Оглавление

Инструкция по выполнению работы 9

Тренировочные варианты 10
Вариант № 1 10
Вариант № 2 14
Вариант № 3 18
Вариант № 4 22
Вариант № 5 26
Вариант № 6 30
Вариант № 7 34
Вариант № 8 39
Вариант № 9 44
Вариант № 10 48
Вариант № 11 52
Вариант № 12 57
Вариант № 13 62
Вариант № 14 67
Вариант № 15 72
Вариант № 16 76
Вариант № 17 80
Вариант № 18 85
Вариант № 19 90
Вариант № 20 94
Вариант № 21 98
Вариант № 22 102
Вариант № 23 106
Вариант № 24 110
Вариант № 25 114
Вариант № 26 119

Вариант № 27 124
Вариант № 28 128
Вариант № 29 132
Вариант № 30 136
Вариант № 31 140
Вариант № 32 144
Вариант № 33 148
Вариант № 34 152
Вариант № 35 156
Вариант № 36 160
Вариант № 37 164
Вариант № 38 168
Вариант № 39 172
Вариант № 40 176

Примеры выполнения избранных вариантов 180
Вариант № 1 180
Вариант № 5 189
Вариант № 9 198
Вариант № 13 208
Вариант № 17 218
Вариант № 21 226
Вариант № 25 235
Вариант № 29 247
Вариант № 33 256
Вариант № 37 266

Краткий теоретический справочник 275
§ 1. Условные обозначения 275
§ 2. Степени и корни 276
§ 3. Модуль и его свойства 277
§ 4. Прогрессии 278
§ 5. Логарифмы 278
§ 6. Теория вероятностей 279
§ 7. Тригонометрия 280
§ 8. Многочлены и их корни 285

§ 9. Уравнения 289
§ 10. Неравенства 291
§ 11. Функции 293
§ 12. Планиметрия 308
§ 13. Стереометрия 322

Ответы к тренировочным вариантам 335

Тренировочные варианты

Вариант № 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Единицы измерений писать не нужно.

1. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 25$, $AB = 14$ (см. рис. 1). Найдите $\sin A$.

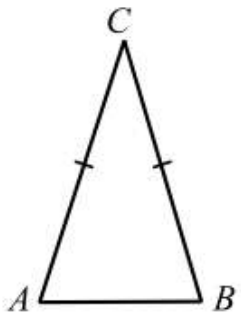


Рис. 1

2. Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$ (см. рис. 2).

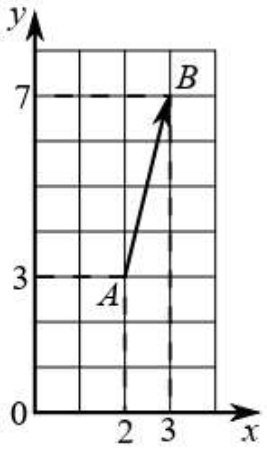


Рис. 2

3. Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед (см. рис. 3). Радиус основания и высота цилиндра равны 7. Найдите объём параллелепипеда.

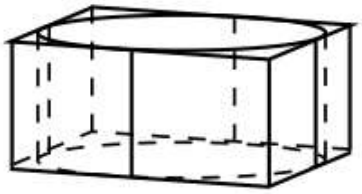


Рис. 3

4. В сборнике билетов по механике 88 билетов. В 11 из них встречается вопрос по кинематике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном билете студенту не достанется вопрос по кинематике.

5. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

6. Организаторы лотереи выпустили 5000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом.

Выигрыш (в рублях)	200	500	1000	5000	10 000
Количество билетов	100	40	10	3	1

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

7. Найдите корень уравнения $\frac{4}{9}x = 3\frac{1}{9}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{25x^2 - 16}{5x + 4} - 5x$.

9. Прямая $-2x + 7$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

10. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 4\sin \pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 2 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

11. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал четверть пути со скоростью 40 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью, на 12 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. На рисунке 4 изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(11)$.

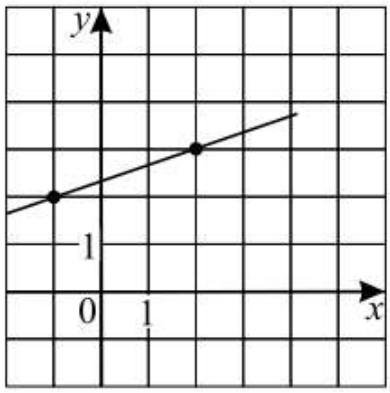


Рис. 4

13. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 104 040 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

14. а) Решите уравнение $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\sqrt{3} - 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки M и K — середины рёбер AB и SD соответственно.

а) Докажите, что прямая MK параллельна плоскости SBC.

б) Найдите высоту пирамиды, если $AB = 8$, а угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен $45°$.

16. Решите неравенство $3^{\log_3(\log_3 x)} + \log_9^2 x - 8 \leqslant 0$.

17. В квартире аккумулятор ноутбука с электродвижущей силой $\varepsilon = 19$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом может быть подключён к разным устройствам. Назовём такое устройство внешним резистором с переменным сопротивлением R (в омах). По закону Ома для полной цепи сила тока (в амперах) равна $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$.

Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая на внешнем сопротивлении, находится по формуле $P = I^2 \cdot R$. Какова максимальная мощность P, которая может быть выделена на внешнем резисторе?

18. В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB. Отрезки HM и HK — перпендикуляры к прямым AB и AC соответственно. Отрезки CT и MK пересекаются в точке E.

а) Докажите, что прямые AB и EH параллельны.

б) Найдите ME, если известно, что $AB = 6$ и $AC = 8$.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2(x^2 - 2x)a^2 + (x^4 - 2x^3 - 8x + 16)a - 4x^3 + 8x^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

20. На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 3, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше -48.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

а) Может ли на столе лежать ровно четыре карточки?

б) Может ли число красных карточек на столе быть на 30 больше числа синих карточек на столе?

в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?

Вариант № 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Единицы измерений писать не нужно.

1. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{5}$ (см. рис. 5). Найдите AB.

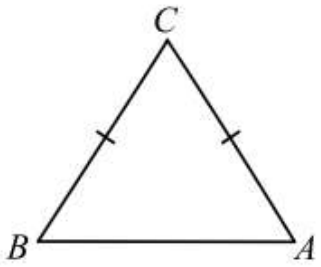


Рис. 5

2. Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$ (см. рис. 6).

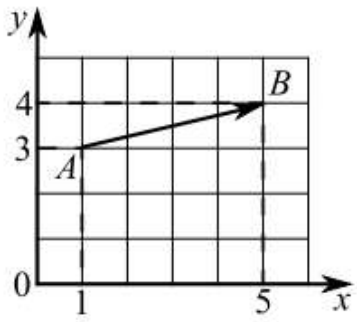


Рис. 6

3. Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед (см. рис. 7). Радиус основания и высота цилиндра равны 2. Найдите объём параллелепипеда.

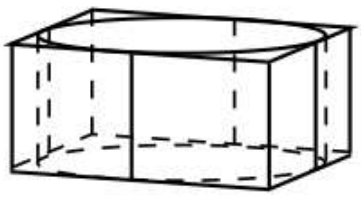


Рис. 7

4. В сборнике билетов по механике 65 билетов. В 13 из них встречается вопрос по динамике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном билете студенту не достанется вопрос по динамике.

5. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые и не попадёт в последнюю мишень.

6. Организаторы лотереи выпустили 20 000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом.

Выигрыш (в рублях)	200	500	1000	5000	20 000
Количество билетов	1000	200	30	10	1

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

7. Найдите корень уравнения $\frac{5}{6}x = -1\frac{1}{3}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{121x^2 - 49}{11x - 7} - 11x$.

9. Прямая $y = 6x - 1$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 4x - 2$. Найдите абсциссу точки касания.

10. Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t) = 9\sin \pi t$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первой секунды скорость движения превышала 4,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

11. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал $\frac{2}{5}$ пути со скоростью 60 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью, на 15 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. На рисунке 8 изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-5)$.

13. В июле 2028 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

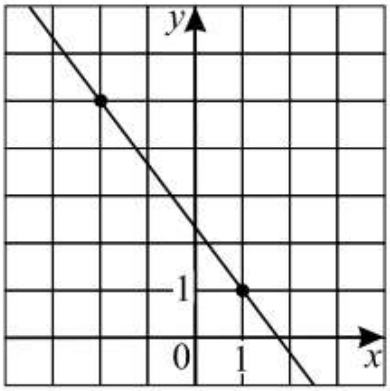


Рис. 8

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 204 800 рублей больше суммы, взятой в кредит?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

14. а) Решите уравнение $2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0.$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

15. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки M и K — середины рёбер AB и SD соответственно.

а) Докажите, что прямая MK параллельна плоскости SBC.

б) Найдите высоту пирамиды, если $AB=6$, а угол между прямой MK и плоскостью основания пирамиды равен 30°.

16. Решите неравенство $7^{\log_7(\log_7 x)}+\log_{49}^2 x-3\leqslant 0$.

17. На фабрике источник тока с электродвижущей силой $\varepsilon=450$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом подключён к внешнему резистору с переменным сопротивлением R (в омах). По закону Ома для полной цепи сила тока (в амперах) равна $I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}$.

Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая на внешнем сопротивлении, находится по формуле $P=I^2\cdot R$. Какова максимальная мощность P, которая может быть выделена на внешнем резисторе?

18. В остроугольном треугольнике ABC $\angle BAC = 2\angle ACB$. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Вокруг треугольника AOB описана окружность, которая пересекает сторону BC в точке F.

а) Докажите, что треугольники ABC и FAB подобны.

б) Найдите AC, если $BC = 10$ и $AB = 4$.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2+x)a^2+3(x^4+x^3-x-1)a-9x^3-9x^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

20. На столе лежит некоторое количество карточек, часть из которых синего цвета, а остальные красного (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано целое число. На карточках синего цвета написаны различные числа, делящиеся на 5, а на карточках красного цвета написаны различные чётные числа (при этом некоторые числа могут быть написаны дважды: один раз на синей карточке и один раз на красной карточке). Все числа на карточках больше -80.

Оказалось, что наибольшее число, написанное на красной карточке, равно удвоенному количеству синих карточек, а наибольшее число, написанное на синей карточке, равно количеству красных карточек.

а) Может ли на столе лежать ровно шесть карточек?

б) Может ли число красных карточек на столе быть на 50 больше числа синих карточек на столе?

в) Какое наибольшее количество карточек может лежать на столе?