

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	5
§ 1. Вычисления	6
§ 2. Степень числа.....	12
Степень числа с натуральным показателем	12
Степень числа с целым показателем.....	14
§ 3. Многочлены	18
Действия с многочленами.....	20
§ 4. Алгебраические дроби	22
Действия над алгебраическими дробями	23
§ 5. Системы линейных уравнений	29
Решение линейных уравнений. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными	31
§ 6. Числовые неравенства и неравенства с переменными.....	37
Решение числовых неравенств и неравенств с переменными.....	39
§ 7. Квадратные корни	43
Действия с действительными числами	43
§ 8. Квадратные уравнения	48
§ 9. Функции	53
Функции. Графики	53
§ 10. Текстовые задачи	61
Проценты, сплавы, смеси	61
Движение	63
Работа, производительность	65
Практический расчёт	66

§ 11. Множества. Комбинаторика. Статистика. Вероятность	67
Множества, подмножества	70
Комбинаторика	72
Статистические характеристики	73
Частота и вероятность	74
Ответы	76

§ 1. Вычисления

Для записи чисел мы пользуемся десятью знаками — цифрами (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), а также десятичной позиционной системой счисления, то есть такой системой счисления, в которой значение цифры в записи числа зависит от её позиции в числе.

Число 121 (сто двадцать один) записано с помощью цифр 1 и 2, при этом цифру 1, записанную справа, мы понимаем как единицу, а слева — как одну сотню, так $121 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1$.

Числа, служащие для счёта предметов или людей, называют натуральными числами. Множество натуральных чисел обозначают N : 1, 2, 3, 4, ...

Говорят, что натуральное число a делится на натуральное число b , если существует такое натуральное число c , что $a = bc$, в противном случае говорят, что a не делится на b или a делится на b с остатком $a = kb + r$, $0 < r < b$. Например, число 156 делится на 12, так как $156 = 12 \cdot 13$. Число 144 делится на 15 с остатком: $144 = 9 \cdot 15 + 9$, 9 — остаток.

Чётное число — это натуральное число, которое делится на 2, например, 14 — чётное число, так как $14 = 2 \cdot 7$. Чётное число можно записать в виде $2n$, где $n \in N$.

Нечётное число — это натуральное число, которое не делится на 2, например, 17 — нечётное число. Нечётное число можно записать в виде $2n - 1$, где $n \in N$.

Простое число — это натуральное число, у которого два делителя: 1 и само число. Например, 2 — простое число, так как $2 = 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$. 9 не является простым числом, так как $9 = 1 \cdot 9 = 3 \cdot 3$. Число 1 не является простым, так как у него всего один делитель.

Составное число — это натуральное число, у которого больше двух делителей. Например, 15 — составное число, так как его делителями являются 1, 3, 5, 15.

Наибольший общий делитель (НОД) двух чисел a и b ($\text{НОД}(a, b)$) — наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b .

Наибольший общий делитель чисел a и b можно искать разными способами.

1. Разложить на простые множители числа a и b и перемножить между собой простые общие множители этих чисел.

Найдём $\text{НОД}(28, 70)$.

$$\begin{array}{r|l} 28 & (2) \\ 14 & 2 \\ 7 & (7) \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 70 & (2) \\ 35 & 5 \\ 7 & (7) \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{НОД}(28, 70) = 2 \cdot 7 = 14.$$

2. Разделить большее число на меньшее. Пусть $a > b$. Если большее число делится на меньшее без остатка, то $\text{НОД}(a, b) = b$. Если большее число делится на меньшее с остатком, тогда делим меньшее число на полученный остаток от деления. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не получим нуль в остатке. Последний ненулевой остаток и есть $\text{НОД}(a, b)$. Такой способ нахождения $\text{НОД}(a, b)$ называется **алгоритмом Евклида**.

Найдём $\text{НОД}(28, 70)$ с помощью алгоритма Евклида.

$$70 : 28 = 2 \cdot 28 + 14,$$

$$28 : 14 = 2 \cdot 14 + 0.$$

$$\text{НОД}(28, 70) = 14.$$

3. $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b) = \text{НОД}(a, a - b)$.

$$\text{Найдём } \text{НОД}(28, 70) = \text{НОД}(70 - 28, 28) = \text{НОД}(28, 42 - 28) = \text{НОД}(14, 14) = 14.$$

Наименьшее общее кратное (НОК) двух чисел a и b ($\text{НОК}(a, b)$) — это наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b .

Пример. $\text{НОК}(42, 70) = 210$.

Пример. Числа 16 и 25 взаимно простые, так как $\text{НОД}(16, 25) = 1$.

Признаки делимости

1. Натуральное число делится на 2, если оно оканчивается чётной цифрой. Если число оканчивается нечётной цифрой, то оно не делится на 2.
2. Натуральное число делится на 3 (или на 9), если сумма его цифр делится на 3 (или на 9). Если сумма цифр числа не делится на 3 (или на 9), то число не делится на 3 (или на 9).
3. Натуральное число делится на 5, если оно оканчивается на 0 или на 5. Если число оканчивается на одну из других цифр, то оно не делится на 5.
4. Натуральное число делится на 4, если последние две цифры (в том же порядке) составляют число, которое делится на 4. В противном случае оно не делится на 4.

Существуют признаки делимости на 7, 8, 11, 13 и др.

Множество Z целых чисел — это множество натуральных чисел, противоположных им чисел и нуль: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Множество Q рациональных чисел — это множество дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$.

Любое рациональное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

$$\text{Например, } \frac{1}{4} = 0,25; \frac{1}{3} = 0,333\dots; \frac{4}{7} = 0,(571428).$$

Выполнение арифметических действий

Чтобы перемножить обыкновенные дроби, надо перемножить их числители и результат записать в числитель, затем перемножить знаменатели и результат записать в знаменатель:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5 \cdot 10}{7 \cdot 11} = \frac{50}{77}.$$

Основное свойство дроби. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

Процедуру деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, отличное от 0, называют **сокращением дроби**.

$$\frac{55}{77} = \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{5}{7}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (c \neq 0); \quad \frac{24}{5} = \frac{24 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{48}{10} = 4,8.$$

Сумму натурального числа и обыкновенной дроби записывают простым приписыванием этой дроби к натуральному числу справа:

$$3 + \frac{4}{7} = 3\frac{4}{7}; \quad 5 + \frac{11}{13} = 5\frac{11}{13}.$$

Полученное выражение называют **смешанной дробью**, при этом натуральное число называют его **целой частью**, а обыкновенную дробь — **дробной частью**.

Для представления смешанной дроби в виде обыкновенной надо знаменатель дробной части умножить на целую часть, к полученному результату прибавить числитель дробной части и записать полученное число в числитель дроби, а в знаменателе записать знаменатель дробной части:

$$3\frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 3 + 4}{7} = \frac{25}{7}; \quad 3\frac{4}{7} \cdot 1\frac{2}{5} = \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{25 \cdot 7}{7 \cdot 5} = 5.$$

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо первую дробь умножить на дробь, **обратную** второй дроби:

$$\frac{25}{7} : \frac{5}{14} = \frac{25}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{25 \cdot 14}{7 \cdot 5} = 10; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями складывают числители этих дробей и результат записывают в числитель, а в знаменатель записывают знаменатель этих дробей:

$$\frac{5}{7} + \frac{10}{7} = \frac{5 + 10}{7} = \frac{15}{7}; \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями аналогично пользуемся правилом:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}; \quad \frac{5}{7} - \frac{10}{7} = \frac{5-10}{7} = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}.$$

Сложение дробей с разными знаменателями можно осуществить двумя способами.

1. **Приведением дробей к наименьшему общему знаменателю**, равному наименьшему общему кратному (НОК) знаменателей дробей: находим НОК знаменателей дробей, а затем числитель и знаменатель каждой из дробей умножаем на соответствующие числа (их называют дополнительными множителями) так, чтобы знаменатели всех дробей были равны НОК всех знаменателей. Полученные дроби с одинаковыми знаменателями складываем по указанному выше правилу.

Найдём сумму $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$. НОК(8, 12) = 24, поэтому приводим дроби к общему знаменателю 24, умножая числитель и знаменатель первой дроби на 3 ($8 \cdot 3 = 24$), а числитель и знаменатель второй дроби на 2 ($12 \cdot 2 = 24$):

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{9}{24} + \frac{14}{24} = \frac{23}{24}.$$

2. **Приведением дробей к общему знаменателю, равному произведению знаменателей**: числитель и знаменатель первой дроби умножаем на знаменатель второй, а числитель и знаменатель второй дроби умножаем на знаменатель первой. Получим дроби с одинаковыми знаменателями, которые складываем по упомянутому выше правилу:

$$\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{3 \cdot 12}{8 \cdot 12} + \frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{36}{96} + \frac{56}{96} = \frac{92}{96} = \frac{23}{24}.$$

При вычитании дробей с разными знаменателями их надо привести к общему знаменателю.

Выполнение операций над десятичными дробями сводится к выполнению операций над соответствующими целыми числами.

Для нахождения суммы $7,23 + 15,8$ записываем число 15,8 под числом 7,23 (сотни под сотнями, десятки под десятками, единицы под единицами, десятые доли под десятыми, сотые доли под сотыми, запятую под запятой). Затем, не обращая внимания на запятую, находим сумму целых в столбик. Затем с учётом запятой получим: $7,23 + 15,8 = 23,03$.

Для нахождения произведения $7,23 \cdot 15,8$ умножим целое число 723 на целое число 158 в столбик по известному алгоритму. В полученном целом числе 114 234 отделяем запятой справа налево три цифры (действительно, у первой дроби запятая отделяет две цифры справа, а у второй — одну, значит, в результате три). Получим: $7,23 \cdot 15,8 = 114,234$.

Для обращения десятичной дроби в обыкновенную представляем сначала десятичную дробь в виде смешанного числа, а смешанное число представляем в виде обыкновенной дроби или умножаем и делим эту дробь на соответствующую степень 10:

$$4,12 = 4\frac{12}{100} = \frac{100 \cdot 4 + 12}{100} = \frac{412}{100} = \frac{103}{25}; \quad 4,12 = \frac{4,12 \cdot 100}{100} = \frac{412}{100} = \frac{103}{25}.$$

Выполните действия:

1. $237 + 2584.$

2. $6241 + 59.$

3. $2345 - 427.$

4. $13534 - 816.$

5. $21,2 \cdot 2,3.$

6. $250 \cdot 5,4.$

7. $14092 : 26.$

8. $28728 : 57.$

9. $5\frac{7}{22} - 2\frac{14}{33}.$

10. $2\frac{3}{14} + 1\frac{8}{21}.$

11. $0,3 + 12 \cdot 5.$

12. $5,2 + 4 \cdot 25.$

13. $5,3 - 2,3 : 23$

14. $3,7 - 2,4 : 12.$

15. $7 \cdot 0,2 - 14.$

16. $0,6 \cdot 2 - 12.$

17. $2\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{21}.$

18. $4\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{41}.$

19. $3\frac{7}{11} \cdot 11.$

20. $16 \cdot 3\frac{1}{8}.$

21. $-1 : \frac{4}{7}.$

22. $-5 : \frac{5}{24}.$

23. $\frac{3}{8} : 1.$

24. $6\frac{2}{5} : 6\frac{2}{5}.$

25. $0 : \frac{71}{7}.$

26. $0 \cdot 2\frac{2}{3}.$

27. $-17 - 3 + 5.$

28. $-2 - 17 + 8.$