как на рис. 1.7; если же $\sigma < 0$, то $E_n < 0$, значит, вектор \mathbf{E} направлен к заряженной плоскости. Тот факт, что E не зависит от расстояния до плоскости, означает, что соответствующее электрическое поле является однородным (как слева, так и справа от плоскости).

Полученный результат справедлив только для бесконечной плоской поверхности, ибо только в этом случае могут быть использованы приведенные соображения симметрии. Однако он приближенно справедлив и для области, прилегающей к средней части конечной равномерно заряженной плоской поверхности, вдали от ее краев.

Пример 3. Поле двух параллельных плоскостей, заряженных равномерно разноименными зарядами с плотностями σ и $-\sigma$.

Это поле можно легко найти как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности (рис. 1.8). Здесь верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательно заряженной плоскости. Между плоскостями напряженности складываемых полей имеют одинаковое направление, поэтому результат (1.10) просто удвоится, и результирующая напряженность поля между плоскостями

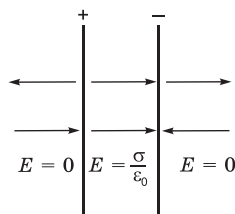


Рис. 1.8

$$E = \sigma/\epsilon_0, \quad (1.11)$$

где под σ подразумевается модуль поверхностной плотности заряда. Вне этой области, как легко видеть, поле равно нулю. Таким образом, поле в данном случае сосредоточено между плоскостями и является однородным в этой области.

Полученный результат приближенно справедлив и для пластин конечных размеров, если только расстояние между пластинами значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). Здесь заметные отклонения поля от однородности наблюдаются только вблизи краев пластин (этим при расчетах часто пренебрегают).

Пример 4. Поле бесконечного круглого цилиндра, заряженного равномерно по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд λ .

Из соображений симметрии следует, что поле здесь имеет радиальный характер, т. е. вектор \mathbf{E} в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора \mathbf{E} зависит только от расстояния r до оси цилиндра. Это подсказывает, что замкнутую поверхность здесь надо взять в форме коак-

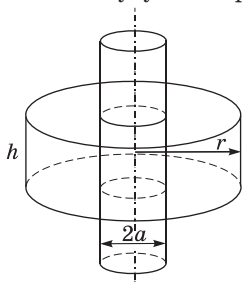


Рис. 1.9

сиального прямого цилиндра (рис. 1.9). Тогда поток вектора \mathbf{E} сквозь торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность $E_r 2\pi r h$, где E_r — проекция вектора \mathbf{E} на радиус-вектор \mathbf{r} , совпадающий по направлению с нормалью \mathbf{n} к боковой поверхности цилиндра радиусом r и высотой h . По теореме Гаусса для случая $r > a$ имеем $E_r 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0$, откуда

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > a). \quad (1.12)$$

При $\lambda > 0$ и $E_r > 0$, т. е. вектор \mathbf{E} направлен от заряженного цилиндра, и наоборот.

Если $r < a$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области $E = 0$ независимо от r .

Таким образом, внутри равномерно заряженного по поверхности круглого бесконечного цилиндра поля нет.

Пример 5. Поле сферической поверхности радиусом a , заряженной равномерно зарядом q .

Это поле, очевидно, центрально-симметричное: направление вектора \mathbf{E} в любой точке проходит через центр сферы, а модуль вектора \mathbf{E} должен зависеть только от расстояния r до центра сферы. Ясно, что при такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности надо взять концентриче-

скую сферу. Пусть ее радиус $r > a$, тогда по теореме Гаусса $E_r 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$, откуда

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > a), \quad (1.13)$$

где E_r — проекция вектора \mathbf{E} на радиус-вектор \mathbf{r} , совпадающий по направлению с нормалью \mathbf{n} к поверхности в каждой ее точке. Знак заряда q и здесь определяет знак проекции E_r , а следовательно, и направление самого вектора \mathbf{E} : от заряженной сферы (при $q > 0$) или к ней (при $q < 0$).

Если $r < a$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области всюду $E = 0$, т. е. внутри равномерно заряженной сферической поверхности электрическое поле отсутствует. Вне этой поверхности поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда.

Пример 6. Поле равномерно заряженного шара.

Пусть заряд q равномерно распределен по шару радиусом a . Поле такой системы, очевидно, также центрально-симметричное, поэтому и здесь для нахождения поля следует в качестве замкнутой поверхности взять концентрическую сферу. Нетрудно сообразить, что для поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем примере [см. (1.13)]. Внутри же шара выражение для поля будет другим. Сфера радиусом $r < a$ охватывает заряд $q' = q(r/a)^3$, ибо в нашем случае заряды относятся как объемы, а последние как кубы радиусов. Поэтому согласно теореме Гаусса

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q(r/a)^3,$$

откуда

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} r \quad (r \leq a), \quad (1.14)$$

т. е. внутри равномерно заряженного шара напряженность растет линейно с расстоянием r от его центра. График зависимости E от r показан на рис. 1.10.

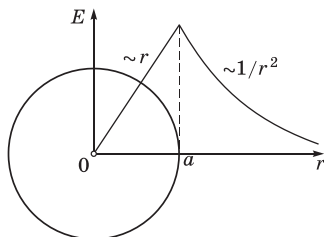


Рис. 1.10