

*Светлой памяти
Владимилова Юрия Владимировича
посвящается*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
Обзор литературы	27
Глава 1. Динамика поверхностных волн в плоском случае	40
1.1. Обтекание препятствий двухслойным потоком бесконечной глубины	41
1.1.1. Введение	41
1.1.2. Постановка задачи и ее решение	41
1.1.3. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря	53
1.1.4. Заключение	58
1.2. Обтекание препятствий двухслойным потоком конечной глубины	59
1.2.1. Постановка задачи и ее решение	59
1.2.2. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря	81
1.2.3. Заключение	90
1.3. Волновая реакция при циркуляционном обтекании подводного препятствия двухслойным потоком конечной глубины	91
1.3.1. Введение	91
1.3.2. Препятствие в нижнем слое	92
1.3.3. Препятствие в верхнем слое	100
1.3.4. Численные расчеты	103
1.3.5. Обсуждение результатов модельных расчетов	106
1.3.6. Заключение	108
1.4. Силовое воздействие потока бесконечно глубокой жидкости на источник под ледяным покровом	109
1.4.1. Введение	109
1.4.2. Постановка задачи	111
1.4.3. Аналитические решения	113
1.4.4. Численные результаты и обсуждение	117
1.4.5. Заключение	120

Глава 2. Динамика поверхностных волн в трехмерном случае	122
2.1. Равномерные асимптотики дальних полей поверхностных возмущений от источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины	125
2.1.1. Постановка задачи и интегральная форма решения для возвышения свободной поверхности	125
2.1.2. Построение неравномерной асимптотики решения: интегрирование с помощью вычетов и метода стационарной фазы	127
2.1.3. Построение равномерной асимптотики решения . . .	130
2.1.4. Заключение	135
2.2. Дальние поля поверхностных возмущений от пульсирующего источника в тяжелой жидкости бесконечной глубины	137
2.2.1. Постановка задачи и интегральные формы решений	138
2.2.2. Построение асимптотик решения	143
2.2.3. Заключение	148
2.3. Гибридные поверхностные волны от гармонического источника возмущений	149
2.3.1. Постановка задачи и интегральное представление решения	149
2.3.2. Фазовая структура гибридных волн	152
2.3.3. Равномерная асимптотика поля гибридных волн . . .	153
2.3.4. Заключение	155
2.4. Дальние поля поверхностных гравитационных волн от быстро движущегося осциллирующего источника возмущений	157
2.4.1. Постановка задачи и интегральные формы решений	157
2.4.2. Построение асимптотик решений	158
2.4.3. Заключение	166
2.5. Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника	167
2.5.1. Введение	167
2.5.2. Постановка задачи и интегральные формы решений	167
2.5.3. Неравномерные асимптотики решений	169
2.5.4. Равномерные асимптотики решений	173
2.5.5. Заключение	176
2.6. Дальние поля возмущений поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником	177

2.6.1. Постановка задачи, интегральные формы решений	177
2.6.2. Построение асимптотик решений	179
2.6.3. Заключение	187
Глава 3. Динамика внутренних гравитационных волн в гидрофизических средах	190
3.1. Динамика дальних полей внутренних гравитационных волн в океане с произвольным распределением частоты плавучести	191
3.1.1. Введение	191
3.1.2. Постановка задачи и аналитические представления решений	192
3.1.3. Результаты численного моделирования	195
3.1.4. Заключение	205
3.2. Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально-симметричного возмущения	207
3.2.1. Введение	207
3.2.2. Постановка задачи, интегральные формы решений	208
3.2.3. Равномерные асимптотики решений	210
3.2.4. Результаты численных расчетов	213
3.2.5. Заключение	216
3.3. Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн от импульсного локализованного источника во вращающейся стратифицированной среде	219
3.3.1. Введение	219
3.3.2. Постановка задачи, интегральные формы решений	221
3.3.3. Асимптотики решений	223
3.3.4. Заключение	229
Глава 4. Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах со средними сдвиговыми течениями	232
4.1. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в океане с произвольными распределениями скорости сдвиговых течений и частоты плавучести	233
4.1.1. Введение	233
4.1.2. Постановка задачи	234
4.1.3. Интегральные представления решения	236
4.1.4. Алгоритм вычисления собственных функций и собственных значений основной вертикальной спектральной задачи	239
4.1.5. Результаты численных расчетов	242
4.1.6. Заключение	255

4.2. Внутренние гравитационные волны в океане при обтекании подводного препятствия сдвиговым течением	257
4.2.1. Введение	257
4.2.2. Постановка задачи	258
4.2.3. Интегральные формы решения и численные результаты	259
4.2.4. Заключение	266
4.3. Внутренние гравитационные волны от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с двухмерными сдвиговыми течениями	267
4.3.1. Введение	267
4.3.2. Постановка задачи	268
4.3.3. Интегральное представление решения	270
4.3.4. Результаты численных расчетов	273
4.3.5. Заключение	284
Заключение	287
Литература	299



ГЛАВА

ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ
ВОЛН В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

1.1. Обтекание препятствий двухслойным потоком бесконечно глубины

1.1.1. Введение

Обтекание подводных неоднородностей (или препятствий) в морской среде приводит к возникновению возмущений, которые могут выходить на поверхность воды. При этом наличие стратификации среды и ее особенности могут обуславливать определенные эффекты в формировании структуры поверхностных возмущений. В реальных условиях открытого моря такими особенностями являются относительно резкие перепады плотности воды, связанные (прежде всего) с наличием сезонного термоклина или иных скачков плотности воды. В этом случае представляет интерес исследование возможных пикноклинных эффектов при обтекании препятствия в окрестности таких скачков плотности. Один из способов моделирования находящегося в потоке препятствия основан на его замене эквивалентной системой гидродинамических особенностей (источников, стоков, вихрей, мультиполей). В соответствии с этим расчет поверхностных возмущений может быть сведен к расчету волн, генерируемых моделирующими препятствие гидродинамическими особенностями [96, 162].

1.1.2. Постановка задачи и ее решение

Итак, рассматривается задача о возбуждении поверхностных возмущений при поперечном обтекании препятствия в виде цилиндрического тела потоком идеальной жидкости, состоящей

из двух слоев постоянной плотности: ρ_1 (верхний слой) и ρ_2 (нижний), при условии $\rho_1 < \rho_2$. Толщина верхнего слоя — H , нижний слой считаем бесконечно глубоким. Поток стационарно обтекает препятствие, локализованное либо над границей раздела слоев, либо под ней.

Цилиндрическое препятствие моделируется точечным диполем с моментом R , внезапно (в момент времени $t = 0$) пришедшим в движение вблизи границы раздела слоев с постоянной скоростью V , направленной горизонтально (вдоль оси x , совпадающей с невозмущенным положением этой границы). Движущийся в направлении отрицательных x диполь поместим вначале на горизонте $z = z_0$ в верхнем слое (рис. 1.1), а затем на горизонте

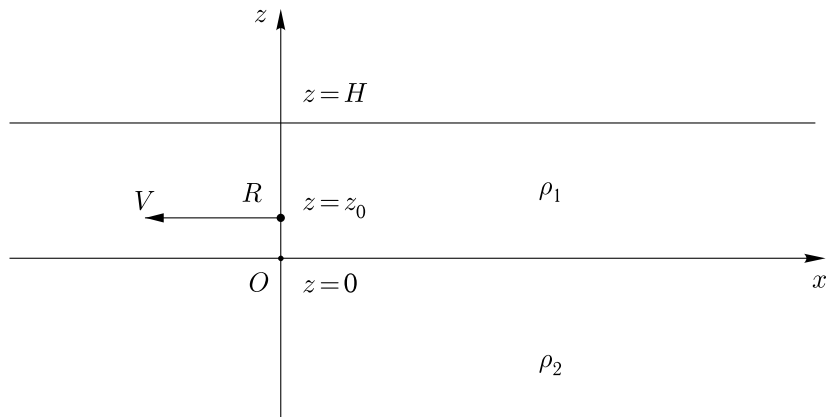


Рис. 1.1. Схема движения диполя в верхнем слое двухслойной жидкости в начальный момент времени

$z = -z_0$ — в нижнем (рис. 1.3, см. **2**). Исследуется установившаяся картина поверхностных волн вдали от диполя. В силу линейности задачи в дальнейшем рассматривается диполь с единичным моментом.

1. Препятствие над слоем скачка. Рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных возмущений движущимся над слоем скачка плотности препятствием, расположенным в начальный момент времени в точке $(0, z_0)$. Введем потенциал скоростей $\Phi(x, z, t)$, $\nabla \Phi = \mathbf{U}$, $\mathbf{U} = (u, v)$, где u, v — соответственно

горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости в произвольной точке потока. Тогда для потенциала Φ имеем уравнение Пуассона и соответствующие граничные условия:

$$\begin{cases} \Delta \Phi(x, z, t) = \theta(t) \delta(z - z_0) \delta'(x + Vt), & \Phi(x, z, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, $\delta'(\cdot)$ — ее производная, g — ускорение свободного падения;

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \Phi(x, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, z, t), & z > 0, \\ \Phi_2(x, z, t), & z < 0. \end{cases}$$

Правая часть уравнения Пуассона соответствует движущемуся диполю, находящемуся в произвольный момент времени t ($t > 0$) в точке $(-Vt, z_0)$. Первое граничное условие описывает постоянство давления на свободной поверхности жидкости, второе условие означает равенство вертикальных скоростей по обе стороны границы раздела слоев, а третье условие — равенство давлений по разные стороны этой границы.

Для трансформанты Фурье,

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \Phi(x, z, t) dt,$$

задача (1.1) преобразуется к виду (k — волновое число, ω — частота)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\Phi} = \frac{k}{\omega - kV} \delta(z - z_0), \\ -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, & \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(-\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(-\omega^2 \tilde{\Phi}_2 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z), & 0 < z < H, \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z), & z < 0, \end{cases} \\ \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & z_0 < z < H, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & 0 < z < z_0. \end{cases}\end{aligned}$$

Решение $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ с точностью до множителя, зависящего только от k и ω , удовлетворяющее первому граничному условию в (1.2), имеет вид

$$\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) = (\omega^2 + gk)e^{k(z-H)} - (\omega^2 - gk)e^{-k(z-H)}. \quad (1.3)$$

Решение $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$ ищется в виде $P(k, \omega)e^{kz} + Q(k, \omega)e^{-kz}$. Для полноты решения последнее нужно «сшить» с решением $\tilde{\Phi}_2(k, \omega, z) = C(k, \omega)e^{-|k|z}$ ($z < 0$) с помощью граничных условий при $z = 0$. На этом пути получим

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= (\rho_2(\omega^2 - gk) + \rho_1(\omega^2 + gk))e^{kz} + \\ &\quad + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - gk)e^{-kz}. \quad (1.4)\end{aligned}$$

Окончательно решение $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ ищем в виде

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = \begin{cases} A(k, \omega)\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & z_0 < z < H, \\ B(k, \omega)\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & 0 < z < z_0, \end{cases}$$

где $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ и $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$ определены в (1.3) и (1.4). Для нахождения функций $A(k, \omega)$ и $B(k, \omega)$ воспользуемся условием «сшивки» решения при $z = z_0$, вытекающим из первого уравнения, фигурирующего в задаче (1.2):

$$\begin{cases} A(k, \omega)\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z_0) = B(k, \omega)\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z_0), \\ \left(A(k, \omega)\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)}{\partial z} - B(k, \omega)\frac{\partial \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} = \frac{k}{\omega - kV}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим выражения для $A(k, \omega)$ и $B(k, \omega)$,

$$\begin{cases} A(k, \omega) = \frac{\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z_0)}{W} \frac{k}{\omega - kV}, \\ B(k, \omega) = \frac{\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z_0)}{W} \frac{k}{\omega - kV}, \end{cases}$$

где

$$W = 4k(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(\omega^2 - gk)(\omega^2 - \omega_1^2(k)),$$

$$\omega_1^2(k) = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{th} kH}{\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th} kH}.$$

Функция $\omega = \omega_1(k)$ представляет собой дисперсионное соотношение для внутренних волн. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{[(\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|)) e^{|k|z_0} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|) e^{-|k|z_0}]}{4|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)} \times \\ &\times \frac{[(\omega^2 + g|k|) e^{|k|(z-H)} - (\omega^2 - g|k|) e^{-|k|(z-H)}]}{(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{[(\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|)) e^{|k|z} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|) e^{-|k|z}]}{4|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)} \times \\ &\times \frac{[(\omega^2 + g|k|) e^{|k|(z_0-H)} - (\omega^2 - g|k|) e^{-|k|(z_0-H)}]}{(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь важно отметить, что в формулах (1.5) везде вместо k стоит $|k|$, кроме множителя $k/(\omega - kV)$. Это обусловлено тем, что в решении $\tilde{\Phi}_2(k, \omega, z)$ содержится $|k|$ для обеспечения убывания решения с глубиной при всех k (положительных и отрицательных).

В дальнейшем нас будет интересовать величина возвышения поверхности жидкости

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial t} \right|_{z=H}.$$

Трансформанта Фурье последней связана с $\tilde{\Phi}(k, \omega, z)$ следующим образом:

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{i\omega}{g} \tilde{\Phi}(k, \omega, H).$$

Далее, используя выражение для $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ из (1.5), получим

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{ik}{\omega - kV} \times \frac{\omega [(\rho_2(\omega^2 - g|k|) + \rho_1(\omega^2 + g|k|)) e^{|k|z_0} + (\rho_2 - \rho_1)(\omega^2 - g|k|) e^{-|k|z_0}]}{2|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}.$$

Обратное преобразование Фурье от $\tilde{\eta}(k, \omega)$ представляется в виде

$$\eta(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\eta}(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.6)$$

Здесь контур интегрирования по ω слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Интеграл по ω вычислим, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость с учетом полюсов в точках $\omega = kV$, $\omega = \pm\sqrt{g|k|}$, $\omega = \pm\omega_1(|k|)$.

Установившемся режиму движения диполя в системе координат $\xi = x + Vt$, движущейся вместе с ним, соответствует предел выражения (1.6) при $t \rightarrow +\infty$. При этом вклады полюсов $\omega = \pm\sqrt{g|k|}$ и $\omega = \pm\omega_1(|k|)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к нулю. Например, при учете полюса $\omega = \sqrt{gk}$ и деформации исходного контура интегрирования по k в путь наискорейшего спуска, проходящий через точку стационарности фазы; соответствующие полюса не пересекаются (и не дают вкладов в интеграл), а вклад стационарной точки при $t \rightarrow +\infty$ ведет себя как $O(1/\sqrt{t})$ [180]. Вклад полюса $\omega = kV$ дает

$$\eta(\xi) = \frac{1}{4\pi V} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\rho_2(|k|V^2 - g) + \rho_1(|k|V^2 + g)) e^{|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(|k|V^2 - g)(1 - \psi(|k|))} + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(|k|V^2 - g) e^{-|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(|k|V^2 - g)(1 - \psi(|k|))} \right] e^{-ik\xi} dk, \quad (1.7)$$

где $\psi(|k|) = \omega_1^2(|k|)/(|k|^2 V^2)$, а контур интегрирования слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Для оценки интеграла (1.7)

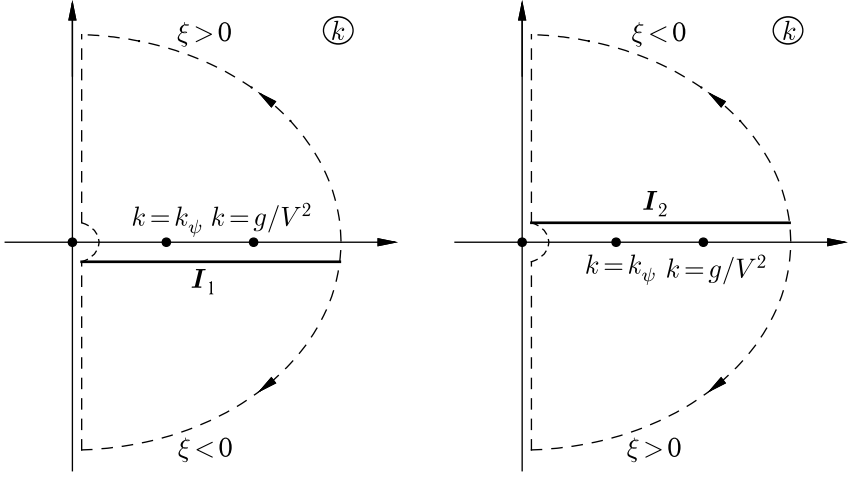


Рис. 1.2. Контуры интегрирования для I_1 и I_2 — сплошные линии, направления замыкания контуров — пунктирные кривые.

разобьем область интегрирования на два интервала (рис. 1.2),

$$\eta(\xi) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{0+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk, \quad I_2 = \int_{0+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk.$$

Сделав в первом интеграле замену $k = -u$, получим

$$I_1 = \int_{0-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} F(k, z_0) e^{ik\xi} dk.$$

Рассмотрим случай больших положительных ξ . Замкнув контур интегрирования для I_1 в верхней полуплоскости, а для I_2 — в нижней полуплоскости, получим, что $\eta(\xi)$ состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое — интеграл типа Лапласа по мнимой оси, представляющий собой неволновую часть решения. Это слагаемое описывает впадину свободной поверхности непосредственно над рассматриваемым диполем. Можно показать, что при больших ξ его асимптотика есть $O(1/\xi^2)$. Второе

слагаемое, определяющее собственно волновую структуру, есть сумма вкладов двух полюсов $k = g/V^2$ и $k = k_\psi$. Первый полюс соответствует поверхностной моде

$$\eta_{\Pi}(\xi) = -R \frac{2\rho_1 g e^{gz_0/V^2}}{V^3(\rho_2 \operatorname{ch}(g/V^2) + \rho_1 \operatorname{sh}(g/V^2))(1 - \psi(g/V^2))} \sin(g\xi/V^2). \quad (1.8)$$

Второй полюс k_ψ , где k_ψ — действительный корень уравнения $\psi(k) = 1$, отвечает внутренней моде

$$\eta_{\text{В}}(\xi) = -R \left[\frac{(\rho_2(kV^2 - g) + \rho_1(kV^2 + g)) e^{kz_0}}{V(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(kV^2 - g)(-\psi'(k))} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho_2 - \rho_1)(kV^2 - g)e^{-kz_0}}{V(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(kV^2 - g)(-\psi'(k))} \right] \sin k\xi \Big|_{k=k_\psi}. \quad (1.9)$$

Отметим, что внутренняя мода существует (то есть уравнение $\psi(k) = 1$ имеет вещественный корень k_ψ) в случае, когда значение V меньше некоторого $V_{\text{кр.}}$, которое определяется из соотношения

$$V_{\text{кр.}}^2 = gH \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right). \quad (1.10)$$

При больших отрицательных значениях ξ контуры для вычисления I_1 замкнем в нижней полуплоскости, а для I_2 — в верхней. В этом случае соответствующие полюса вкладов не дадут, а интеграл по мнимой оси по-прежнему ведет себя как $O(1/\xi^2)$. Отметим, что математическое представление поверхностных возмущений (1.8) и (1.9) имеет относительно простую физическую интерпретацию, которую совместно с результатами расчетов амплитуды возмущений рассмотрим позднее.

2. Препятствие под слоем скачка. В аналогичной постановке рассмотрим задачу о возбуждении поверхностных возмущений при движении моделируемого точечным диполем препятствия под слоем скачка плотности жидкости. В начальный момент времени диполь находится в точке $(0, -z_0)$ (рис. 1.3). С введением потенциала скоростей $\Phi(x, z, t)$, $\nabla\Phi = \mathbf{U}$, $\mathbf{U} = (u, v)$ (u, v — соответственно горизонтальная и вертикальная компо-

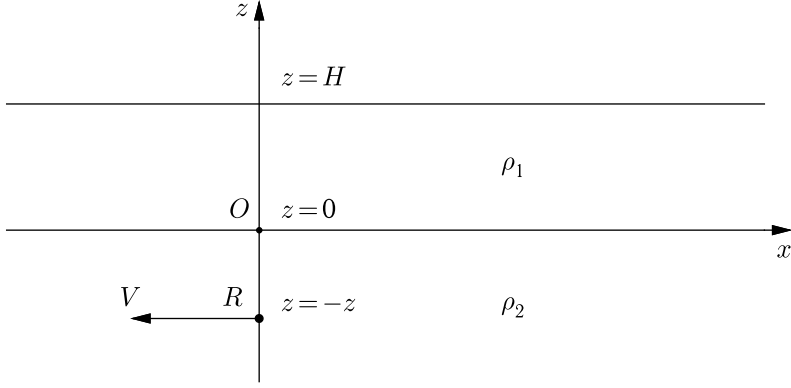


Рис. 1.3. Схема движения диполя в нижнем слое двухслойной жидкости в начальный момент времени

ненты поля скоростей жидкости) математическая постановка данной задачи принимает вид

$$\begin{cases} \Delta \Phi(x, z, t) = \theta(t) \delta(z + z_0) \delta'(x + Vt), \quad \Phi(x, z, t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Здесь

$$\Phi(x, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, z, t), & 0 < z < H, \\ \Phi_2(x, z, t), & z < 0. \end{cases}$$

В терминах трансформанты Фурье потенциала

$$\tilde{\Phi}(k, \omega, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \Phi(x, z, t) dt$$

задача (1.11) формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} - k^2 \tilde{\Phi} = \frac{k}{\omega - kV} \delta(z + z_0), \\ -\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \text{ при } z = 0, \\ \rho_1 \left(-\omega^2 \tilde{\Phi}_1 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(-\omega^2 \tilde{\Phi}_2 + g \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \right) \text{ при } z = 0; \end{cases} \quad (1.12)$$

здесь

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z), & 0 < z < H, \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z), & z < 0, \end{cases} \\ \tilde{\Phi}_2(k, \omega, z) &= \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z), & -z_0 < z < 0, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z), & z < -z_0. \end{cases}\end{aligned}$$

Решение $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$, удовлетворяющее первому граничному условию в (1.12), имеет вид

$$\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) = A(k, \omega)(\omega^2 \operatorname{sh} k(z - H) + gk \operatorname{ch} k(z - H)).$$

Решение $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ ищется в виде $B(k, \omega) \operatorname{sh} kz + D(k, \omega) \operatorname{ch} kz$. Для полноты решения последнее нужно «сшить» с решением $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ ($z > 0$) с помощью граничных условий при $z = 0$. На этом пути получим

$$\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) = A(k, \omega) [b(k, \omega) \operatorname{sh} kz + d(k, \omega) \operatorname{ch} kz],$$

где

$$\begin{aligned}b(k, \omega) &= \omega^2 \operatorname{ch} kH - gk \operatorname{sh} kH, \\ d(k, \omega) &= \left[-\frac{\rho_1}{\rho_2} \omega^2 + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \frac{g^2 k^2}{\omega^2} \right] \operatorname{sh} kH + gk \operatorname{ch} kH.\end{aligned}$$

Для нахождения неизвестной функции $A(k, \omega)$ воспользуемся условиями «сшивки» решений, $\tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)$ и $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) = C(k, \omega)e^{|k|z}$ при $z = -z_0$, следующими из первого уравнения в задаче (1.12):

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(k, \omega, -z_0) = \tilde{\varphi}_2(k, \omega, -z_0), \\ \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z)}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=-z_0} = \frac{k}{\omega - kV} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (-b \operatorname{sh} kz_0 + d \operatorname{ch} kz_0)A - e^{-kz_0}C = 0, \\ (b \operatorname{ch} kz_0 - d \operatorname{sh} kz_0)A - e^{-kz_0}C = \frac{1}{\omega - kV}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим выражения для A и C :

$$\begin{cases} A(k, \omega) = \frac{e^{-kz_0}}{(\omega - kV)(b - d)}, \\ C(k, \omega) = \frac{-b \operatorname{sh} kz_0 + d \operatorname{ch} kz_0}{(\omega - kV)(b - d)}. \end{cases}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \frac{\rho_2 \omega^2 [\omega^2 \operatorname{sh} |k|(z - H) + g|k| \operatorname{ch} |k|(z - H)] e^{-|k|z_0}}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}, \\ \tilde{\varphi}_1(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \left[\frac{\rho_2 \omega^4 \operatorname{ch} |k|H \operatorname{sh} |k|z + (-\rho_1 \omega^4 + (\rho_1 - \rho_2)g^2|k|^2) \operatorname{sh} |k|H \operatorname{ch} |k|z}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2 \omega^2 g|k| \operatorname{ch} |k|(z - H)}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \right] e^{-|k|z_0}, \\ \tilde{\varphi}_2(k, \omega, z) &= \frac{k}{\omega - kV} \times \\ &\times \left[\frac{-\rho_2 \omega^4 \operatorname{ch} |k|H \operatorname{sh} |k|z_0 + (-\rho_1 \omega^4 + (\rho_1 - \rho_2)g^2|k|^2) \operatorname{sh} |k|H \operatorname{ch} |k|z_0}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2 \omega^2 g|k| \operatorname{ch} |k|(z_0 + H)}{|k|(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))} \right] e^{|k|z}, \quad (1.13) \end{aligned}$$

где

$$\omega_1^2(k) = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1) \operatorname{th} kH}{\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th} kH}$$

— дисперсионное соотношение для внутренних волн. Здесь, как и в формулах (1.5), везде вместо k стоит $|k|$, кроме множителя $k/(\omega - kV)$. Это обусловлено тем, что в решении $\tilde{\varphi}_2(k, \omega, z)$ содержится $|k|$ для обеспечения убывания решения с глубиной при всех значениях k (как положительных, так и отрицательных).

Далее, как и в первой задаче, проведем расчет величины возвышения поверхности жидкости с использованием процедуры обратного преобразования Фурье. В итоге для трансформанты Фурье с использованием выражения для $\tilde{\Phi}_1(k, \omega, z)$ из (1.13) получим

$$\tilde{\eta}(k, \omega) = \frac{k}{\omega - kV} \frac{i\rho_2 \omega^3 e^{-|k|z_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(\omega^2 - g|k|)(\omega^2 - \omega_1^2(|k|))}. \quad (1.14)$$

Проводя обратное преобразование Фурье по ω , из (1.14) имеем следующее выражение для стационарной части поверхностных возмущений при $t \rightarrow \infty$ в системе отсчета, связанной с движущимся диполем:

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2\pi V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2 |k| e^{-|k|z_0} e^{-ik\xi} dk}{(\rho_2 \operatorname{ch} |k|H + \rho_1 \operatorname{sh} |k|H)(|k| - g/V^2)(1 - \psi(|k|))}; \quad (1.15)$$

здесь $\psi(|k|) = \omega_1^2(|k|)/(|k|^2 V^2)$, $\xi = x + Vt$, а контур интегрирования слегка смещен в верхнюю полуплоскость. Для оценки интеграла (1.15) разобьем область интегрирования на два интервала (рис. 1.2),

$$\eta(\xi) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{0+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk, \quad I_2 = \int_{0+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} F(k, z_0) e^{-ik\xi} dk.$$

В итоге, проводя процедуры расчетов аналогично первой задаче, получим окончательные выражения для амплитуд двух мод волновой структуры (генерируемых диполем с моментом R): поверхностной моды

$$\begin{aligned} \eta_{\Pi}(\xi) = \\ = -R \frac{2\rho_2 g e^{-gz_0/V^2}}{V^3(\rho_2 \operatorname{ch}(gH/V^2) + \rho_1 \operatorname{sh}(gH/V^2))(1 - \psi(g/V^2))} \sin(g\xi/V^2) \end{aligned} \quad (1.16)$$

и внутренней моды

$$\eta_B(\xi) = -R \frac{2\rho_2 k e^{-kz_0}}{(\rho_2 \operatorname{ch} kH + \rho_1 \operatorname{sh} kH)(k - g/V^2)(-\psi'(k))} \sin(k\xi) \Big|_{k=k_\psi}. \quad (1.17)$$

Отметим, что как и для первой задачи, внутренняя мода возникает в случае, когда V меньше некоторого $V_{\text{кр.}}$, которое определяется тем же соотношением (1.10), что и для задачи (1.1). Поверхностная же мода в обоих случаях существует при любых значениях величины скорости набегающего потока, как и в классической задаче об обтекании препятствия потоком однородной жидкости бесконечной глубины [160].

1.1.3. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря

Механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводного препятствия и описываемых выражениями (1.8)–(1.9) и (1.16)–(1.17), относительно прост и представляется следующим образом. Так, для задачи (1.1) поверхностная мода (1.8) отражает эффект непосредственного обтекания дипольного препятствия потоком жидкости. В этом случае возмущения от него распространяются вверх (с выходом на поверхность, что и описывается (1.8)) и вниз. В последнем случае это вызывает возмущения самого слоя скачка плотности воды, колебания которого в свою очередь эволюционируют как вниз, исчезая на бесконечности (в рамках поставленной задачи), так и вверх, вызывая вторичные возмущения поверхности воды, что и описывается (1.9). При этом очевидно, что по своей энергии (и импульсу) вторичные колебания (за счет внутренней моды) слабее первых (соответствующие расчеты будут рассмотрены ниже).

В условиях задачи (1.11) — обтекание под границей раздела слоев — на распространение возмущений от препятствия вверх существенное влияние оказывает скачок плотности, «забирающая» часть их энергии на свое возбуждение. Остальная часть (с учетом диссипации) идет на генерацию поверхностных

возмущений, описываемых (1.16). В свою очередь возбуждение от скачка, эволюционируя вверх, формирует вторичную (внутреннюю) моду (1.17) на поверхности воды. А возмущение от препятствия вниз полностью исчезает на бесконечности.

На рис. 1.4–1.6 наглядно продемонстрирован эффект влияния скачка плотности на изменение амплитуды поверхностной волны, возникающей при обтекании диполя. Расчеты велись при значениях параметров, соответствующих реальным условиям открытого моря. Так, плотность верхнего слоя моря можно выбрать как $\rho_1 = 1022 \text{ кг/м}^3$, а плотность нижнего (ρ_2) выбрать в пределах $1023 \text{ кг/м}^3 \leq \rho_2 \leq 1029 \text{ кг/м}^3$. Таким плотностям отвечают значения параметра $\delta = \rho_1/\rho_2$ в пределах $0,993 \leq \delta \leq 0,999$. На графиках 1.4–1.6 расчеты проводились для трех вариантов мощности скачка плотности: $\delta_1 = 0,996$, $\delta_2 = 0,998$ и $\delta_3 = 0,999$. Момент диполя R задавался пропорциональным скорости его движения V : $R/V = 1600 \text{ м}^2$. Для исследования влияния глубины локализации скачка расчеты велись при $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$, а положение препятствия (диполя) ограничивалось тремя горизонтами: $z_0 = 7 \text{ м}$, 4 м и 1 м как сверху (задача (1.1)), так и снизу (задача (1.11)) от уровня границы раздела слоев воды.

На рис. 1.4 приведены кривые амплитуд поверхностной моды B , рассчитанные над слоем скачка плотности (верхние три линии) и под ним (нижние три линии) для случаев $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$. Здесь следует отметить, что на каждой кривой расположены три группы точек, соответствующие трем значениям δ_i ($i = 1, 2, 3$), что указывает на независимость поверхностной моды от мощности скачка плотности воды, то есть такая мода проявляется непосредственно за счет обтекания диполя. Далее, на графиках видно, что амплитуды возмущений над скачком плотности существенно (в несколько раз) выше соответствующих амплитуд под скачком. Сравнение значений B для двух различных глубин скачков плотности (50 м и 70 м) показывает, что углубление скачка также приводит к существенному уменьшению амплитуды возмущений на поверхности воды.

На рис. 1.5–1.6 приведены кривые, соответствующие амплитудам внутренней моды B , рассчитанные над слоем скачка плот-

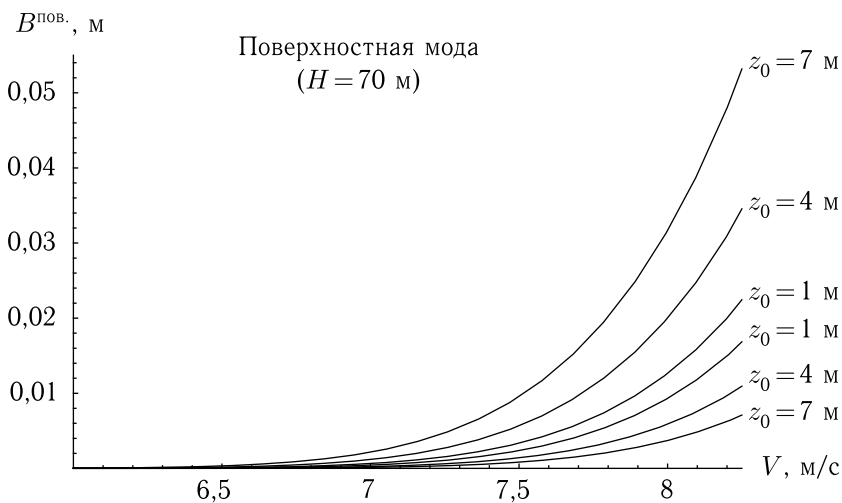
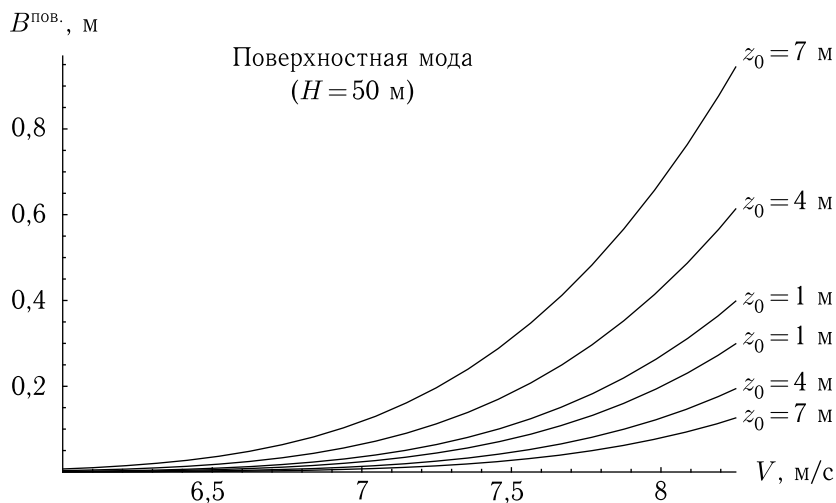


Рис. 1.4. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случаях $H = 50$ м и $H = 70$ м

ности (верхние части) и под ним (нижние части) для случаев $H = 50$ м и $H = 70$ м. Необходимо отметить, что в обоих случаях с приближением препятствия к слою скачка амплитуда внутренней моды возрастает, то есть уменьшению z_0 соответствует увеличение B . На представленных графиках видно, что проявления амплитуд внутренней и поверхностной моды на интервале

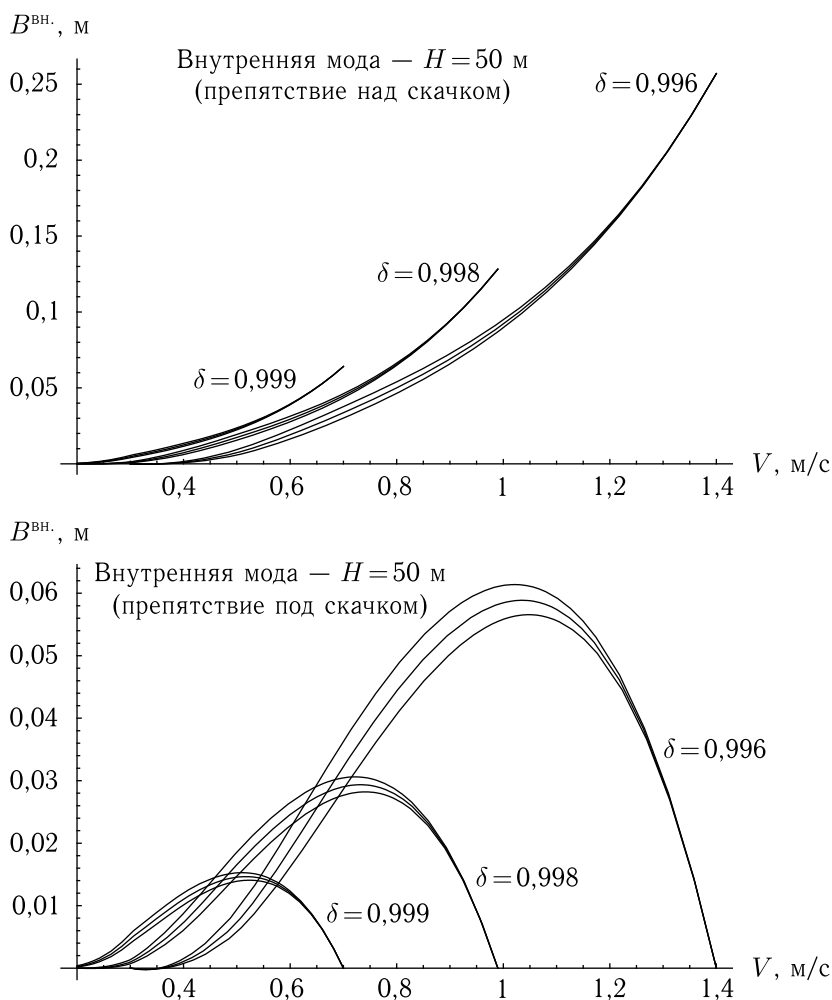


Рис. 1.5. Амплитуды внутренней моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случае $H = 50$ м

скорости обтекания препятствия V существенно разнесены между собой. Так, внутренняя мода в зависимости от δ проявляется лишь при небольших скоростях V , а область проявления поверхностной моды существенно сдвинута в сторону больших V . Это обусловлено «привязкой» внутренней моды к структуре скачка плотности (см. выражение (1.10)).

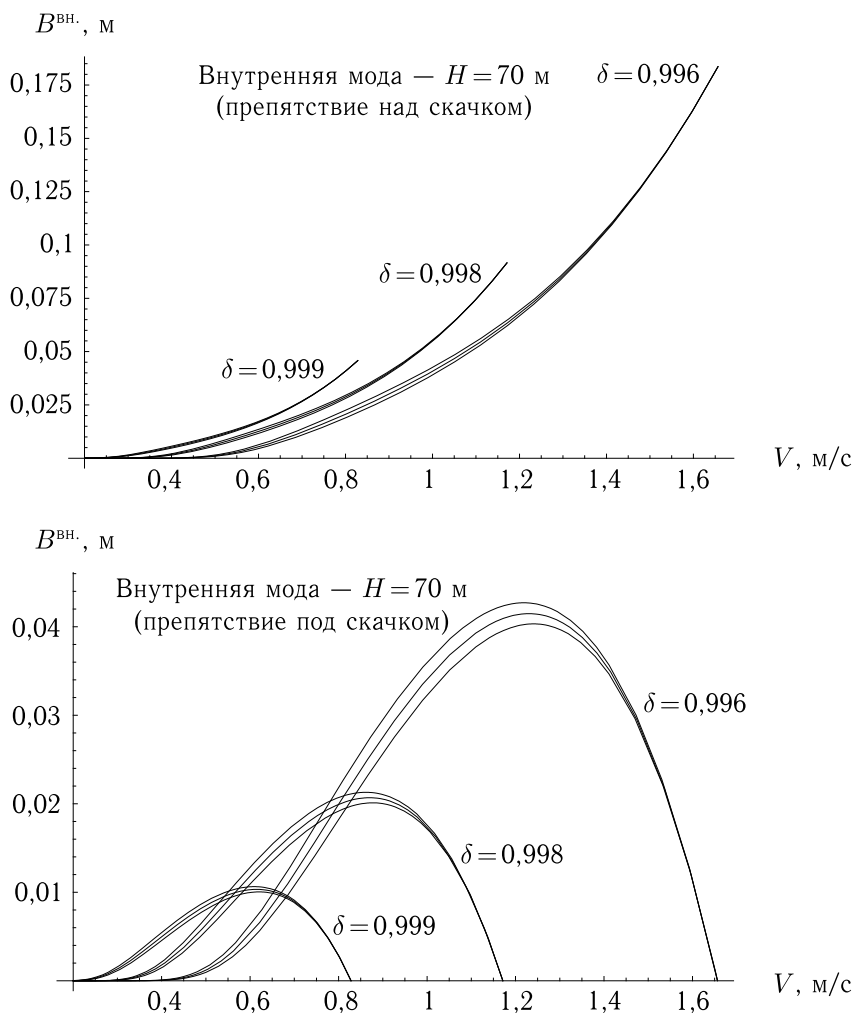


Рис. 1.6. Амплитуды внутренней моды при обтекании препятствия над слоем скачка плотности и под ним в случае $H = 70$ м

Сравнивая амплитуды возмущений внутренней (рис. 1.5–1.6) и поверхностной (рис. 1.4) мод, нужно отметить их существенную разницу в сторону увеличения последней (как и следовало ожидать — см. выше). При этом, в отличие от поверхностной моды, для внутренней моды различно и ее поведение в случаях обтекания диполя над скачком плотности и под ним, причем как

по форме, так и по величине B . Это указывает на характерную роль скачка плотности как неоднородности, блокирующей выход возмущений на морскую поверхность.

Продолжая анализ кривых на рис. 1.5–1.6, отметим, что (как и в случае поверхностной моды) локализация по вертикали скачка плотности также влияет и на эволюцию внутренней моды и ее характеристики на поверхности воды. Однако в последнем случае это влияние несколько меньше.

Заканчивая анализ поверхностных возмущений, возникающих при обтекании препятствия в виде диполя, важно отметить, что параметры подобных поверхностных колебаний воды неоднократно выявлялись при радиолокационном мониторинге морской поверхности, проводимом в рамках специальных натурных экспериментов (см., например, [41]).

1.1.4. Заключение

Исследованы поверхностные возмущения двухслойной идеальной жидкости, возникающие при обтекании в окрестности слоя скачка плотности подводного препятствия, моделируемого точечным диполем. Показано, что в реальных условиях открытого моря за обтекаемым препятствием возможно образование двух различных типов поверхностных волн. Сравнение амплитуд поверхностных возмущений от обтекаемого препятствия, находящегося над и под скачком плотности, выявило их существенные различия, что представляется важным для использования этого эффекта в практических задачах.

1.2. Обтекание препятствий двухслойным потоком конечной глубины

В разд. 1.1 исследовался механизм генерации поверхностных волн, возникающих при обтекании подводных препятствий вблизи скачка плотности в условии бесконечной глубины моря. Было показано, что амплитуды поверхностных волн зависят от мощности скачка плотности, глубины его погружения и относительной локализации препятствия в окрестности самого скачка плотности. В настоящем разделе исследуется подобная задача в модельном океане конечной глубины, и ее результаты сравниваются с результатами, полученными в разд. 1.1.

1.2.1. Постановка задачи и ее решение

Рассматривается двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий точечный диполь с моментом m . Обозначим толщину верхнего слоя через H , нижнего через H_1 , а плотности соответственно будут ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Требуется определить волновую часть возмущений свободной поверхности, распространяющихся вниз по потоку. Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось x направим вдоль этой границы, а ось y вертикально вверх. Препятствие локализовано либо под границей раздела двух слоев (рис. 1.7), либо над ней (рис. 1.11) на оси y . Решение обеих задач проводим в рамках теории малых возмущений.

1. Препятствие в нижнем слое. Вначале рассмотрим случай, когда диполь находится под скачком плотности, то есть

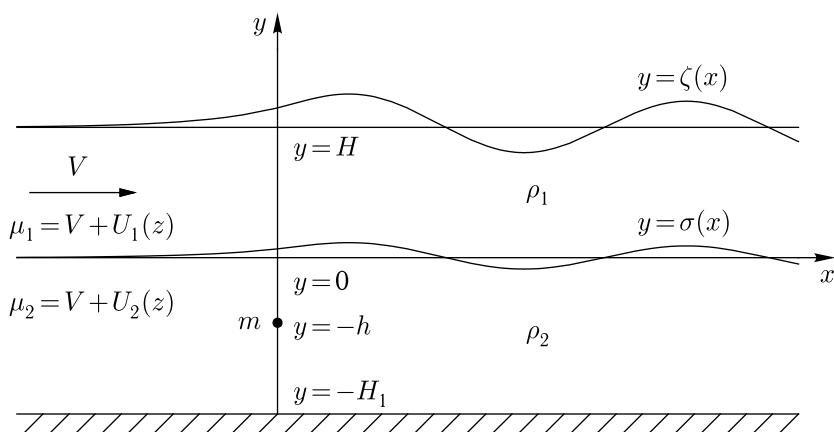


Рис. 1.7. Обтекание диполя, локализованного в нижнем слое двухслойного потока

в точке $(0, -h)$. Пусть скорость установившегося потока при $x \rightarrow -\infty$ равна V . Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из слоев в виде $\mu_j = V + U_j$, $U_j = u_j - iv_j$, ($j = \{1, 2\}$). Обозначим отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения $y = H$ через $\zeta(x)$, а величину возвышения границы раздела слоев потока — через $\sigma(x)$. Поскольку вдоль линии тока $y = H + \zeta(x)$ вектор скорости произвольной частицы жидкости коллинеарен ее касательной, то

$$\zeta'(x) = \frac{v_1}{V + u_1} \Big|_{y=H+\zeta(x)}.$$

Линеаризуя данное условие и перенося его со свободной поверхности на прямую $y = H$, имеем кинематическое граничное условие

$$v_1 = V\zeta'(x) \text{ при } y = H. \quad (1.18)$$

Аналогично получаем линеаризованное кинематическое условие вдоль поверхности раздела слоев

$$v_1 = V\sigma'(x), v_2 = V\sigma'(x) \text{ при } y = 0. \quad (1.19)$$

Отсюда имеем одно условие для вертикальных компонент скорости:

$$v_1 = v_2 \text{ при } y = 0. \quad (1.20)$$

Так как возмущения от диполя затухают вверх по потоку, то интеграл Бернулли вдоль линии тока $y = H + \zeta(x)$ можно записать следующим образом:

$$\frac{|\mu_1^2|}{2} + \frac{p_0(x)}{\rho_1} + g(H + \zeta(x)) = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0^{(\infty)}}{\rho_1} + gH,$$

где $p_0(x)$ — давление вдоль свободной поверхности, $p_0^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_0(x)$, g — ускорение свободного падения. Считая давление постоянным вдоль всей свободной поверхности, получаем динамическое условие на границе верхнего слоя,

$$\zeta(x) = \frac{V^2 - |\mu_1|^2}{2g} \Big|_{y=H+\zeta(x)},$$

которое посредством линеаризации преобразуется к виду

$$\zeta(x) = -\frac{V}{g}u_1 \text{ при } y = H. \quad (1.21)$$

Продифференцируем равенство (1.21) по x и из получившегося соотношения исключим величину $\zeta'(x)$ с помощью формулы (1.18). В результате придем к граничному условию для компонент вектора скорости:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 = 0 \text{ при } y = H, \quad \nu = \frac{g}{V^2}. \quad (1.22)$$

Интегралы Бернулли, записанные для линий тока на верхней и нижней сторонах поверхности раздела слоев $y = \sigma(x)$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1(x) + \frac{\rho_1}{2}|\mu_1^2| + \rho_1 g\sigma(x) &= p_1^{(\infty)} + \frac{\rho_1}{2}V^2 \quad \text{при } y = \sigma(x), \\ p_2(x) + \frac{\rho_2}{2}|\mu_2^2| + \rho_2 g\sigma(x) &= p_2^{(\infty)} + \frac{\rho_2}{2}V^2 \quad \text{при } y = \sigma(x), \end{aligned}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — давления вдоль соответствующих сторон этой поверхности, $p_1^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_1(x)$, $p_2^{(\infty)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} p_2(x)$. Поскольку при переходе через поверхность разрыва касательных скоростей давление непрерывно, то $p_1(x) = p_2(x)$, $p_1^{(\infty)} = p_2^{(\infty)}$

и два предыдущих равенства могут быть приведены к одному условию для компонент скорости,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2}(2Vu_1 + u_1^2 + v_1^2) + \rho_1 g\sigma(x) = \\ = \frac{\rho_2}{2}(2Vu_2 + u_2^2 + v_2^2) + \rho_2 g\sigma(x) \text{ при } y = \sigma(x). \end{aligned}$$

Пренебрегая в последнем соотношении квадратами малых величин u_j и v_j ($j = \{1, 2\}$) и перенося его на невозмущенное положение скачка плотности, получаем линеаризованное динамическое условие на границе раздела слоев

$$\rho_1(Vu_1 + g\sigma(x)) = \rho_2(Vu_2 + g\sigma(x)) \text{ при } y = 0.$$

Продифференцируем обе его части по x и в полученное равенство подставим выражения для величины $\sigma'(x)$, следующие из формул (1.19). В результате приходим к граничному условию для возмущений скорости на слое скачка плотности, не содержащему неизвестной функции $\sigma(x)$:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu v_1 \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu v_2 \right) \text{ при } y = 0. \quad (1.23)$$

Помимо этого на дне бассейна должно быть выполнено условие непротекания

$$v_2 = 0 \text{ при } y = -H_1. \quad (1.24)$$

Перепишем соотношения (1.22), (1.23), (1.20), (1.24) соответственно в терминах возмущений комплексно-сопряженной скорости:

$$\text{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = 0 \text{ при } y = H, \quad (1.25)$$

$$\delta \text{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = \text{Im} \left[i \frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right] \text{ при } y = 0, \quad (1.26)$$

$$\text{Im } U_1 = \text{Im } U_2 \text{ при } y = 0, \quad (1.27)$$

$$\text{Im } U_2 = 0 \text{ при } y = -H_1, \quad (1.28)$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$, $z = x + iy$. Таким образом, исходная задача сведена к отысканию функций $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.25)–(1.28), причем $U_1(z)$ регулярна в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < H$, а $U_2(z)$ — в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$ всюду, кроме точки $z = -ih$, в которой она имеет

полус второго порядка (так как в этой точке расположен диполь). Возмущение свободной поверхности по отношению к ее равносному положению вычисляется с помощью динамического условия на границе верхнего слоя (1.21).

В соответствии с вышесказанным будем искать комплексно-сопряженную скорость $U_1(z)$ в виде ее разложения в интеграл Фурье по волновым числам, а $U_2(z)$ — как сумму комплексно-сопряженной скорости, индуцированной диполем в безграничном потоке, и регулярной функции, представленной интегралом Фурье:

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.29)$$

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \left[-\frac{1}{(z+ih)^2} + \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk \right]. \quad (1.30)$$

Применив равенство

$$-\frac{1}{(z+ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} k e^{-kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > -h, \\ \int_0^{\infty} k e^{kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < -h, \end{cases}$$

получим из (1.30) выражение для функции $U_2(z)$ в областях нижнего слоя, находящихся над и под точкой локализации диполя соответственно:

$$U_2(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [(k e^{-kh} + C(k))e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk, & \text{если } y > -h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + (k e^{kh} + D(k))e^{-ikz}] dk, & \text{если } y < -h. \end{cases} \quad (1.31)$$

Подставив формулы (1.29) и (1.31) для комплексно-сопряженных скоростей $U_1(z)$ и $U_2(z)$ в граничные условия (1.25)–(1.28),

перепишем последние в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{\infty} [k(A(k)e^{-kH} + B(k)e^{kH}) + \nu(A(k)e^{-kH} - B(k)e^{kH})] \sin kx \, dk = 0, \\ & \int_0^{\infty} [\delta\{k(A(k) + B(k)) + \nu(A(k) - B(k))\} - \\ & \quad - k(ke^{-kh} + C(k) + D(k)) - \nu(ke^{-kh} + C(k) - D(k))] \sin kx \, dk = 0, \\ & \int_0^{\infty} [A(k) - B(k) - ke^{-kh} - C(k) + D(k)] \sin kx \, dk = 0, \\ & \int_0^{\infty} [C(k)e^{kH_1} - (ke^{kh} + D(k))e^{-kH_1}] \sin kx \, dk = 0. \end{aligned} \right.$$

Выполнение этих равенств эквивалентно одновременному обращению в нуль сомножителей в подынтегральных выражениях, стоящих в квадратных скобках перед $\sin kx$. Отсюда имеем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных функций $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & (k + \nu)e^{-kH}A + (k - \nu)e^{kH}B = 0, \\ & \delta(k + \nu)A + \delta(k - \nu)B - (k + \nu)C - (k - \nu)D = k(k + \nu)e^{-kh}, \\ & A - B - C + D = ke^{-kh}, \\ & e^{kH_1}C - e^{-kH_1}D = ke^{k(h-H_1)}. \end{aligned} \right.$$

Решая ее, получаем следующие выражения для $A(k)$ и $B(k)$:

$$\begin{aligned} A(k) &= \{2k^2(k - \nu)e^{kH} \operatorname{ch} k(H_1 - h)\} / \\ & \quad / \{ (1 - \delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H - H_1) + \\ & \quad + [(1 + \delta)k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{ch} k(H_1 + H) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_1 + H) \}, \\ B(k) &= \{-2k^2(k + \nu)e^{-kH} \operatorname{ch} k(H_1 - h)\} / \\ & \quad / \{ (1 - \delta)(k^2 - \nu^2) \operatorname{ch} k(H - H_1) + \\ & \quad + [(1 + \delta)k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{ch} k(H_1 + H) - 2k\nu \operatorname{sh} k(H_1 + H) \}. \end{aligned}$$

Подставив последние в соотношения (1.29) и (1.21) и воспользовавшись формулами для суммы и разности гиперболических функций, приходим к следующему интегральному представлению искомой величины возвышения свободной поверхности:

$$\zeta(x) = \frac{m}{\pi V} \int_0^\infty \frac{k^2 \operatorname{ch} k(H_1 - h)}{\operatorname{ch} kH \operatorname{ch} kH_1} \times \\ \times \frac{\cos kx dk}{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)}.$$

Выбрав в качестве характерного вертикального масштаба толщину верхнего слоя H , а в качестве горизонтального — величину $\nu^{-1} = V^2/g$, перейдем к безразмерным переменным,

$$X = \nu x, \quad Z = \frac{\zeta}{H}, \quad \xi = \frac{k}{\nu}, \quad M = \frac{m}{VH^2}, \\ E = \nu H = \frac{gH}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}^2}, \quad E_1 = \nu H_1 = \frac{gH_1}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_1^2}, \quad (1.32) \\ E_0 = \nu h = \frac{gh}{V^2} = \frac{1}{\mathbf{F}_0^2},$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_0$ — числа Фруда соответственно: по глубине верхнего слоя, глубине нижнего слоя и расстоянию от диполя до невозмущенной поверхности раздела. В переменных (1.32) выражение для отклонения свободной границы запишется в виде

$$Z(X) = \frac{ME}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E\xi \operatorname{ch} E_1\xi} \times \\ \times \frac{\cos X\xi d\xi}{\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi)}. \quad (1.33)$$

Асимптотическое положение свободной поверхности далеко вниз по потоку (при $X \rightarrow \infty$) определяется неотрицательными нулями знаменателя подынтегрального выражения в (1.33), то есть неотрицательными корнями уравнения

$$\xi^2 + [\delta\xi^2 + (1 - \delta)] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi) = 0.$$

Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon = 1 - \delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$, обозначающий относительный перепад плотности (по условию $0 < \varepsilon < 1$),

и перепишем это уравнение в виде

$$f(\xi, E, E_1) = \varepsilon, \quad (1.34)$$

где

$$f(\xi, E, E_1) = \frac{\xi^2(1 + \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi) - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi)}{(\xi^2 - 1) \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi}.$$

Для его исследования введем следующие обозначения: $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi, E, E_1) = f_0(E, E_1)$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial f(\xi, E, E_1)}{\partial \xi} = f_1(E, E_1)$, $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f(\xi, E, E_1)}{\partial \xi^2} = f_2(E, E_1)$. Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned} f_0(E, E_1) &= \frac{E + E_1 - 1}{EE_1}; \quad f_2(E, E_1) = \\ &= \frac{2(E^2 E_1 + EE_1^2) - 2(E^2 + 3EE_2 + E_1^2) + 6(E + E_1 - 1)}{3EE_1}. \end{aligned}$$

Помимо этого, из четности f по переменной ξ следует, что $f_1(E, E_1) \equiv 0$. Отметим далее, что, как показывают проведенные численные эксперименты, относительно поведения функции $f(\xi, E, E_1)$, стоящей в левой части уравнения (1.34), имеет место следующее утверждение.

Если $f_2(E, E_1) \leq 0$, то $f(\xi, E, E_1)$ монотонно убывает по ξ на полуинтервале $[0; 1)$; если же $f_2(E, E_1) > 0$, то $f(\xi, E, E_1)$ имеет единственный максимум $\xi_0(E, E_1) \in (0; 1)$, то есть функция $f(\xi, E, E_1)$ возрастает при $\xi \in [0; \xi_0]$ и убывает при $\xi \in [\xi_0; 1)$.

Кроме того, очевидно, что $\lim_{\xi \rightarrow 1^-} f(\xi, E, E_1) = -\infty$. Таким образом, поведение функции $f(\xi, E, E_1)$ на полуинтервале $[0; 1)$ определяется знаком ее второй производной при $\xi = 0$, а уравнение (1.34) может иметь не более двух корней на интервале $(0; 1)$.

На рис. 1.8 на плоскости параметров E, E_1 изображена кривая Γ_2 , определяемая уравнением $f_2(E, E_1) = 0$. Она имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты $E_1 = 1$ и $E = 1$ (то есть на Γ_2 $\lim_{E_1 \rightarrow 1^-} E = \infty$, $\lim_{E \rightarrow 1^-} E_1 = \infty$). Кривая Γ_2 симметрична относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов и проходит через точку $(1; 1)$, поэтому в этой точке она пересека-

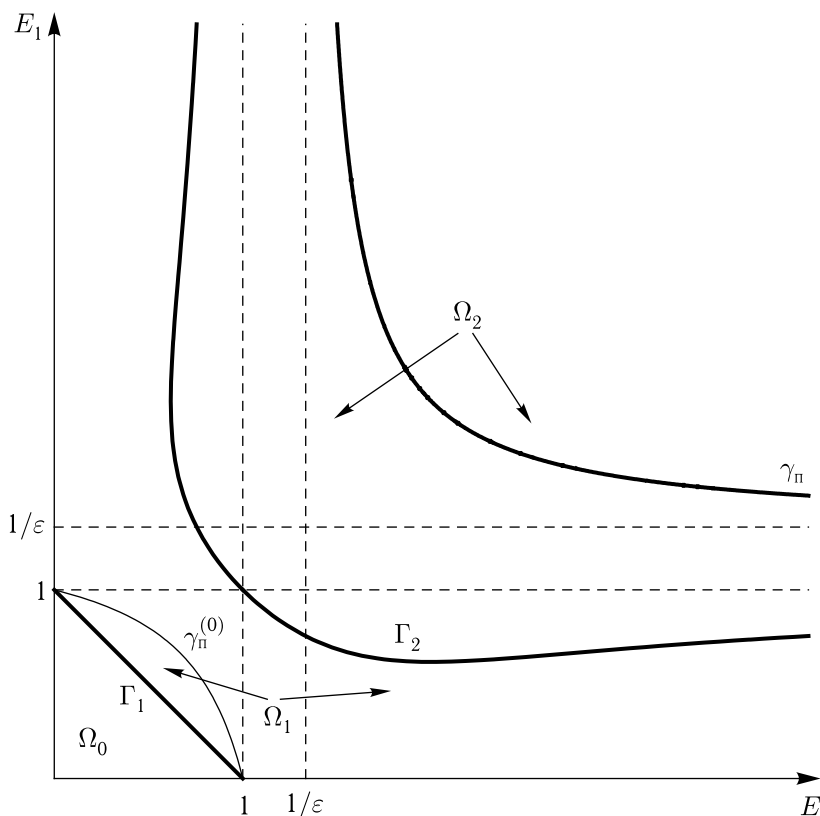
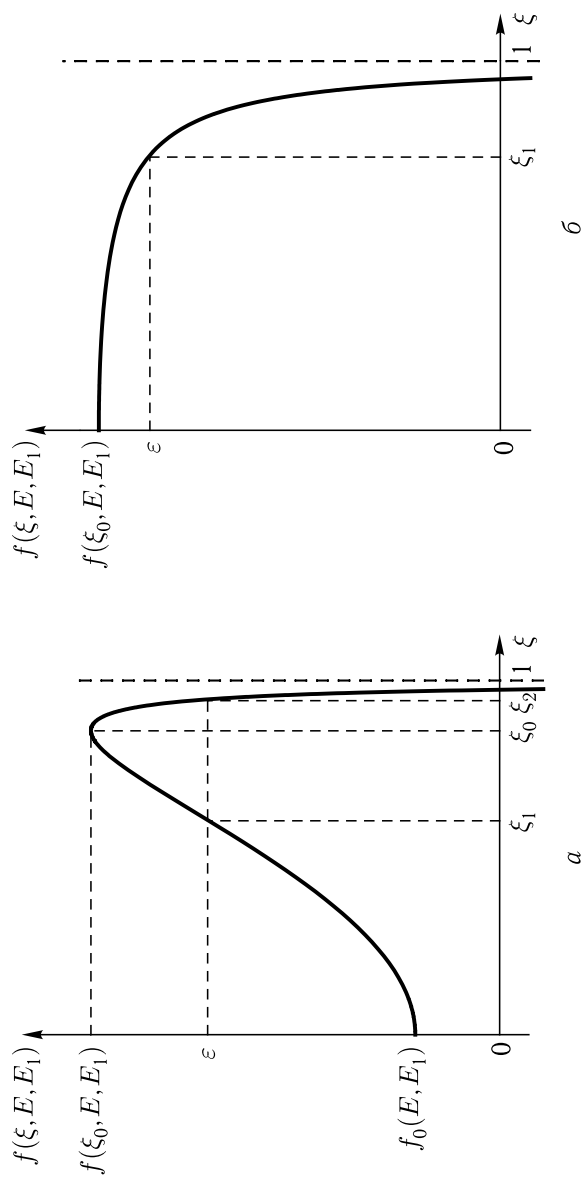


Рис. 1.8. Кривые и области, рассматриваемые на плоскости параметров $(E; E_1)$

ет биссектрису под прямым углом, а прямая $E + E_1 = 2$, перпендикулярная упомянутой биссектрисе и также проходящая через точку $(1; 1)$, является касательной к Γ_2 . Уравнение $f_0(E, E_1) = 0$ задает в первом квадранте отрезок Γ_1 , соединяющий точки $(1; 0)$ и $(0; 1)$. Кривая Γ_2 и отрезок Γ_1 разбивают первую четверть на три области. В области Ω_2 , расположенной над Γ_2 , выполнены неравенства $f_2(E, E_1) > 0$ и $f_0(E, E_1) > 0$; в области Ω_1 , находящейся между Γ_2 и Γ_1 , $f_2(E, E_1) < 0$, $f_0(E, E_1) > 0$; наконец, в области Ω_0 , являющейся внутренностью треугольника с вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$, $f_2(E, E_1) < 0$, $f_0(E, E_1) < 0$.

Исследуем теперь вопрос о количестве корней уравнения (1.34) на интервале $(0; 1)$ в зависимости от значений параметров

Рис. 1.9. Два качественно различных варианта поведения функции $f(\xi, E, E_1)$ на интервале $(0; 1)$

E, E_1 и ε ($E > 0$, $E_1 > 0$, $0 < \varepsilon < 1$). Вначале сформулируем критерии существования двух корней. Из графических соображений (см. рис. 1.9, *a*) ясно, что этот случай реализуется тогда и только тогда, когда функция $f(\xi, E, E_1)$ (рассматриваемая как функция переменной ξ) имеет локальный максимум в точке $\xi_0 \in (0; 1)$ и значение параметра ε лежит внутри интервала $(f_0(E, E_1), f(\xi_0, E, E_1))$, то есть

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) > 0, \\ f_0(E, E_1) < \varepsilon < \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1). \end{cases}$$

Вопрос о наличии у уравнения (1.34) хотя бы одного корня на интервале $(0; 1)$ решается положительно в каждом из следующих двух случаев.

1. Функция $f(\xi, E, E_1)$ имеет максимум в точке $\xi_0 \in (0; 1)$, и величина ε не превосходит этот максимум (рис. 1.9, *a*), что равносильно выполнению следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) > 0, \\ \varepsilon \leq \max_{\xi \in (0;1)} f(\xi, E, E_1). \end{cases}$$

2. Функция $f(\xi, E, E_1)$ монотонно убывает на интервале $(0; 1)$, и $\varepsilon < \max_{\xi \in [0;1]} f(\xi, E, E_1) = f_0(E, E_1)$ (рис. 1.9, *б*), то есть

$$\begin{cases} f_2(E, E_1) \leq 0, \\ \varepsilon < f_0(E, E_1). \end{cases}$$

Для визуализации полученных критериев на плоскости $(E; E_1)$ сделаем ряд вспомогательных утверждений. Во-первых, нетрудно убедиться, что уравнение $f_0(E, E_1) = \varepsilon$ определяет гиперболу γ с асимптотами $E = 1/\varepsilon$ и $E_1 = 1/\varepsilon$. Отсюда сразу же следует, что ее правая ветвь $\gamma_{\text{п}}$ целиком расположена в области Ω_2 , поскольку, как показано выше, граница $\partial\Omega_2 = \Gamma$ лежит вне области

$$\begin{cases} E > 1, \\ E_1 > 1. \end{cases}$$

Отметим также, что неравенство $f_0(E, E_1) > \varepsilon$ задает область между ветвями гиперболы γ , а неравенством $f_0(E, E_1) < \varepsilon$ определяются области над ее правой ($\gamma_{\text{п}}$) и под левой ($\gamma_{\text{л}}$) ветвями.

Во-вторых, в силу симметрии γ относительно прямой $E = E_1$, являющейся биссектрисой первого и третьего координатных углов, эта прямая пересекает левую ветвь γ под прямым углом. Абсцисса E_0 точки пересечения находится из уравнения $\varepsilon E_0^2 - 2E_0 + 1 = 0$, то есть

$$E_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}.$$

Очевидно, что $E_0 < 1$, поэтому прямая $E + E_1 = 2E_0$ (касательная к левой ветви гиперболы γ и параллельная касательной к кривой Γ , $E + E_1 = 2$) расположена ниже этой касательной. Отсюда следует, что $\gamma_{\text{л}}$ лежит вне области Ω_2 (и не пересекается с ее границей). Обозначим через $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ часть $\gamma_{\text{л}}$, находящуюся в первом квадранте. Легко видеть, что $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ расположена над прямой $E + E_1 = 1$, поскольку $\gamma_{\text{л}}$ выпукла вверх и проходит через точки $(1; 0)$ и $(0; 1)$, принадлежащие этой прямой. Таким образом, кривая $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ лежит в области Ω_1 .

В-третьих, покажем, что при наличии на интервале $(0; 1)$ у функции $f(\xi, E, E_1)$ локального максимума ξ_0 справедливо неравенство $f(\xi_0, E, E_1) \geq 1$. С этой целью рассмотрим уравнение $f(\xi, E, E_1) = 1$ или

$$\xi^2 - (\text{th } E\xi + \text{th } E_1\xi)\xi + \text{th } E\xi \text{th } E_1\xi = 0.$$

Решая его как квадратное относительно ξ (с коэффициентами, зависящими от $\text{th } E\xi$ и $\text{th } E_1\xi$), находим, что оно равносильно совокупности

$$\begin{cases} \text{th } E\xi = \xi, \\ \text{th } E_1\xi = \xi, \end{cases} \quad (1.35)$$

которая имеет хотя бы одно положительное решение, если

$$\begin{cases} E > 1, \\ E_1 > 1, \end{cases} \quad (1.36)$$

поскольку уравнение $\operatorname{th} ax = x$ имеет положительный корень при выполнении условия $(\operatorname{th} ax)'_x|_{x=0} > 1$, то есть при $a > 1$. Заметим, что в силу неравенства $\operatorname{th} E\xi < 1$, справедливого при любых вещественных значениях ξ , все положительные решения рассматриваемой совокупности (если они существуют) лежат на интервале $(0; 1)$. Далее, так как область Ω_2 лежит внутри области, задаваемой неравенствами (1.36), то отсюда получаем, что в случае наличия у функции $f(\xi, E, E_1)$ локального максимума на интервале $(0; 1)$ его величина не меньше единицы.

Докажем, наконец, что уравнение (1.34) не имеет действительных корней ξ таких, что $\xi > 1$. Имеем равенство $\lim_{\xi \rightarrow 1^+} f(\xi, E, E_1) = +\infty$. С другой стороны, воспользовавшись предельными соотношениями $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \operatorname{th} E\xi = 1$ и $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \operatorname{th} E_1\xi = 1$, нетрудно убедиться в справедливости равенства $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi, E, E_1) = 2$. Выше было установлено, что уравнение $f(\xi, E, E_1) = 1$ равносильно совокупности (1.35), все положительные решения которой лежат на интервале $(0; 1)$. Следовательно, это уравнение не имеет корней при $\xi > 1$, а поскольку функция $f(\xi, E, E_1)$ непрерывна по ξ на множестве $(1; +\infty)$, то отсюда заключаем, что при $\xi > 1$ выполняется неравенство $f(\xi, E, E_1) > 1$ и уравнение (1.34) не имеет корней $\xi \in (1; +\infty)$.

Итак, мы показали следующее.

1. Правая ветвь гиперболы γ лежит в области Ω_2 .
2. Часть левой ветви гиперболы γ , находящаяся в первой четверти, расположена вне области Ω_2 .
3. $\max_{0 < \xi < 1} f(\xi, E, E_1) \geq 1$ при условии, что точка с координатами $(E; E_1)$ лежит в области Ω_2 .
4. Все положительные корни уравнения (1.34) удовлетворяют неравенству $0 < \xi < 1$.

С учетом полученных утверждений критерий наличия у уравнения (1.34) двух положительных корней можно привести к виду

$$\begin{cases} E + E_1 - 1 < \varepsilon E E_1, \\ E > 1/\varepsilon, E_1 > 1/\varepsilon. \end{cases} \quad (1.37)$$

Эта система задает внутренность правой ветви гиперболы γ . Условия существования у (1.34) хотя бы одного положительного решения переписываются в виде

$$\begin{cases} E + E_1 - 1 > \varepsilon E E_1, \\ E > 1/\varepsilon, \quad E_1 > 1/\varepsilon \end{cases} \quad (1.38)$$

и определяют область в первом квадранте, расположенную над объединением кривой $\gamma_{\text{л}}^{(0)}$ (то есть находящейся в нем части левой ветви гиперболы γ) и луча $[1; +\infty)$ на оси абсцисс.

Обозначим теперь через β отношение толщины нижнего слоя жидкости к толщине верхнего: $\beta = H_1/H$. Из формул (1.32) вытекает, что $\beta = E_1/E$. Подставляя βE вместо E_1 в условия (1.37)–(1.38) и решая получившиеся неравенства относительно E , находим, что уравнение (1.34) имеет два положительных корня при

$$E > E_{cr}^{\text{BH}} = \frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta} \quad (1.39)$$

и хотя бы одно положительное решение при

$$E > E_{cr}^{\text{пов}} = \frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2\varepsilon\beta}. \quad (1.40)$$

Отсюда очевидно, что $E_{cr}^{\text{пов}} < E_{cr}^{\text{BH}}$. Заметим, что с физической точки зрения поиск корней уравнения (1.34) эквивалентен отысканию таких волн, фазовая скорость которых равна скорости набегающего потока V . Поэтому данные волны являются стационарными, что и требуется по условию задачи.

Вне левой полуплоскости помимо полюсов на положительной действительной оси подынтегральная функция в (1.33) имеет также бесконечное множество полюсов, расположенных на мнимой оси. В самом деле, подстановка $\xi = i\eta$ ($\eta \in \mathbb{R}$) в (1.34) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & (-\cos E\eta \cos E_1\eta + (1 - \varepsilon) \sin E\eta \sin E_1\eta) \eta^2 + \\ & + \sin(E + E_1)\eta \cdot \eta - \varepsilon \sin E\eta \sin E_1\eta = 0, \end{aligned}$$

имеющему счетное множество действительных решений при любом значении отношения $\beta = E_1/E$.

Вернемся к формуле (1.33) для величины возвышения свободной поверхности. Воспользовавшись тождеством $\cos X\xi \equiv (e^{iX\xi} + e^{-iX\xi})/2$, представим (1.33) в следующем виде:

$$Z(X) = \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi \right) = \\ = \lim_{M_1 \rightarrow +\infty} (J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1)),$$

где

$$F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \times \\ \times \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(E_1 - E_0)\xi}{\operatorname{ch} E\xi \operatorname{ch} E_1\xi \{ \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi) \}}.$$

Вначале рассмотрим случай положительных X и исследуем функцию $J_1(X, M_1)$. Для получения решения, затухающего вверх по потоку, сместим контур интегрирования в формуле для $J_1(X, M_1)$ в нижнюю полуплоскость, то есть будем понимать J_1 как следующий предел:

$$J_1(X, M_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi.$$

С целью вычисления $Z_1(X, M_1, \varepsilon_1)$ рассмотрим вспомогательный контур Γ^+ , состоящий из отрезка $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + M_1]$, дуги C_R^+ окружности радиуса $R = \sqrt{M_1^2 + \varepsilon_1^2}$, соединяющей точку $-i\varepsilon_1 + M_1$ с точкой iR , n полуокружностей c_j т.е. $|\xi - i\eta_j| = \varepsilon_1$, $\operatorname{Re} \xi \geq 0$, и системы отрезков

$$d = [-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)] \bigcup_{j=1}^{n-1} [i(\eta_j + \varepsilon_1); i(\eta_{j+1} - \varepsilon_1)] \bigcup [i(\eta_n + \varepsilon_1); iR],$$

соединяющих соответствующие точки этих полуокружностей, принадлежащие мнимой оси, а также отрезков $[-i\varepsilon_1; i(\eta_1 - \varepsilon_1)]$ и $[i(\eta_n + \varepsilon_1); iR]$ (рис. 1.10, а). Здесь $i\eta_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — все полюса функции $F(\xi)$, расположенные в верхней полуплоскости на мнимой оси и удовлетворяющие неравенству $\eta_j < R$. Обозначим через ξ_j действительные положительные полюса функции $F(\xi)$, а через s — их количество ($0 \leq s \leq 2$). Поскольку

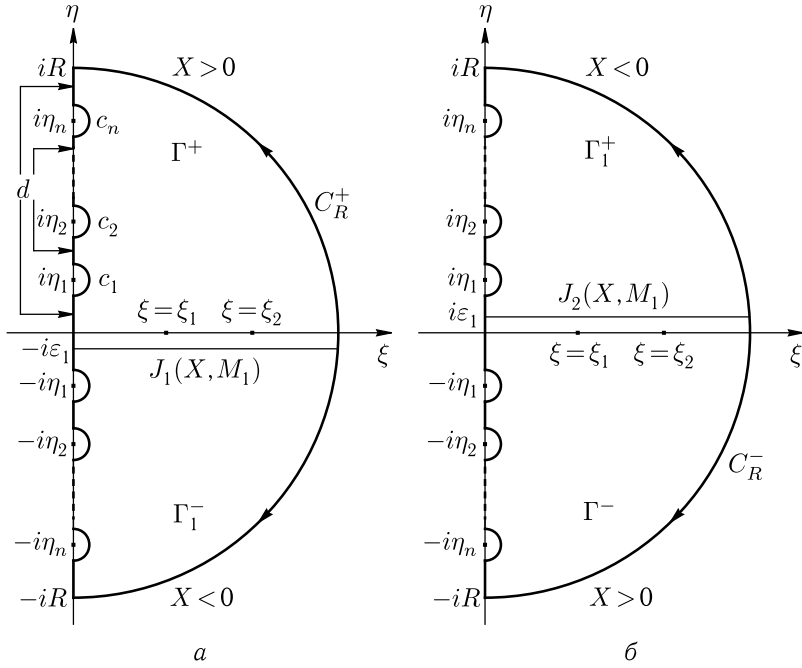


Рис. 1.10. Контуры интегрирования, используемые для вычисления J_1 и J_2

внутри контура Γ^+ $F(\xi)$ регулярна всюду (за исключением особых точек ξ_j), то по основной теореме теории вычетов имеем [181]:

$$\int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{i\xi_j X}. \quad (1.41)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi &= \int_{-i\varepsilon_1}^{-i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \\ &\quad - \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (1.42)$$

где l — система отрезков d , повернутая на угол $\pi/2$ по часовой стрелке относительно начала координат (то есть l лежит на

действительной оси). Сравнивая (1.41) и (1.42), находим, что

$$Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) = \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{i\xi_j X} + \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \frac{1}{2} \int_{C_R^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi + \frac{1}{2} \int_l F(i\eta) e^{-X\eta} d\eta. \quad (1.43)$$

Обратимся теперь к интегралу $J_2(X, M_1) = \frac{1}{2} \int_0^{M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi$.

Сместив контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, будем искать $J_2(X, M_1)$ как предел

$$J_2(X, M_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} Z_2(X, M_1, \varepsilon_1) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{i\varepsilon_1}^{i\varepsilon_1 + M_1} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi.$$

Рассматривая вспомогательный контур Γ^- , симметричный Γ^+ относительно действительной оси (и ориентированный по часовой стрелке (рис. 1.10, б)), можно показать, что

$$Z_2(X, M_1, \varepsilon_1) = -\pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) e^{-i\xi_j X} - \frac{\pi i}{2} \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \frac{1}{2} \int_{C_R^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_l F(-i\eta) e^{-X\eta} d\eta, \quad (1.44)$$

где C_R^- — дуга окружности, симметричная дуге C_R^+ . Теперь сложим почленно (1.43) и (1.44) и в полученном соотношении устремим величину ε_1 к нулю. Принимая во внимание, что $F(\xi)$ — четная функция и $\operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) = -\operatorname{res}_{\xi=-i\eta_j} F(\xi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), в результате придем к следующему равенству:

$$\begin{aligned} J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (Z_1(X, M_1, \varepsilon_1) + Z_2(X, M_1, \varepsilon_1)) = \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{C_{M_1}^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi - \frac{1}{2} \int_{C_{M_1}^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Поскольку в силу леммы Жордана [181]

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \int_{C_{M_1}^+} F(\xi) e^{iX\xi} d\xi = 0, \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \int_{C_{M_1}^-} F(\xi) e^{-iX\xi} d\xi = 0,$$

то, переходя в (1.45) к пределу при $M_1 \rightarrow \infty$, заключаем, что при $X > 0$

$$\begin{aligned} Z(X) &= \lim_{M_1 \rightarrow \infty} (J_1(X, M_1) + J_2(X, M_1)) = \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) \sin \xi_j X + \pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{-\eta_j X}. \end{aligned}$$

В этой формуле первое слагаемое задает волновую структуру поверхностных возмущений, а второе соответствует неволновой части возмущений свободной границы, затухающей вниз по потоку. Для вычисления волновой составляющей поверхностных возмущений $W(X)$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} g_1(\xi, E, \gamma, \beta) &= \frac{\xi^2 \operatorname{ch}(\beta - \gamma) E \xi}{\operatorname{ch} E \xi \operatorname{ch} \beta E \xi}, \quad g_2(\xi, \varepsilon, E, \beta) = \\ &= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E \xi \operatorname{th} \beta E \xi - \xi(\operatorname{th} E \xi + \operatorname{th} \beta E \xi), \end{aligned}$$

где $\gamma = h/H = E_0/E$. Тогда $F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \frac{g_1}{g_2}$, а поскольку $F(\xi)$ имеет в точках $\xi = \xi_j$ полюса первого порядка, то $\operatorname{res}_{\xi=\xi_j} F(\xi) = \frac{ME}{\pi} \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)}$ и

$$W(X) = -2ME \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (1.46)$$

Связывая найденное выражение для $W(X)$ с условиями (1.39)–(1.40) наличия у уравнения (1.34) положительных решений, получаем, что при $E > E_{cr}^{\text{BH}}$ искомые волновые возмущения представляют собой сумму двух мод — внутренней (то есть возникающей благодаря неоднородности жидкости) и поверхностной (за счет непосредственного обтекания препятствия), причем первая соответствует меньшему корню ξ_1 , а вторая — большему ξ_2 . Если $E_{cr}^{\text{пов}} < E < E_{cr}^{\text{BH}}$, то $W(X)$ состоит из одной лишь поверхностной моды; при $E < E_{cr}^{\text{пов}}$ поверхностные волны за обтекаемым препятствием не образуются и $W(X) \equiv 0$.

Следовательно, внутренняя мода возникает при $E > E_{cr}^{BH}$, а поверхностная — при $E > E_{cr}^{пов}$. Отсюда ясно, что величины E_{cr}^{BH} и $E_{cr}^{пов}$ суть значения параметра E при скорости набегающего потока V , равной максимально возможной фазовой скорости соответственно внутренней и поверхностной моды. А поскольку при $E \rightarrow E_{cr}^{BH}$ или $E \rightarrow E_{cr}^{пов}$ один из положительных корней уравнения (1.34) стремится к нулю, то критические значения E отвечают фазовым скоростям длинных волн.

Для дальнейшего представляется удобным переписать полученные результаты в терминах введенного выше числа Фруда $\mathbf{F}$. Так как $E = 1/\mathbf{F}^2$, то из (1.39) и (1.40) следует, что внутренняя мода существует при

$$\mathbf{F} < \mathbf{F}_{cr}^{BH} = \sqrt{\frac{\beta + 1 - \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2}}, \quad (1.47)$$

а поверхностная — при

$$\mathbf{F} < \mathbf{F}_{cr}^{пов} = \sqrt{\frac{\beta + 1 + \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4\varepsilon\beta}}{2}}. \quad (1.48)$$

Очевидно, что $\mathbf{F}_{cr}^{BH} < \mathbf{F}_{cr}^{пов}$, то есть поверхностная мода образуется в более широком диапазоне чисел Фруда (или, что то же самое, скоростей потока), нежели внутренняя. Волновая часть возмущений свободной границы запишется следующим образом:

$$W(X) = -2ME \sum_{j=1}^s \frac{q_1(\xi, \mathbf{F}, \gamma, \beta)}{\partial q_2(\xi, \varepsilon, \mathbf{F}, \beta)/\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_j} \sin \xi_j X,$$

где функции

$$q_1(\xi, \mathbf{F}, \gamma, \beta) = \frac{\xi^2 \operatorname{ch}((\beta - \gamma)\xi/\mathbf{F}^2)}{\operatorname{ch}(\xi/\mathbf{F}^2) \operatorname{ch}(\beta\xi/\mathbf{F}^2)}$$

и

$$\begin{aligned} q_2(\xi, \varepsilon, \mathbf{F}, \beta) &= \\ &= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th}(\xi/\mathbf{F}^2) \operatorname{th}(\beta\xi/\mathbf{F}^2) - \xi(\operatorname{th}(\xi/\mathbf{F}^2) + \operatorname{th}(\beta\xi/\mathbf{F}^2)) \end{aligned}$$

получаются из $g_1(\xi, E, \gamma, \beta)$ и $g_2(\xi, \varepsilon, E, \beta)$ подстановкой $E = 1/\mathbf{F}^2$.

Рассмотрим теперь интеграл (1.33) при $X < 0$. На этот раз для вычисления $J_1(X, M_1)$ будем использовать вспомогательный контур Γ_1^- , представляющий собой объединение горизонтального отрезка $[-i\varepsilon_1; -i\varepsilon_1 + M_1]$ и расположенной под ним части контура Γ^- (рис. 1.10, а), а для вычисления $J_2(X, M_1)$ — контур Γ_1^+ , симметричный контуру Γ_1^- относительно действительной оси (рис. 1.10, б). Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были изложены выше применительно к случаю $X > 0$, получим для величины отклонения свободной поверхности от ее равновесного положения формулу

$$Z(X) = \pi i \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\xi=i\eta_j} F(\xi) e^{\eta_j X},$$

показывающую, что поверхностные возмущения перед обтекаемым препятствием имеют непериодический затухающий характер.

2. Препятствие в верхнем слое. Далее в той же постановке исследуем задачу о генерировании волновых возмущений свободной поверхности препятствием, которое моделируется точечным диполем с моментом m , расположенным в верхнем слое двухслойного потока несжимаемой жидкости (рис. 1.11). Все обозначения сохраним теми же, что и в предыдущем случае. Поместим диполь в точку $z = ih$ ($0 < h < H$), а комплексно-сопряженную скорость в j слое μ_j ($j \in \{1, 2\}$), как и ранее, представим в виде $\mu_j = V + U_j$. Математическая формулировка исходной задачи выглядит следующим образом: найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.25)–(1.28); при этом $U_1(z)$ должна быть регулярна в полосе $0 < \operatorname{Im} z < H$ (за исключением полюса второго порядка в точке $z = ih$)

$$U_1 = \frac{m}{2\pi} \left[-\frac{1}{(z + ih)^2} + \int_0^{\infty} [A(k)e^{ikz} + B(k)e^{-ikz}] dk \right], \quad (1.49)$$

а $U_2(z)$ регулярна в полосе $-H_1 < \operatorname{Im} z < 0$,

$$U_2 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [C(k)e^{ikz} + D(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.50)$$

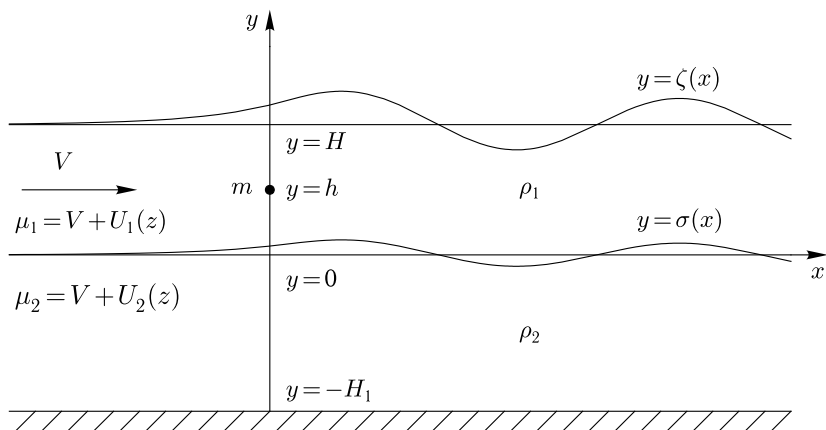


Рис. 1.11. Обтекание диполя, локализованного в верхнем слое двух-
слойного потока

где функции $A(k), B(k), C(k)$ и $D(k)$ подлежат определению. С помощью соотношения

$$-\frac{1}{(z - ih)^2} = \begin{cases} \int_0^{\infty} k e^{kh} e^{ikz} dk, & \text{если } y > h, \\ \int_0^{\infty} k e^{-kh} e^{-ikz} dk, & \text{если } y < h, \end{cases}$$

перепишем выражение для комплексно-сопряженной скорости $U_1(z)$ в областях верхнего слоя, расположенных соответственно выше и ниже диполя:

$$U_1(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [(k e^{kh} + A(k)) e^{ikz} + B(k) e^{-ikz}] dk, & \text{если } y > h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(k) e^{ikz} + (k e^{-kh} + B(k)) e^{-ikz}] dk, & \text{если } y < h. \end{cases} \quad (1.51)$$

Подстановка формул (1.50)–(1.51) в граничные условия (1.25)–(1.28) приводит к неоднородной системе линейных уравнений

относительно функций $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ и $D(k)$:

$$\begin{cases} (k + \nu)e^{-kH}A + (k - \nu)e^{kH}B = -k(k + \nu)e^{k(h-H)}, \\ \delta(k + \nu)A + \delta(k - \nu)B - (k + \nu)C - (k - \nu)D = -\delta k(k - \nu)e^{-kh}, \\ A - B - C + D = ke^{-kh}, \\ e^{kH_1}C - e^{-kH_1}D = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем следующие выражения для $A(k)$ и $B(k)$:

$$A(k) = \frac{k[(\delta k + (1 - \delta)\nu) \operatorname{th} kH_1 - k][\nu \operatorname{ch} k(H - h) - k \operatorname{sh} k(H - h)]}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}},$$

$$B(k) = \frac{k(k + \nu)e^{-kH} \{[(1 - \delta)\nu \operatorname{ch} kh - \delta k \operatorname{sh} kh] \operatorname{th} kH_1 - k \operatorname{ch} kh\}}{\operatorname{ch} kH \{k^2 + [\delta k^2 + (1 - \delta)\nu^2] \operatorname{th} kH \operatorname{th} kH_1 - k\nu(\operatorname{th} kH + \operatorname{th} kH_1)\}}.$$

Далее из (1.21) и (1.49) находим, что

$$\zeta(x) = \frac{Vm}{2\pi g} \left[\frac{x^2 - (H - h)^2}{(x^2 + (H - h)^2)^2} - \int_0^\infty (A(k)e^{-kH} + B(k)e^{kH}) \cos kx \, dk \right].$$

Совершив в этом равенстве переход к безразмерным переменным (1.32), запишем полученную формулу для величины возвышения свободной границы в следующем виде:

$$Z(X) = \frac{ME}{2\pi} \frac{X^2 - (E - E_0)^2}{(X^2 + (E - E_0)^2)^2} + J(X),$$

где

$$J(X) = -\frac{ME}{2\pi} \int_0^\infty \frac{g_1(\xi, E, E_0, E_1, \varepsilon)}{g_2(\xi, E, E_1, \varepsilon)} \cos X\xi \, d\xi, \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} g_1(\xi, E, E_0, E_1, \varepsilon) &= \xi \left\{ e^{-E\xi} [((1 - \varepsilon)\xi + \varepsilon) \operatorname{th} E_1\xi - \xi] \times \right. \\ &\quad \times [\operatorname{ch}(E - E_0)\xi - \xi \operatorname{sh}(E - E_0)\xi] + (\xi + 1) \times \\ &\quad \times \{ [\varepsilon \operatorname{ch} E_0\xi - (1 - \varepsilon)\xi \operatorname{sh} E_0\xi] \operatorname{th} E_1\xi - \xi \operatorname{ch} E_0\xi \} \} / \operatorname{ch} E\xi, \\ g_2(\xi, E, E_1, \varepsilon) &= \xi^2 + [(1 - \varepsilon)\xi^2 + \varepsilon] \operatorname{th} E\xi \operatorname{th} E_1\xi - \xi(\operatorname{th} E\xi + \operatorname{th} E_1\xi). \end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральные выражения в (1.33) и (1.52) имеют одни и те же полюса, расположенные на положительной действительной оси. Поэтому волновая структура возмущений

свободной поверхности, возникающих при обтекании препятствия над слоем скачка, будет определяться тем же количеством мод и теми же волновыми числами, что и в рассмотренном выше случае его локализации под слоем скачка. Следовательно, критерии существования внутренней и поверхностной мод останутся неизменными (см. (1.39)–(1.40) или (1.47)–(1.48)).

Вычисляя интеграл $J(X)$ по той же схеме, что и в предыдущей задаче, получим следующее выражение для волновой части поверхностных возмущений за обтекаемым препятствием (то есть при $X > 0$):

$$W(X) = ME \sum_{j=1}^s \frac{g_1(\xi_j)}{g_2'(\xi_j)} \sin \xi_j X. \quad (1.53)$$

Здесь, как и выше, ξ_j — положительные корни уравнения (1.34), а s — их количество.

1.2.2. Анализ и численные расчеты для реальных условий моря

Механизм генерации поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводного препятствия двухслойным потоком бесконечной глубины, проанализирован в разд. 1.1. В рассматриваемой задаче с конечной глубиной потока подобный механизм аналогичен. Однако поиск аналитических выражений, описывающих волновую структуру поверхностных возмущений (1.46) и (1.53), и их анализ в этом случае оказались существенно сложнее.

Расчеты амплитуд возмущений велись при значениях характеристик среды, соответствующих реальным условиям моря. Так, плотность верхнего слоя $\rho_1 = 1023 \text{ кг/м}^3$, а плотность нижнего выбиралась начиная с $\rho_2 = 1024 \text{ кг/м}^3$ и больше. Таким значениям плотностей соответствует минимальное значение параметра ε , равное 0,001. Момент диполя m был выбран пропорциональным скорости потока V : $m/V = 1600 \text{ м}^2$. Невозмущенное положение скачка плотности соответствовало глубинам $H = 50 \text{ м}$ и $H = 70 \text{ м}$, а локализация препятствия (диполя) ограничивалась тремя горизонтами: $h = 7,4$ и 1 м как над скачком, так

и под ним. Отметим, что задание условия $m/V = \text{const}$ продиктовано желанием сделать геометрию моделируемого диполем препятствия независимой от скорости течения V при его значительном удалении от свободной поверхности, слоя скачка и дна бассейна. Действительно, в плоском безграничном потоке однородной жидкости диполь с моментом m моделирует круговой цилиндр [182], радиус которого $r = \sqrt{m/(2\pi V)}$ не зависит от V , если $m/V = \text{const}$. Ясно, что в случае двухслойного потока конечной глубины наличие свободной границы, поверхности раздела плотностей и дна будет оказывать искажающее влияние на форму тела, моделируемого диполем; однако, если диполь удален на достаточно большое расстояние от указанных поверхностей, то это влияние будет пренебрежимо малым.

На рис. 1.12–1.14 для случая $H = 50$ м, $h = 4$ м приведены графики зависимости амплитуд поверхностных волн B от скорости набегающего потока V при различных значениях параметров ε и β . Прежде всего на этих графиках видно, что возмущения за счет внутренней и поверхностной мод проявляются на интервалах скорости потока, существенно разнесенных между собой, $0 - V_{cr}^{BH}$ и $6,5 - 8,5$ м/с соответственно, далее, выходя из области линейности задачи (при больших скоростях поверхностные волны перестают корректно описываться теорией малых возмущений). В первом интервале (при меньших скоростях) «работает» внутренняя мода, во втором — поверхностная. Причем для внутренней моды в соответствии с критерием ее возникновения (1.39) (или (1.47)) характерно расширение диапазона существования при увеличении мощности слоя скачка плотности ε . В целях наглядности сравнения амплитуд $B(V)$ при обтекании препятствия потоками бесконечной и конечной глубины графики на рис. 1.12–1.14 представлены парами (соответственно слева и справа). Результаты расчетов амплитуды внутренней моды для случая локализации диполя под слоем скачка и над ним приведены на рис. 1.12 и 1.13 соответственно. Пары графиков построены для трех значений мощности скачка ε , а правые графики — для шести значений параметра β ($\varepsilon \in \{0,001; 0,002; 0,004\}$, $\beta \in \{0,5; 1; 3; 5; 10; 25\}$). Для каждого

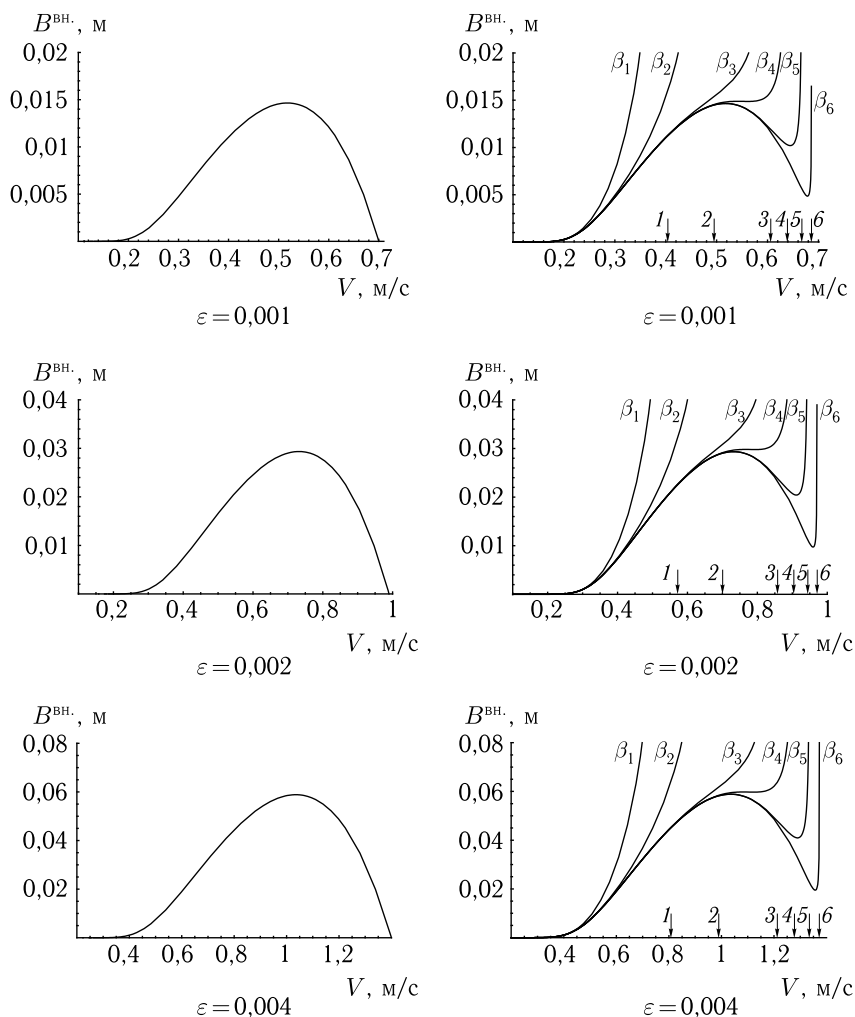


Рис. 1.12. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия под слоем скачка плотности при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах для шести значений параметра β (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев двухслойной жидкости): $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 10$, $\beta_6 = 25$

значения β стрелкой с цифрой, равной номеру индекса у β , указано значение критической скорости (максимальной скорости потока V , при которой возникает внутренняя мода). Как видно, в морских условиях ее величина не превышает 1–1,5 м/с

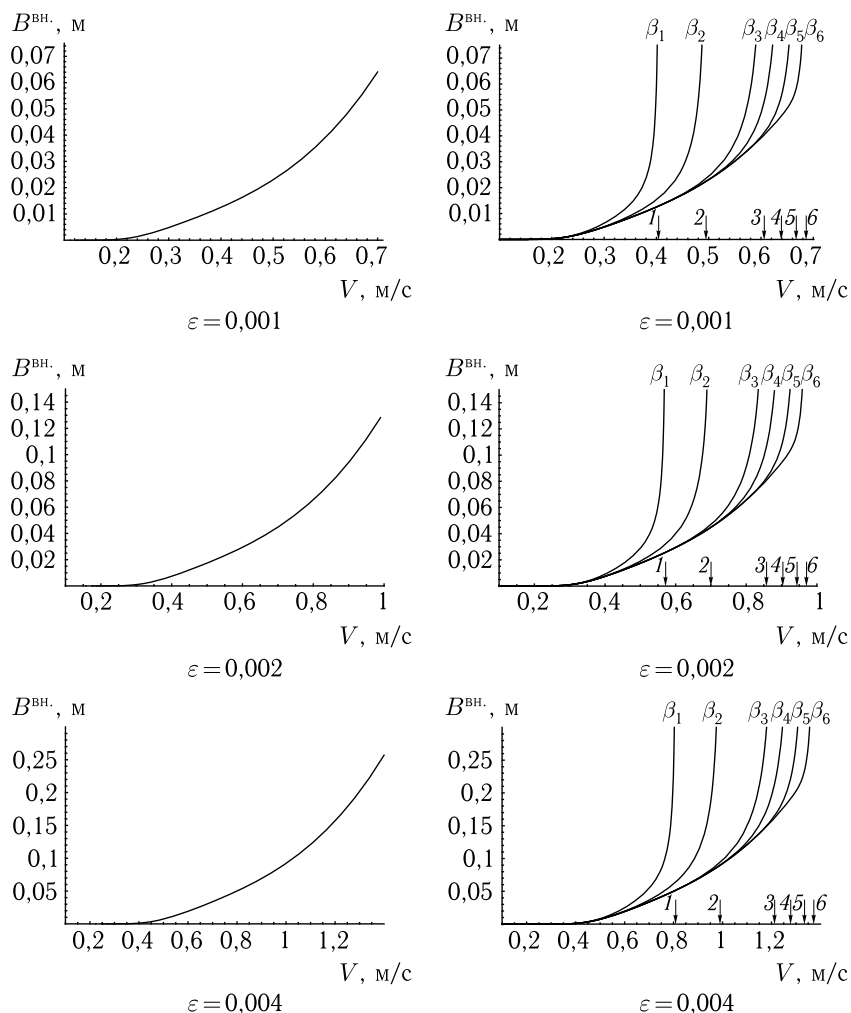


Рис. 1.13. Амплитуды внутренней моды поверхностных возмущений при обтекании препятствия над слоем скачка плотности при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах для шести значений параметра β (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев двухслойной жидкости): $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 10$, $\beta_6 = 25$

Для поверхностной моды верхняя пара графиков соответствует обтеканию препятствия под слоем скачка, а нижняя — над ним. При этом величины ε были выбраны теми же самыми, что и в случае внутренней моды.

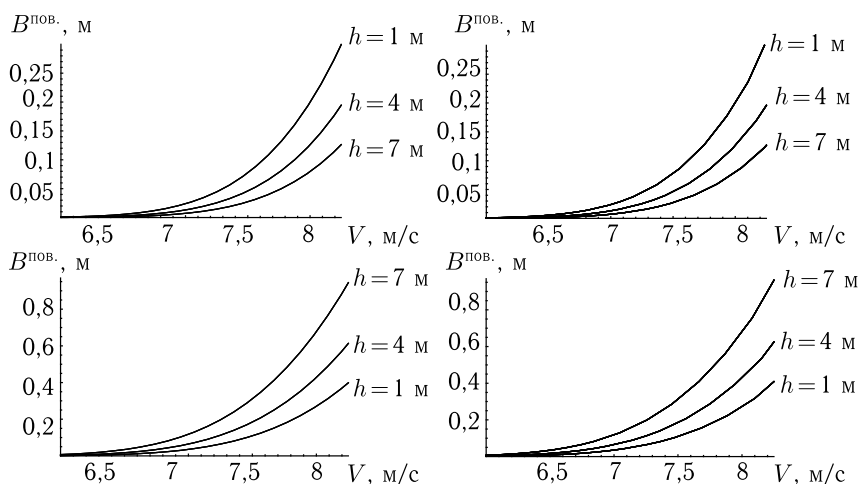


Рис. 1.14. Амплитуды поверхностной моды при обтекании препятствия под слоем скачка плотности (верхняя пара графиков) и над ним (нижняя пара)

По качественному характеру зависимости $B(V)$ и значениям самих амплитуд две моды — внутренняя $B^{\text{вн}}(V)$ и поверхностная $B^{\text{пов}}(V)$ — существенно отличаются друг от друга. Различия проявляются и «внутри» каждой из мод в зависимости от локализации препятствия относительно скачка плотности (сверху или снизу), глубины слоя скачка и глубины погружения препятствия. Так, для внутренней моды, как и ожидалось, наблюдается существенная зависимость ее амплитуды от мощности скачка плотности (рис. 1.12–1.13), и такая зависимость проявляется при условии как бесконечной, так и конечной глубины потока.

Внутренние моды отличаются еще одной характерной особенностью. Так, на рис. 1.12 в случае бесконечной глубины внутренняя мода представлена одной кривой $B^{\text{вн}}(V)$, а при конечной глубине — множеством кривых $B_j^{\text{вн}}(V) = B^{\text{вн}}(\beta_j, V)$, соответствующих разным значениям $H_1^{(j)}$ или $\beta_j = H_1^{(j)}/H$. Как видно, если $\beta \rightarrow +\infty$, то при любом значении скорости V , находящемся внутри диапазона существования внутренней моды в бесконечно глубоком потоке, амплитуда внутренней моды в потоке конечной глубины $B^{\text{вн}}(\beta, V)$ стремится к своему соответствующему

значению $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ для случая бесконечной глубины. В то же время правые концы кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$ из определенных точек вблизи кривой $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ резко «срываются» вверх и уходят на бесконечность. В окрестностях таких точек линейная теория становится неприменимой для описания поверхностных волн. Кроме того, результаты расчетов свидетельствуют о том, что при фиксированном значении скорости течения V с ростом параметра β амплитуда внутренней моды монотонно убывает. При фиксированном значении β зависимость $B = B(V)$ может иметь как монотонный (возрастающий, если $\beta < 3$), так и немонотонный характер (если $\beta > 3$). Таким образом, сравнение результатов решения задач об обтекании диполя потоками бесконечной и конечной глубины показало, что в последнем случае как амплитуда внутренней моды, так и диапазон скоростей, внутри которого она возникает, существенным образом зависят от параметра $\beta_j = H_1^{(j)}/H$ (или толщины нижнего слоя $H_1^{(j)}$ при фиксированном значении толщины верхнего).

Аналогичный характер изменения кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$ проявляется при сравнении их в условиях конечного и бесконечного по глубине потоков и в случае локализации препятствия над скачком плотности (рис. 1.13). Здесь, как и для первой задачи, внутренняя мода на правых графиках представлена множеством кривых $B_j^{\text{BH}}(V)$, соответствующих разным значениям β_j . На этих графиках видно, как и выше, что при $\beta \rightarrow \infty$ амплитуда внутренней моды $B^{\text{BH}}(\beta, V)$ стремится к соответствующему значению $B_{\infty}^{\text{BH}}(V)$ для случая бесконечно глубокого потока. Кроме того, очевидно, что при конечной глубине потока диапазон существования внутренней моды и ее амплитуда зависят от параметра $\beta_j = H_1^{(j)}/H$. Однако в данном случае зависимость амплитуды волны от скорости течения является монотонно возрастающей при любых значениях β .

Зависимость амплитуд внутренней моды проявляется и от горизонта залегания скачка плотности H . Так, расчеты $B_j^{\text{BH}}(V)$ для двух разных глубин его локализации ($H = 50$ м и $H = 70$ м) показали, что углубление скачка приводит к существенному уменьшению амплитуд поверхностных возмущений.

Анализируя поверхностную моду и поведение ее амплитуд $B_j^{\text{пов}}(V)$ — пары графиков на рис. 1.14 — отметим, что проявление такой моды обусловлено наличием в потоке свободной границы. Величина ее амплитуды практически не зависит от мощности слоя скачка плотности ε (в диапазоне значений ε , характерном для реальных морских условий), что было проверено расчетами $B_j^{\text{пов}}(V)$ при разных значениях ε . В этом случае глубинные возмущения при выходе на поверхность «не замечают» плотностную неоднородность. Аналогичные расчеты показывают, что амплитуда поверхностной моды также не зависит и от толщины нижнего слоя (при $\beta > 0,5$). Кривые $B_j^{\text{пов}}(V)$ на левом и правом графиках рис. 1.14 практически идентичны как по форме, так и по значениям их амплитуд, то есть наличие у потока нижней границы влияет на результаты расчетов весьма незначительно. В то же время сравнение значений амплитуд волн $B_j^{\text{пов}}(V)$, возникающих при обтекании препятствия, расположенного над и под скачком плотности соответственно, показывает существенное (в несколько раз) различие между ними. На первый взгляд представляется, что скачок плотности оказывает сильно экранирующий эффект на распространение вверх возмущений. Однако, как показали расчеты, ослабление поверхностных волн в основном связано с увеличением глубины обтекаемого препятствия и практически не зависит от ε , на что указывают представленные на графиках кривые $B_j^{\text{пов}}(V)$, полученные для расчетных горизонтов его локализации $h = 7$ м, 4 м и 1 м относительно слоя скачка плотности, то есть поверхностная мода возникает непосредственно за счет обтекания препятствия.

Заканчивая анализ поведения амплитуд поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий, следует указать на особую роль в их формировании скорости потока. Как видно из графиков, представленных на рис. 1.12–1.14, волновые возмущения на свободной границе в относительно широком промежуточном интервале изменения скорости V визуально отсутствуют, то есть этот интервал является зоной, закрытой для выхода глубинных возмущений на поверхность воды. Она простирается от максимального значения скорости потока V ,

при котором в бесконечно глубоком потоке возникает внутренняя мода ($V_{кр.}$, определяемого формулой (1.10)) до тех значений V , при которых амплитуды уже поверхностных мод значимы. Следуя терминологии, принятой в морской гидроакустике, такой интервал можно определить как «зону тени» подобных гидродинамических возмущений.

Наряду с амплитудами поверхностных волн рассчитывались также их длины: $L^{вн} = 2\pi V^2/(g\xi_1)$ и $L^{пов} = 2\pi V^2/(g\xi_2)$, где ξ_1 и ξ_2 — соответственно меньший и больший корни уравнения (1.34). Из этого уравнения следует, что для обеих мод длина волны (в отличие от амплитуды) не зависит от локализации препятствия. Результаты расчетов при $H = 50$ м для внутренней и поверхностной моды представлены соответственно на рис. 1.15 и рис. 1.16. При этом на рис. 1.15 стрелками, как и выше, обозначены критические скорости. На каждом рисунке слева изображены графики зависимости длины волны от скорости потока V для случая бесконечной глубины, а справа — для случая конечной глубины. Расчеты длин волн проводились при тех же значениях параметров ε и β , что и расчеты их амплитуд (то есть $\beta \in \{0,5; 1; 3; 5; 10; 25\}$ для внутренней моды, $\beta \in \{0,5; 2; 10\}$ — для поверхностной, $\varepsilon \in \{0,001; 0,002; 0,004\}$ для обеих мод).

Что касается зависимости длины волны внутренней моды $L^{вн}$ от скорости потока V , то она в целом аналогична рассмотренной выше зависимости ее амплитуды от V в случае обтекания препятствия, локализованного над скачком плотности. Для каждого значения β длина волны монотонно возрастает, резко увеличиваясь при приближении V к своему критическому значению. В то же время при фиксированном значении V длина волны уменьшается с увеличением толщины нижнего слоя (то есть при возрастании β) и стремится к своему предельному значению для случая потока бесконечной глубины при $\beta \rightarrow \infty$.

Для поверхностной моды длина волны в случае потока бесконечной глубины $L^{пов} = 2\pi V^2/g$ не зависит от мощности скачка ε (левый график). А в случае потока конечной глубины кривые на правых графиках, соответствующие девяти парам значений ε и β , сливаются. Это указывает на то, что длина волны по-

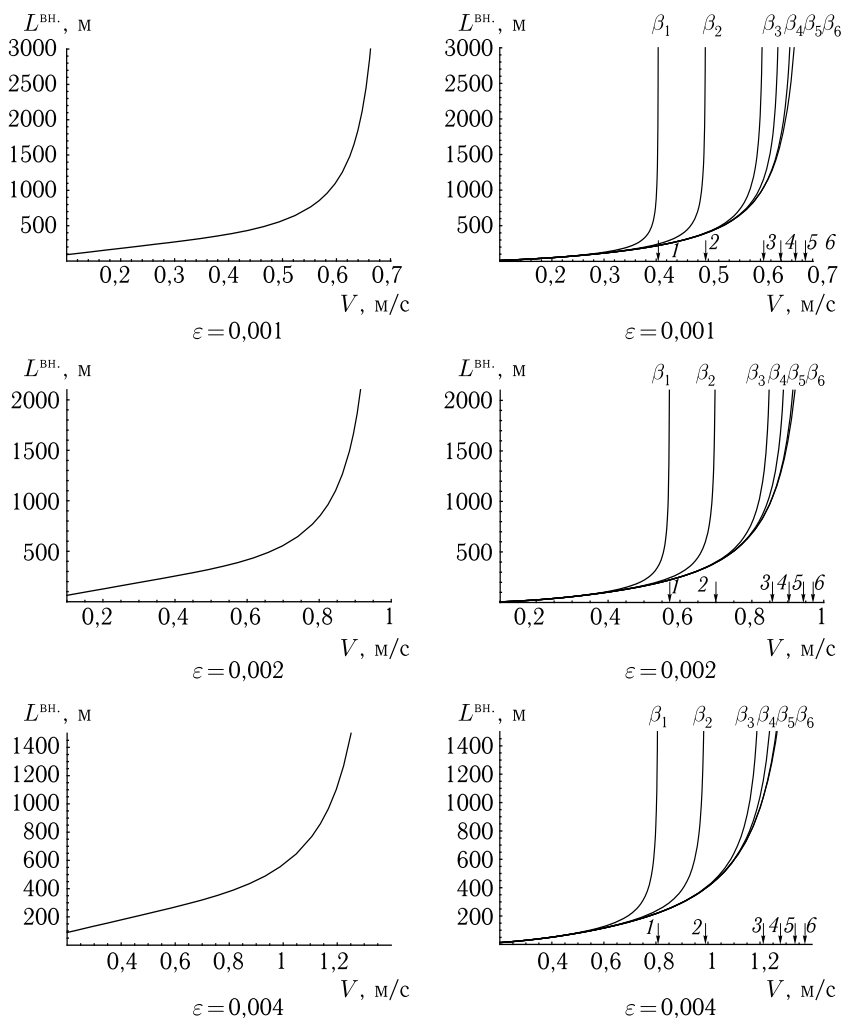


Рис. 1.15. Длины волн внутренней моды поверхностных возмущений, возникающих за обтекаемым двухслойной жидкостью препятствием, при бесконечной (левые графики) и конечной (правые) глубинах потока для шести значений параметра β (соотношения толщин нижнего и верхнего слоев): $\beta_1 = 0,5$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$, $\beta_5 = 10$, $\beta_6 = 25$

верхностной моды практически не зависят от мощности слоя скачка плотности ε (в диапазоне значений ε , характерном для реальных морских условий) и от соотношения толщин нижнего и верхнего слоев β при $\beta > 0,5$. Таким образом, в этом случае

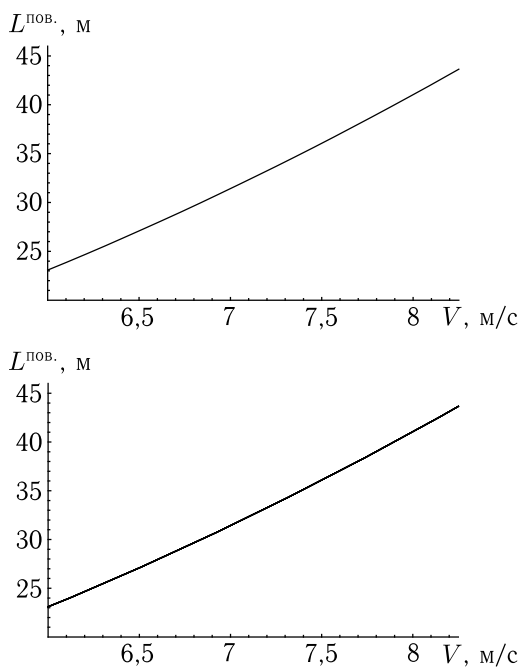


Рис. 1.16. Длины волн поверхностной моды поверхностных возмущений, возникающих за обтекаемым двухслойной жидкостью препятствием, при бесконечной (верхний график) и конечной (нижний) глубинах потока

неоднородность потока и наличие у него нижней границы практически не влияют на параметры поверхностных возмущений.

1.2.3. Заключение

Исследована волновая структура поверхностных возмущений, возникающих при обтекании подводных препятствий потоком двухслойной идеальной жидкости конечной глубины. Показано, что за обтекаемым препятствием возможно образование тех же типов поверхностных волн, что и в случае потока бесконечной глубины. Установлено, что возмущения на свободной границе проявляются на двух разнесенных между собой интервалах скорости потока, а в промежуточной зоне они отсутствуют.

1.3. Волновая реакция при циркуляционном обтекании подводного препятствия двухслойным потоком конечной глубины

1.3.1. Введение

При возведении в морской среде искусственных сооружений необходимо оценивать силовые нагрузки, возникающие при наличии подводных течений. Существующие методики расчетов позволяют найти силы вязкого сопротивления, действующие на различные элементы подводного сооружения.

В реальных условиях для структуры стратификации морской среды характерно присутствие относительно резких перепадов плотности воды, связанных с наличием сезонного термоклина или иных существующих в толще воды скачков плотности. Поэтому обтекаемые потоком элементы конструкции генерируют внутренние волны, вследствие чего возникает дополнительное действие на них волнового сопротивления. Кроме того, в придонных областях моря гидродинамические воздействия на эти конструкции могут усиливаться взвесенесущими (мутьевыми) потоками, возникающими при подъеме со дна твердых микро- и мелкозернистых частиц грунта. Скорости таких потоков могут превышать 1 м/с, а толщины составлять несколько десятков метров. По сравнению с окружающими водами избыток плотности воды в них составляет более $0,01 \text{ г/см}^3$ [183], что может приводить к формированию относительно резкого пикноклина

и возникновению внутренних волн. В этих случаях обтекаемые подводные препятствия могут дополнительно испытывать вполне значимые силовые воздействия. Поэтому представляет интерес исследование влияния стратифицированных течений на обтекаемые препятствия, локализованные вблизи скачка плотности как в нижнем, так и в верхнем слоях потока.

В общем случае обтекание препятствия может происходить с некоторой циркуляцией, которая вносит дополнительный вклад в гидродинамические реакции на подводные конструкции. В настоящем разделе в качестве препятствия в потоке рассматривается диполь, моделирующий поперечное обтекание цилиндра (например, как элемента транспортного трубопровода в морской среде). При этом циркуляция обеспечивается совмещенным с диполем точечным вихрем.

1.3.2. Препятствие в нижнем слое

Рассмотрим двухслойный поток идеальной жидкости, ограниченный горизонтальным дном, стационарно обтекающий цилиндр с круговым сечением радиусом R . Цилиндр моделируется точечным диполем с моментом

$$m = 2\pi V R^2, \quad (1.54)$$

где V — скорость набегающего потока [182], и точечным вихрем, имеющим циркуляцию Γ .

Обозначим толщину верхнего слоя через H , нижнего через H_1 , а их плотности — соответственно через ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Начало координат поместим на невозмущенной границе между слоями жидкости, ось x направим вдоль этой границы, а ось y — вертикально вверх.

Вначале рассмотрим случай, когда диполь и вихрь находятся в точке $(0, -h)$, то есть под границей раздела двух слоев (рис. 1.17). Решение задач осуществляем в рамках теории малых возмущений.

Предполагая течение потенциальным, представим комплексно-сопряженную скорость в каждом из двух слоев потока в виде $\mu_j = V + U_j$, $U_j = u_j - iv_j$ ($j = 1, 2$). Тогда задача об отыскании возмущений скорости U_j , вносимых в поток диполем и вихрем,

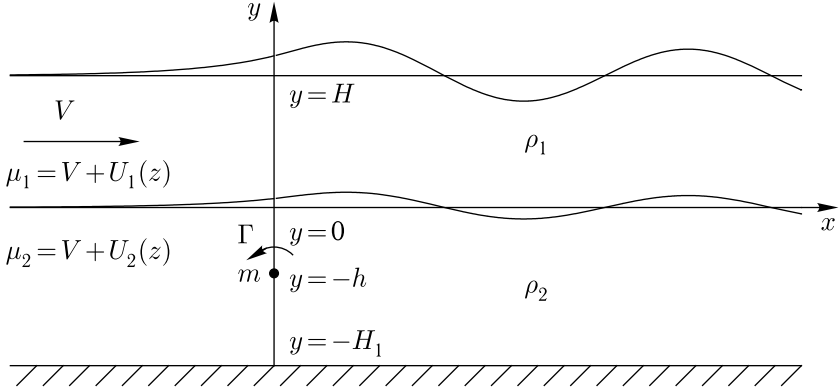


Рис. 1.17. Схема циркуляционного обтекания моделируемого диполем трубопровода, локализованного в нижнем слое двухслойного потока

формулируется следующим образом: найти аналитические функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\operatorname{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = 0, \quad y = H, \quad (1.55)$$

$$\delta \operatorname{Im} \left[i \frac{dU_1}{dz} - \nu U_1 \right] = \operatorname{Im} \left[i \frac{dU_2}{dz} - \nu U_2 \right], \quad y = 0, \quad (1.56)$$

$$\operatorname{Im} U_1 = \operatorname{Im} U_2, \quad y = 0, \quad (1.57)$$

$$\operatorname{Im} U_2 = 0, \quad y = -H_1, \quad (1.58)$$

где $\delta = \rho_1/\rho_2$, $z = x + iy$, $\nu = g/V^2$, g — ускорение свободного падения. Кроме того, $U_1(z)$ должна быть регулярна в полосе $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < H$, а $U_2(z)$ — в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$ всюду (за исключением точки $z = -ih$), в которой $U_2(z)$ имеет полюс второго порядка и где расположены вихрь и диполь:

$$U_2(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + ih)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + f(z),$$

здесь Γ — интенсивность вихря, $f(z)$ — регулярная функция.

Граничное условие (1.55) описывает постоянство давления на свободной поверхности, (1.56) — непрерывность давления

при переходе границы раздела слоев, (1.57) определяет отсутствие потока жидкости через эту границу, а (1.58) является условием непротекания через дно. (Вывод (1.55)–(1.58) приведен в разд. 1.2.)

В силу линейности задачи представим искомую комплексно-сопряженную скорость в виде суммы возмущений комплексно-сопряженной скорости, вносимых в поток точечным вихрем и диполем: $U_j(z) = U_j^\Gamma(z) + U_j^m(z)$ ($j = 1, 2$). Для функций $U_j^\Gamma(z)$ и $U_j^m(z)$ получаем граничные условия, аналогичные (1.55)–(1.58), причем

$$U_2^\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + f_\Gamma(z), \quad (1.59)$$

$$U_2^m(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z + ih)^2} + f_m(z), \quad (1.60)$$

где $f_\Gamma(z)$ и $f_m(z)$ — функции, регулярные в полосе $-\infty < x < +\infty$, $-H_1 < y < 0$, и $f(z) = f_\Gamma(z) + f_m(z)$.

Ищем скорости $U_1^\Gamma(z)$ и $f_\Gamma(z)$, а также $U_1^m(z)$ и $f_m(z)$ в виде их разложения в интеграл Фурье по волновым числам:

$$U_1^\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [A_\Gamma(k)e^{ikz} + B_\Gamma(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.61)$$

$$f_\Gamma(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty [C_\Gamma(k)e^{ikz} + D_\Gamma(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.62)$$

$$U_1^m(z) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [A_m(k)e^{ikz} + B_m(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.63)$$

$$f_m(z) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty k [C_m(k)e^{ikz} + D_m(k)e^{-ikz}] dk, \quad (1.64)$$

где функции $A_\Gamma(k)$, $B_\Gamma(k)$, $C_\Gamma(k)$, $D_\Gamma(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ подлежат определению.

Применив равенство

$$\frac{1}{z + ih} = \begin{cases} -i \int_0^{\infty} e^{-kh} e^{ikz} dk, & y > -h, \\ i \int_0^{\infty} e^{kh} e^{-ikz} dk, & y < -h, \end{cases}$$

получим из (1.59) и (1.62) выражения для функции $U_2^{\Gamma}(z)$ в областях нижнего слоя, находящихся выше и ниже горизонта локализации вихря и диполя:

$$U_2^{\Gamma}(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} [(-e^{-kh} + C_{\Gamma}(k))e^{ikz} + D_{\Gamma}(k)e^{-ikz}] dk, & y > -h, \\ \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} [C_{\Gamma}(k)e^{ikz} + (e^{kh} + D_{\Gamma}(k))e^{-ikz}] dk, & y < -h. \end{cases} \quad (1.65)$$

Аналогично, из (1.60) и (1.64) можно получить интегральное представление для $U_2^m(z)$:

$$U_2^m(z) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} k [(e^{-kh} + C_m(k))e^{ikz} + D_m(k)e^{-ikz}] dk, & y > -h, \\ \frac{m}{2\pi} \int_0^{\infty} k [C_m(k)e^{ikz} + (e^{kh} + D_m(k))e^{-ikz}] dk, & y < -h. \end{cases} \quad (1.66)$$

Подстановка (1.61), (1.65) и (1.63), (1.66) в граничные условия (1.55)–(1.58) приводит к двум системам линейных уравнений относительно функций $A_{\Gamma}(k)$, $B_{\Gamma}(k)$, $C_{\Gamma}(k)$, $D_{\Gamma}(k)$ и $A_m(k)$, $B_m(k)$, $C_m(k)$, $D_m(k)$ соответственно. Решая эти системы,