Содержание

От авторов 4

Краткие теоретические сведения 5

Раздел I. Подготовительные задачи 7
Задачи на построение 7
Задачи на вычисление 14

Раздел II. Построение сечений многогранников 27

Раздел III. Практикум 52

Раздел IV. Задачи в формате ЕГЭ профильного уровня 64

Ответы к заданиям 89

Краткие теоретические сведения

Сечение многогранника — некоторый многоугольник. Вершины этого многоугольника находятся как точки пересечения рёбер многогранника с секущей плоскостью, а стороны многоугольника строятся как линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

Таким образом, сечение многогранника — это многоугольник, вершины которого принадлежат рёбрам, а стороны — граням многогранника, при этом две соседние вершины принадлежат одной грани.

Так, MK и KN — стороны многоугольника, который является сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 1). Действительно, точки M и K лежат и в грани AA_1B_1B, и в плоскости сечения MNK, поэтому MK является линией пересечения этих плоскостей, KN — линией пересечения плоскости сечения KMN с гранью $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда.

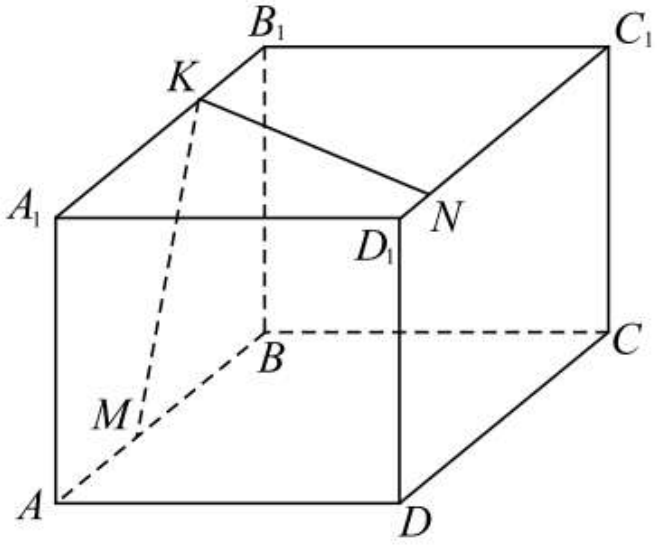


Рис. 1

Раздел I

Подготовительные задачи

Задачи на построение

Задача № 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $M \in DC$, $N \in CC_1$.

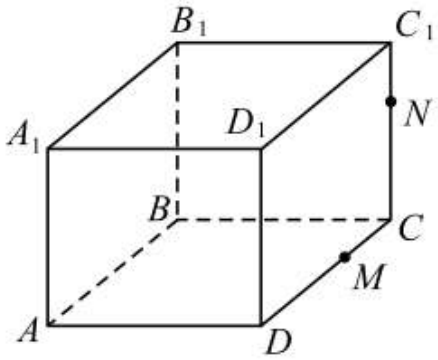


Рис. 2

Выполните задания:

а) Укажите грань куба, в которой лежит отрезок MN.

Ответ: _____

б) Укажите грань куба, параллельную отрезку MN.

Ответ: _____

Задача № 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на рёбрах DC, CC_1, BB_1 взяты соответственно точки M, N, K так, что M и N — середины рёбер DC и CC_1, $B_1K : KB = 1 : 2$.

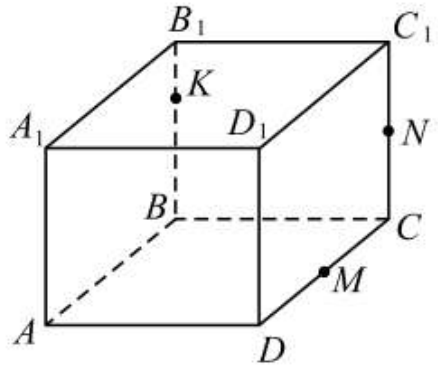


Рис. 3

Раздел II

Построение сечений многогранников

Задача № 1. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 31).

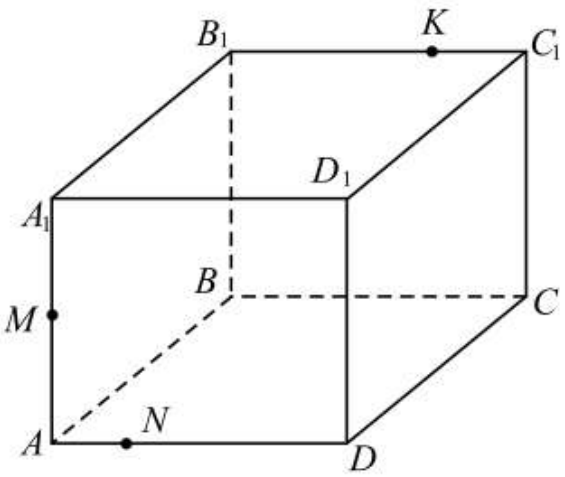


Рис. 31

Решение.

Шаг 1. Точки M и N лежат в плоскости передней грани AA_1D_1D и в плоскости сечения MNK, поэтому прямая MN — линия пересечения этих плоскостей (см. рис. 32 на с. 28).

Шаг 2. Прямые MN и A_1D_1 лежат в плоскости AA_1D_1D и пересекаются в точке T, значит, точка T лежит в плоскости сечения.

Шаг 3. Точки T и K лежат и в плоскости сечения MNK, и в плоскости верхней грани $A_1B_1C_1D_1$. Отсюда следует, что TK — линия их пересечения, а F — точка пересечения прямых TK и A_1B_1 (см. рис. 32).

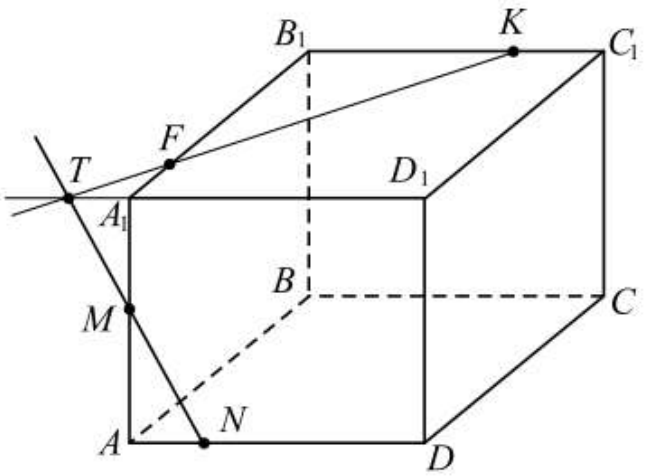


Рис. 32

Шаг 4. MF — линия пересечения плоскости сечения и грани AA_1B_1B (см. рис. 33).

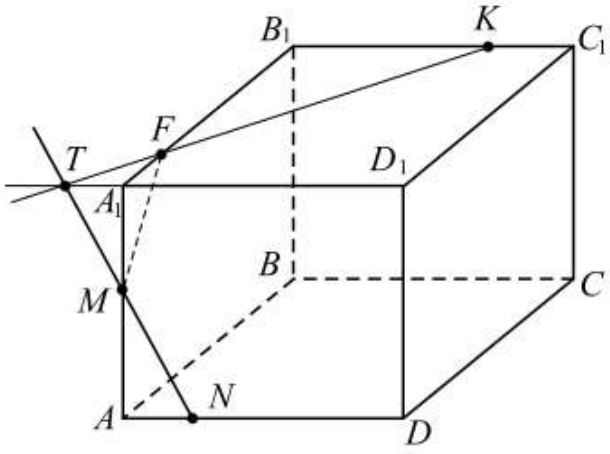


Рис. 33

Шаг 6. В грани $A_1B_1C_1D_1$ проведём через точку K отрезок KG, _____ отрезку MP (см. **Т1**).

Шаг 7. Отрезок _____ — линия пересечения грани DD_1C_1C и плоскости сечения (см. рис. 56).

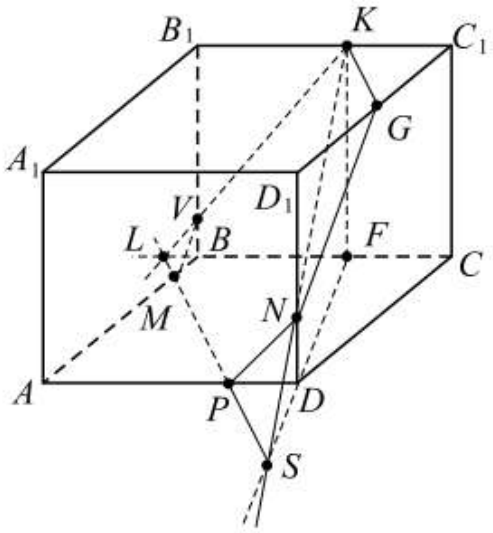


Рис. 56

Итак, _____ — искомое сечение (см. рис. 57).

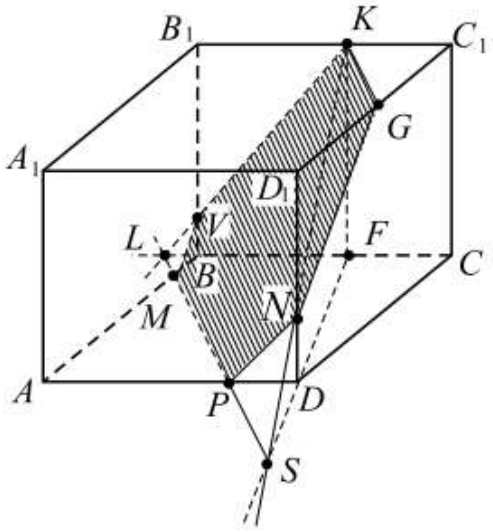


Рис. 57

Задача № 5. Постройте сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK (см. рис. 58).

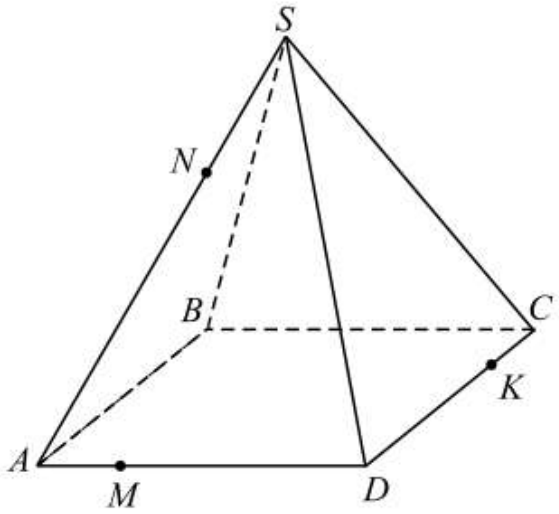


Рис. 58

Решение.

Шаг 1. MN — линия пересечения плоскости MNK и грани SAD, MK — линия пересечения плоскости MNK и грани $ABCD$ (см. рис. 59).

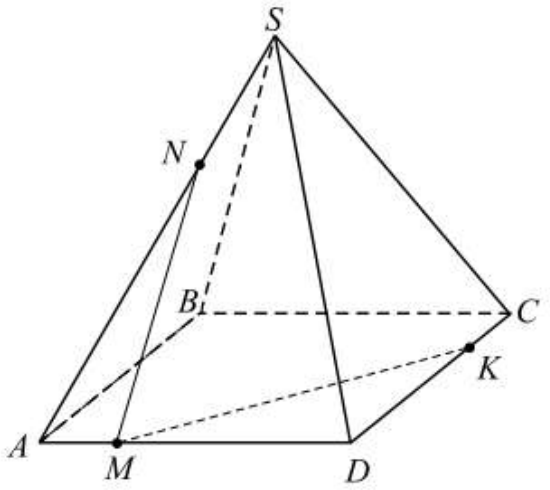


Рис. 59

Раздел III

Практикум

Задача № 1. Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через 3 заданные точки.

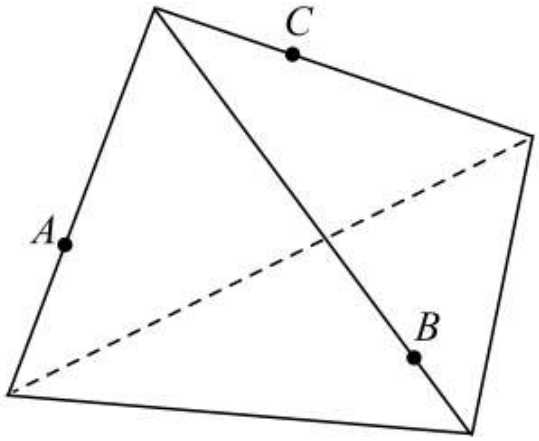


Рис. 79

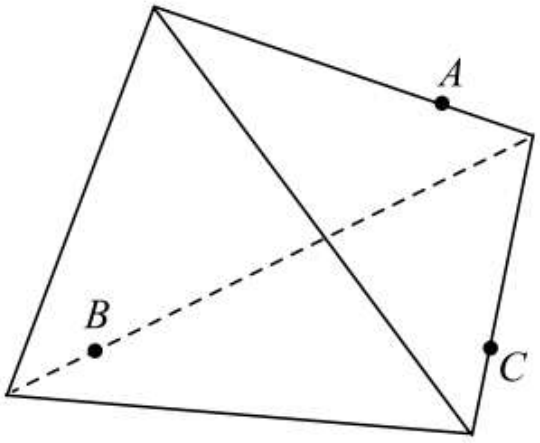


Рис. 80

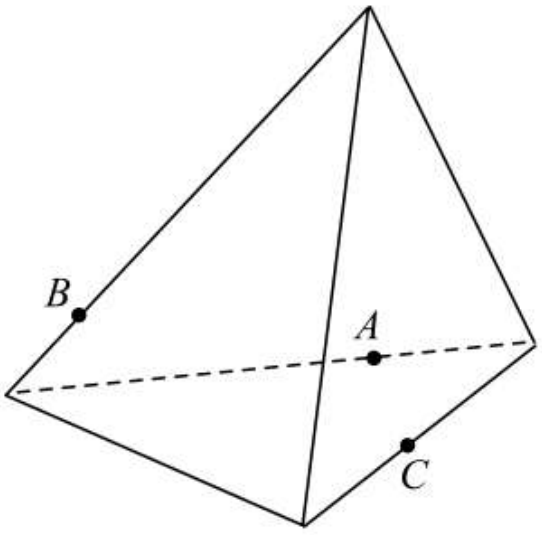


Рис. 81

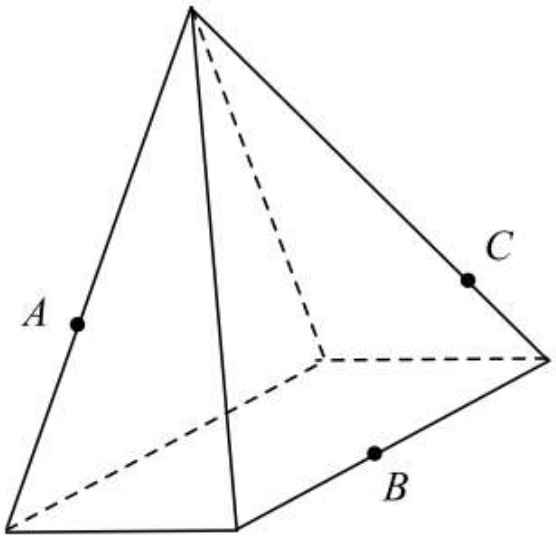


Рис. 82

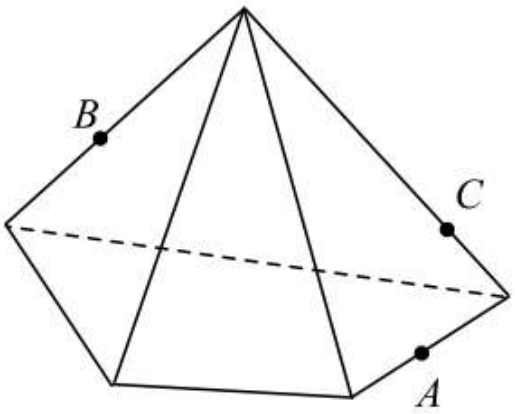


Рис. 83

Раздел IV

Задачи в формате ЕГЭ профильного уровня

Задача № 1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро — 17. Точка K принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении 2 : 3, считая от вершины A_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки K, A и C (см. рис. 103).

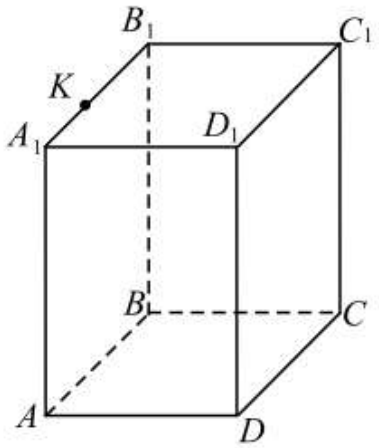


Рис. 103

Решение.

Точки A и C принадлежат плоскости _____, следовательно, отрезок _____ лежит в этой плоскости (см. рис. 104 на с. 65).

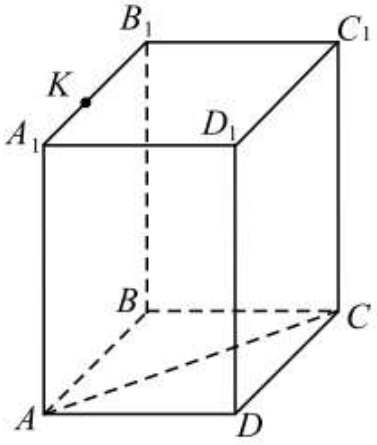


Рис. 104

Так как плоскости верхнего и нижнего оснований _____, то через точку K в плоскости _____ проведём отрезок KL _____ AC, где _____ $\in$ _____ (см. рис. 105).

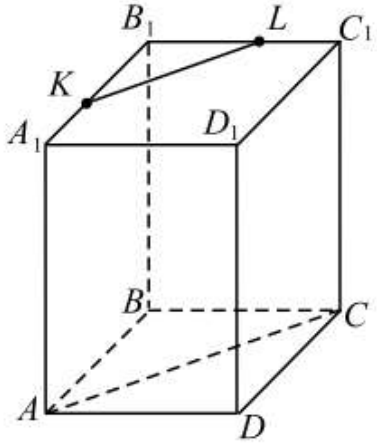


Рис. 105

Соединим точки A и _____, лежащие в грани _____, а также точки C и _____, лежащие в грани _____. _____ — сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки _____, _____, _____ (см. рис. 106 на с. 66).

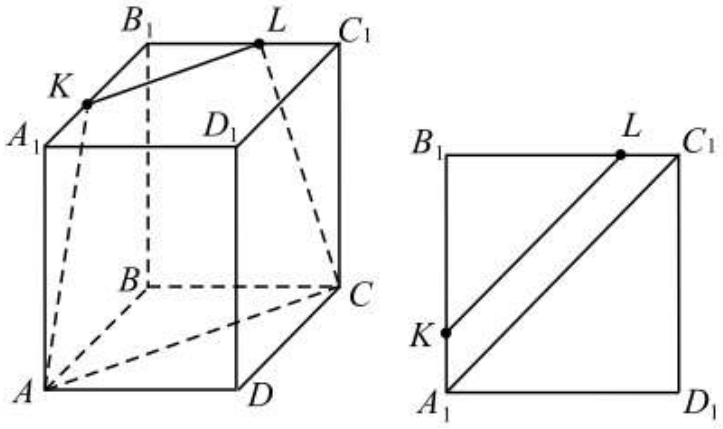


Рис. 106

Рассмотрим грань $A_1B_1C_1D_1$. По условию $A_1B_1 = 10$, $A_1K : KB_1 = 2 : 3$, поэтому $A_1K =$ _____, $KB_1 =$ _____.
$\triangle KB_1L \sim \triangle A_1B_1C_1$, так как KL _____ A_1C_1 (см. рис. 107).
Тогда $B_1L =$ _____ = _____; $LC_1 =$ _____ = _____, $KL =$ _____.

$\triangle AKA_1 = \triangle$_____, следовательно, $AK =$ _____, значит, четырёхугольник $AKLC$ является _____ (см. рис. 107).

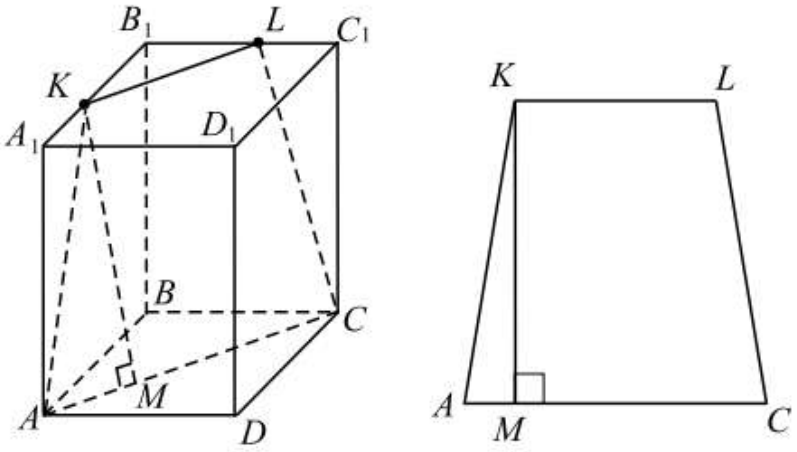


Рис. 107

Площадь равнобедренной трапеции $AKLC$ найдём по формуле $S_{AKLC} = \dfrac{KL + AC}{2} \cdot KM$.

$KL =$ _____, $AC =$ _____, KM выразим из прямоугольного треугольника _____ по теореме Пифагора.

$KM =$ _____.

AK является гипотенузой прямоугольного треугольника _____, катеты которого _____ = _____, _____ = _____.

$AK =$ _____ = _____ = _____.

$AM = \frac{1}{2}$ _____.

Подставляем найденные значения в выражение $KM = \sqrt{AK^2 - AM^2}$, получим $KM =$ _____.

$S_{AKLC} = \frac{1}{2}($_____ + _____$) \cdot$ _____.

Ответ: _____.

Задача № 2. Через точку L, принадлежащую высоте SO правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, постройте сечение, параллельное грани SDC (см. рис. 108).

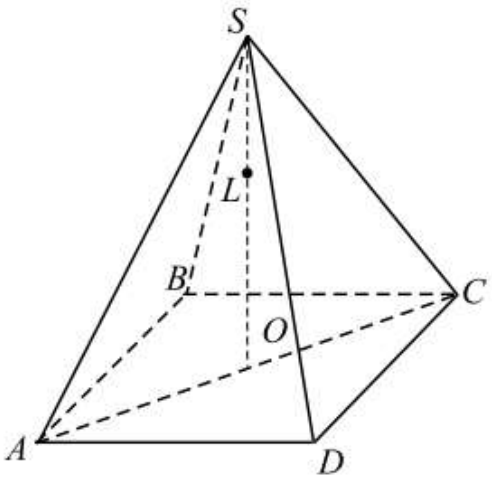


Рис. 108

Решение.

Обозначим плоскость сечения буквой α. По условию $\alpha \parallel SDC$ и $L \in \alpha$. Это означает, что любая прямая плоскости α, проходящая через точку L, параллельна плоскости SDC (в противном случае плоскости SDC и α будут пересекаться).

Значит, нужно через точку L провести прямую, параллельную плоскости SDC. Можно через точку L провести любую прямую, параллельную плоскости SDC, в частности, это может быть прямая, параллельная DC, или SC, или SD (см. рис. 109).

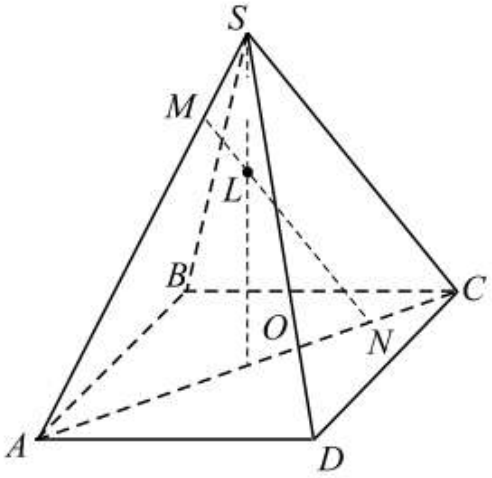


Рис. 109

Проведём через точку L прямую, параллельную SC. Для этого во вспомогательной плоскости SAC проведём через точку L отрезок $MN \parallel SC$ ($N \in AC$, $M \in AS$). Так как $MN \parallel SDC$, то $MN \in \alpha$.

Точка M принадлежит ребру AS пирамиды, следовательно, M — вершина многоугольника, являющегося искомым сечением.

Линия пересечения α и плоскости боковой грани ASB проходит через точку M параллельно AB. Действительно, плоскость ASB проходит через прямую AB, параллельную DC ($AB \parallel DC$, так как $ABCD$ — квадрат, $\alpha \parallel DC$), и пересекает α по прямой, параллельной AB (см. **Т 2**). Проведём в грани ASB отрезок $MK \parallel AB$ ($K \in BS$).

MK — линия пересечения плоскостей ASB и α, $MK \in \alpha$.

K — вершина многоугольника, являющегося искомым сечением.

Ответы к заданиям

Раздел I

Ответы к подготовительным задачам

На построение:

1. а) CDD_1C_1; б) ABB_1A_1. **2.** а) AA_1B_1B; б) AA_1B_1B; в) AB.

На вычисление:

1. Нет. **2.** 3. **3.** 1. **7.** а) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **9.** а) $3\sqrt{2}$; б) 10. **10.** а) 5; в) 3. **11.** Правильный треугольник AB_1C. **12.** а) AA_1D_1D; б) MN; в) BB_1C_1C; г) C_1C; д) $2:1$; е) BB_1C_1C; ж) KL; з) $3\frac{1}{3}$; и) 3; к) AA_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$; м) TK; н) AA_1B_1B; о) AA_1B_1B; р) $ABCD$; с) $MTKLPN$.

Раздел IV

Задачи для самостоятельного решения

1. б) $\frac{2750\sqrt{3}}{3}$. **2.** 30°. **3.** 2) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$. **4.** $6\sqrt{21}$. **5.** $\arccos\frac{1}{3}$. **6.** $42\frac{2}{3}$. **7.** б) 26. **8.** $4\sqrt{5}$. **9.** б) $6+3\sqrt{2}$. **10.** $\sqrt{7134}$. **11.** б) 45°; **12.** б) $15\sqrt{3}$; **13.** б) $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{6}$.