Оглавление

От автора 5
Программа курса «Решение олимпиадных задач» (34 ч) 8

Раздел I. ЧЁТНОСТЬ 11
Занятие 1. Чётные и нечётные числа. Признак делимости на два 11
Занятие 2. Решение задач 13
Занятие 3. Решение задач на чётность 14
Занятие 4. Решение задач 16
Занятие 5. Решение задач на чётность 17
Занятие 6. Решение задач 18
Занятие 7. Математический бой по задачам домашнего задания 19

Раздел II. ЗАДАЧИ НА ДОЛИ И ЧАСТИ 20
Занятие 8. Решение задач на доли и части 20
Занятие 9. Решение задач 23
Занятие 10. Решение задач на дроби и части 24
Занятие 11. Решение задач 25
Занятие 12. Викторина «История математики» 26

Раздел III. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ 28
Занятие 13. Знакомство с принципом Дирихле 28
Занятие 14. Принцип Дирихле. Решение задач 31
Занятие 15. Решение задач 32
Занятие 16. Решение задач 34
Занятие 17. Решение задач 36
Занятие 18. Математический бой по задачам домашнего задания 37

Раздел IV. РАСКРАСКИ 38
Занятие 19. Раскраски 38
Занятие 20. Решение задач 41
Занятие 21. Решение задач 42
Занятие 22. Олимпиада 43
Занятие 23. Разбор задач олимпиады и домашнего задания 43

Раздел V. ДЕЛИМОСТЬ 44
Занятие 24. Делимость 44
Занятие 25. Решение задач 45
Занятие 26. Решение задач 46
Занятие 27. Решение задач 47

Раздел VI. КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ 48
Занятие 28. Задачи на построение примера 48
Занятие 29. Решение конструктивных задач 50
Занятие 30. Решение задач 52
Занятие 31. Решение задач 52
Занятие 32. Решение задач 53
Занятие 33. Решение задач 55
Занятие 34. Математический бой по задачам домашнего задания 55

Дополнительные задачи 56
Правила математического боя 59
Ответы 66
Литература 95

Раздел I

ЧЁТНОСТЬ

Занятие 1. Чётные и нечётные числа. Признак делимости на два

Свойства чётности

Известно, что целые числа бывают чётные и нечётные. Чётные числа можно записать в виде $2k$, где k — целое число, а нечётные — в виде $2k + 1$. Легко доказать (показать на примерах) такие свойства чётности для целых чисел.

1. Сумма чётных чисел чётна.
2. Сумма двух нечётных чисел чётна.
3. Сумма чётного и нечётного чисел нечётна.
4. Произведение любого числа на чётное — чётно.
5. Если произведение нечётно, то все сомножители нечётны.
6. Сумма чётного количества нечётных чисел чётна.
7. Сумма нечётного количества нечётных чисел нечётна.
8. Разность и сумма двух данных чисел — числа одной чётности.
9. Если объекты можно разбить на пары, то их количество чётно.

Рекомендуется одно из этих свойств доказать учителю, одно — всем вместе на доске и одно — самостоятельно.

▸ **Пример 1.**

Могут ли десять игрушек ценой 43 рубля, 65 или 77 рублей стоить 535 рублей?

Решение.

Сумма чётного количества нечётных чисел чётна. У нас есть 10 игрушек, цена каждой игрушки — нечётное число рублей, **следовательно, их стоимость — чётное число рублей.** Но 535 — число нечётное, поэтому получить его в виде суммы 10 нечётных чисел нельзя.

Ответ: Нет.

▸ **Пример 2.**

Можно ли 7 телефонов соединить между собой попарно так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими?

Решение.

При решении этой задачи используется такое соображение: если мы рассматриваем объекты и явления типа верёвки — провода, дороги, рукопожатия, знакомства и т. д., то при любом количестве объектов число концов должно быть чётным. Предположим, что мы соединили 7 телефонов между собой попарно так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими. Посчитаем количество концов проводов, соединяющих эти телефоны. Понятно, что их число должно быть чётным. От каждого из 7 телефонов отходит 3 конца, всего $7 \cdot 3 = 21$ конец, число нечётное, значит, нельзя 7 телефонов соединить между собой попарно так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими.

Ответ: Нет.

▸ **Пример 3.**

13 команд играют однокруговой турнир. Докажите, что в любой момент есть команда, сыгравшая чётное число матчей. (Однокруговой турнир — когда каждая команда играет с каждой ровно один раз).

Указание. В общей сумме всех игр каждая игра учитывается два раза, если же подсчитать сумму игр 13 команд, сыгравших по нечётному числу матчей, результат будет нечётный. Чтобы общая сумма игр получилась чётной, хотя бы одна команда должна сыграть чётное число матчей.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1.1. Гриша посчитал сумму $1 + 3 + 5 + \ldots + 997 + 999$ и получил результат 247013. Какова чётность данной суммы? Верный ли ответ получил Гриша? Попробуйте выполнить сложение устно.

1.2. Вычислите: $99 - 97 + 95 - 93 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1$.

1.3. Запишите число 31, пользуясь знаками действий и 1) шестью тройками; 2) пятью пятёрками; 3) пятью тройками.

1.4. Может ли сумма $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot M + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$, где M и K — натуральные числа, бóльшие трёх, оканчиваться на 9?

1.5. Сколько существует трёхзначных чисел,
а) запись которых содержит только цифры 5, 8, 9?
б) в которых цифры 5, 8, 9 встречаются по одному разу?

1.6. У Маши было 5 плиток шоколада. Может ли Маша, поделив каждую плитку на 9, 15 или 25 кусочков, получить всего 100 кусков шоколада?

Занятие 2. Решение задач

▸ **Пример 1.**

В секции бокса мальчиков в 14 раз больше, чем девочек, при этом всего в секции не более 20 человек. Смогут ли они разбиться на пары?

Решение.

Пусть девочек в этой секции x, тогда мальчиков $14x$, всего $15x$. Но $15x < 20$, значит, $x = 1$. Мальчиков — 14, девочек — 1, а 15 человек нельзя разбить на пары.

Ответ: Нет.

▸ **Пример 2.**

На столе лежат 6 монет, одна из них вверх орлом, другие — решкой. Можно ли все монеты положить вверх орлом, если можно одновременно переворачивать по две монеты?

Решение.

При переворачивании двух монет одновременно чётность числа монет орлом вверх не меняется. Докажем это.

Если перевернуть две монеты вверх орлом, они станут вверх решкой ($OO \to PP$), орлов стало на 2 меньше, чётность не изменится.

Если перевернуть две монеты вверх решкой, они станут вверх орлом ($PP \to OO$), орлов стало на 2 больше, чётность не изменится.

Если перевернуть одну монету вверх орлом, другую — вверх решкой ($OP \to PO$), количество орлов останется прежним. Сначала была одна монета вверх орлом, значит, их будет всегда нечётное количество, а 6 — чётно.

Ответ: Нельзя.

Рекомендуется разобрать задачи домашнего задания.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

В тетрадном листке бумаги ножницами прорежьте такую дырку, чтобы туда мог пролезть человек.

Решение.

Лист бумаги нужно сложить вдвое (линия сгиба сверху) и разрезать по линиям (см. рис. 1).

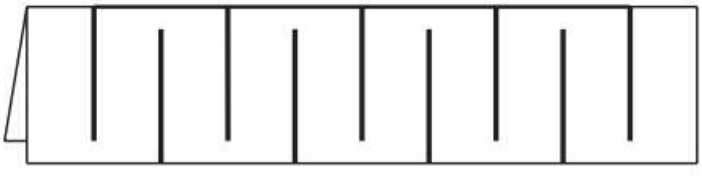


Рис. 1

Найдите закономерность и продолжите ряд:

1) 1, 2, 4, 7, 11 ... 2) а, бб, ввв, ... 3) (см. рис. 2)

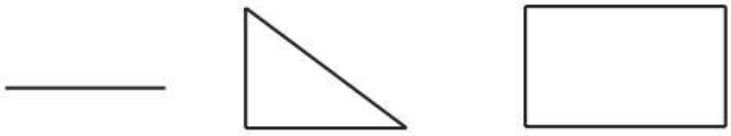


Рис. 2

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1.7. Запишите число 100, используя все 10 цифр и знаки некоторых действий.

1.8. В двузначном числе количество десятков в 4 раза меньше количества единиц, а сумма цифр этого числа равна наименьшему двузначному числу. Что это за число?

1.9. В корзинах, расставленных по кругу, лежат арбузы, причём в любых двух соседних корзинах число арбузов отличается на единицу. Могут ли так быть расставлены: а) 3; б) 4; в) 98; г) 99 корзин?

1.10. Лена и Маша играют в следующую игру: каждая из них записывает на бумажке по одному натуральному числу. Потом эти числа перемножаются, и если в результате получается чётное число, то выигрывает Лена, а если нечётное, то Маша. Может ли одна из девочек всегда выигрывать, как бы ни играла другая?

Занятие 3. Решение задач на чётность

Повторение свойств чётности. Доказательство одного из них.

► **Пример 1.**

Можно ли в таблице 5 × 5 расставить 25 натуральных чисел так, чтобы во всех строках суммы были чётные, а во всех столбцах — нечётные?

Указание. Посчитайте сумму чисел во всех строках и во всех столбцах и сравните. Если они разной чётности, то расставить числа нельзя.

Ответ: Нельзя.

► **Пример 2.**

В таблице 6 × 6 за 1 ход можно поменять все знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли таким образом

из таблицы, приведённой а) на рисунке 3; б) на рисунке 4, получить таблицу из одних минусов?

+	−	+	−	+	+
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−

Рис. 3

−	−	−	−	+	−
−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−
+	+	+	+	+	−

Рис. 4

Решение.

а) Рассмотрим, как меняется количество минусов за 1 ход. Допустим, мы меняем знаки в строчке. Заметим, что при этом количество минусов в других строчках остаётся неизменным. Если в изменяемой строчке было чётное количество минусов, то было и чётное количество плюсов, и после смены знаков чётность общего числа минусов в таблице не изменится. Если там было нечётное количество минусов, то было и нечётное количество плюсов, и после смены знаков чётность общего числа минусов в таблице тоже не изменится. Аналогично для столбца. Значит, если в начале было 17 минусов (нечётное число), то получить таблицу из 36 минусов нельзя, так как минусов всегда будет нечётное количество.

б) Во второй таблице (см. рис. 4) число минусов чётное, но получить нужную таблицу всё равно нельзя. Рассмотрим квадрат 2×2 в правом верхнем углу таблицы. Заметим, что количество минусов в этом отдельно взятом кусочке меняется по тем же правилам, что и во всей таблице, причем чётность количества минусов в этой табличке 2×2 тоже не меняется — остаётся нечётной. Значит, даже в этом кусочке нельзя получить все 4 минуса.

Ответ: а) нет, б) нет.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1.11. Можно ли в таблице 4×4 расставить натуральные числа таким образом, чтобы во всех строчках суммы оканчивались на 5, а во всех столбцах на 0? А в таблице 15×15?

1.12. Пять девятиногов с планеты Шуруру решили устроить турнир по армрестлингу. Смогут ли они провести поединки для всех своих ног, чтобы все ноги одновременно принимали участие, и в каждом поединке встречалось ровно две ноги?

1.13. С помощью четырёх четвёрок и знаков действий требуется записать все натуральные числа от 1 до 10.

1.14. Как быстро вычислить $100 + 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 55 - 56$?

1.15. Выпишите все трёхзначные числа, которые состоят из цифр 5, 6 и 1, если они делятся на 5 и число сотен не больше числа десятков.

1.16. Какое натуральное число в 7 раз больше числа его единиц?

Занятие 4. Решение задач

Рекомендуется в начале занятия разобрать задачи домашнего задания.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Вырежьте 4 длинные ленты бумаги и склейте их концы. У первого кольца просто соедините концы без перекручивания. У второго и третьего (их называют листами Мёбиуса — см. рис. 5) концы ленты перекрутите один раз на 180°. У четвёртого — концы ленты перед склейкой перекрутите на 360°. После высыхания клея на первой, второй и четвёртой ленте проведите линию вдоль ленты посередине, не отрывая ручки от поверхности, пока линия не вернётся в исходную точку. Посмотрите, что получилось. Лист Мёбиуса — односторонняя поверхность. А сколько поверхностей имеет четвёртое кольцо?

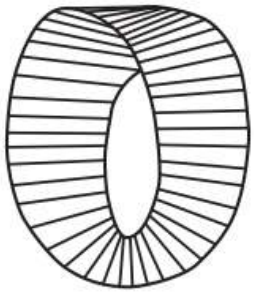


Рис. 5

После этого можно разрезать эти кольца по линии и посмотреть, что получится. (Два отдельных кольца, одно вдвое длиннее другого; два кольца, сцепленные друг с другом.)

Попробуйте разрезать лист Мёбиуса на расстоянии в одну треть от края. Что при этом получится? (Одно большое кольцо и сцепленное с ним маленькое.)

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1.17. В книге 300 страниц. Найдите сумму номеров страниц и количество цифр, потребовавшихся для нумерации.

1.18. 4 пуговицы и 3 булавки стоят 26 рублей, а 2 пуговицы и 2 булавки стоят 14 рублей. Сколько стоят: 1) 8 пуговиц и 7 булавок; 2) 8 пуговиц и 4 булавки?

1.19. На доске написаны восемь простых чисел, каждое из которых больше двух. Может ли их сумма равняться 59?

1.20. Товар стоил 580 рублей. Он подорожал на $\frac{1}{10}$, а затем ещё на $\frac{1}{5}$. Сколько рублей стал стоить этот товар?

1.21. На какое число нужно разделить 2, чтобы получить 4?

Занятие 5. Решение задач на чётность

▸ **Пример 1.**

На столе стоят 16 стаканов, один из них вверх дном. Можно ли все стаканы поставить правильно, если можно одновременно переворачивать по 4 стакана?

Указание. Посмотрите, сколько стаканов поставлено правильно сначала, сколько нужно получить в конце и как меняется чётность этого числа при каждом переворачивании. Нужно рассмотреть все 5 вариантов (все вверх дном, 3 из 4 вверх дном и т. д.) и убедиться, что чётность правильно стоящих стаканов при переворачивании не изменяется. Значит, получить из нечётного числа чётное нельзя.

Ответ: Нет.

▸ **Пример 2.**

На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2005, 2006. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

Решение.

Посчитаем сначала сумму всех чисел, записанных на доске. Она равна $(1 + 2006) \cdot 2006 : 2 = 2007 \cdot 1003$ — нечётному числу. Теперь посмотрим, как меняется эта сумма, если из неё взять два слагаемых и заменить их разностью этих чисел. Если эти два числа были чётные, то их сумма была чётной, их разность тоже будет чётной и чётность общей суммы не изменится. Аналогично для двух нечётных чисел. Если же одно число было чётное, а другое — нечётное, то их сумма была нечётной, их разность тоже будет нечётной и чётность общей суммы тоже не изменится. Значит, у нас могут получаться только нечётные суммы, а нуль — число чётное, и оно в конце на доске остаться не может.

Ответ: Нет.