

ВВЕДЕНИЕ

Комбинация (лат. *combinatio*) — сочетание, соединение в определенном порядке; план; замысел. Комбинировать (итал. *combinare*) — соединять, сочетать, придумывать комбинации¹.

Тема «Комбинации геометрических тел» является одной из самых трудных тем школьного курса геометрии. В предлагаемом пособии содержится необходимый теоретический материал и подробно разобранные задачи. Основной акцент сделан на усиление практического содержания, что дает возможность систематизировать знания по решению стереометрических задач. Приводятся примеры решенных разнообразных задач различной сложности, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы. *Достаточно широко в пособии представлены задачи из вариантов ЕГЭ*, рассматриваются вопросы, которые встречаются в заданиях экзаменов и вызывают затруднения. Пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации обучения стереометрии.

Стандартными комбинациями многогранников и сфер (шаров) являются вписанные в многогранники сферы (шары) и описанные около многогранников сферы (шары). Далее мы будем говорить о сфере, описанной около многогранника, и сфере, вписанной в многогранник. Соответствующие формулировки и утверждения для шара совершенно аналогичны.

Задачи базового и профильного уровня (первая часть), предлагаемые на ЕГЭ по математике, отмечены в пособии (*).

¹ Словарь иностранных слов. 14-е изд., испр. М.: Русский язык, 1987. С. 48.

Глава 1. КОМБИНАЦИИ ПРИЗМ И СФЕР

Решение задач на комбинации сфер с другими телами, как показывает практика, вызывает большие затруднения у учащихся. Эти затруднения связаны с определением положения центра сферы относительно другого тела, входящего в данную комбинацию, и с установлением метрической зависимости между радиусом сферы и элементами тела.

Перед изучением темы о призме, вписанной в сферу и описанной около сферы, следует повторить теоретический материал, связанный с окружностью, вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника.

1.1. ПРИЗМЫ, ОПИСАННЫЕ ОКОЛО СФЕР

Призма называется описанной около сферы, если сфера касается оснований и всех боковых граней призмы. При этом указанная сфера называется *вписанной в призму*.

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру этой окружности. Точки касания сферы с боковыми гранями расположены в плоскости, проходящей через центр сферы перпендикулярно боковым ребрам, и, следовательно, лежат на большой окружности сферы.

Центром вписанной в многогранник сферы является точка пересечения всех биссекторов двугранных углов. *Биссектор*, биссекторная плоскость двугранного угла — плоскость, проходящая через ребро двугранного угла и делящая этот угол пополам².

Замечание. Не в каждом многограннике биссекторы двугранных углов пересекаются в одной точке, значит, не в каждый многогранник можно вписать сферу.

² Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов [и др.]. Т. 1. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. А—Г, 1977. С. 495.

Из вышеизложенного следует, что центр сферы равноудален от всех граней призмы.

В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание.

У всех правильных многогранников существуют вписанные сферы, центры которых находятся в центрах этих многогранников.

Если сфера вписана в прямоугольный параллелепипед, то каждое ребро такого параллелепипеда равно диаметру сферы, т. е. этот параллелепипед является кубом. Центр вписанной сферы совпадает с точкой пересечения диагоналей куба, а ее радиус равен половине ребра куба: $r = \frac{a}{2}$, где r — радиус вписанной сферы, a — ребро куба.

Если в многогранник (в данном случае, в призму) можно вписать сферу радиусом r , то объем этого многогранника равен $V = \frac{1}{3}rS$, где S — площадь полной поверхности многогранника. Примем это утверждение без доказательства.

При решении задач на сферы, вписанные в призмы, делают не стереометрический чертеж (он очень сложен), а выполняют построение перпендикулярного сечения.

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Можно ли вписать сферу в прямоугольный параллелепипед, отличный от куба?

Ответ: нет.

2. Можно ли вписать сферу в наклонный параллелепипед, все грани которого ромбы?

Ответ: нет.

3. Найти радиус сферы, вписанной в единичный куб.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

4. В куб вписана сфера радиуса 1. Найдите ребро куба.

Ответ: 2.

5. Можно ли вписать сферу в наклонную треугольную призму, в основании которой правильный треугольник?

Ответ: нет.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1*. В куб с длиной ребра 6 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .

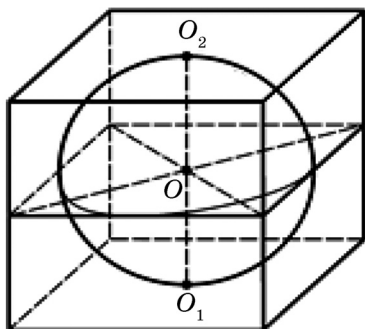


Рис. 1

Решение. Радиус вписанного в куб шара равен половине ребра куба, т. е. 3. Объем шара вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi. \text{ Отсюда } \frac{V}{\pi} = 36.$$

О т в е т: 36.

Задача 2*. В прямоугольный параллелепипед вписана сфера радиуса 5. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Решение. Расстояния между параллельными гранями параллелепипеда равны диаметру сферы и равны ребрам параллелепипеда. Поэтому параллелепипед является кубом, каждое ребро которого равно 10, площадь каждой грани равна 100, а площадь полной поверхности равна $S_{\text{п.п.}} = 100 \cdot 6 = 600$.

О т в е т: 600.

Задача 3*. Вокруг сферы радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Найдите ее объем.

Решение. Центр O вписанной сферы лежит на высоте правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, соединяющей центры ее оснований в точке, одинаково удаленной от оснований призмы и делящей высоту призмы пополам.

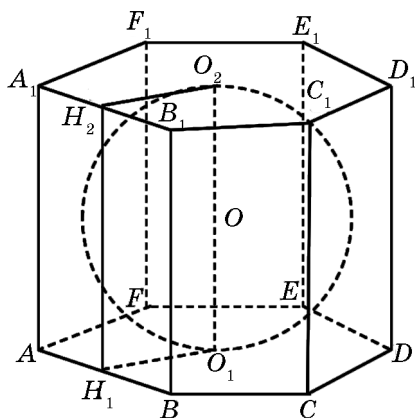


Рис. 2

Радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы. Сторона основания призмы равна $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, а высота призмы — $2R$.

Следовательно, объем призмы $V = 3R \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{3} \cdot 2R = 4\sqrt{3}R^3$.

Ответ: $4\sqrt{3}R^3$.

Задача 4*. Около сферы описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны 6 и 8. Определите полную поверхность параллелепипеда.

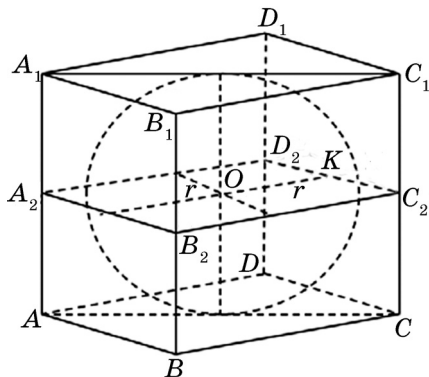


Рис. 3, а

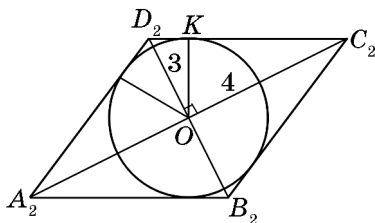


Рис. 3, б

Решение 1. Пусть радиус сферы $OK = r$. Тогда, проведя через центр сферы плоскость, параллельную основанию параллелепипеда, в сечении получим параллелограмм $A_2B_2C_2D_2$, описанный около окружности радиуса r . Так как суммы противоположных сторон такого описанного параллелограмма равны, он является ромбом.

Сторона ромба равна 5, а радиус вписанной окружности равен 2,4 (радиус окружности, вписанной в ромб, равен высоте прямоугольного треугольника, образованного отрезками диагоналей и стороной ромба). Полная поверхность параллелепипеда:

$$S = 2S_o + S_{\text{б.п.}} = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right) + 4 \cdot 5 \cdot 4,8 = 144.$$

Ответ: 144.

Решение 2. Воспользуемся формулой $V = \frac{1}{3}rS$, откуда

$$S = \frac{3V}{r}.$$

$$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = S_{ABCD} \cdot AA_1, \text{ где } S_{ABCD} = \frac{d_1 d_2}{2} \text{ (} d_1 \text{ и } d_2 \text{ — диагонали основания), } AA_1 = 2r. \text{ Итак, } S = \frac{3 \frac{6 \cdot 8}{2} 2 \cdot 2,4}{2,4} = 144.$$

Ответ: 144.

Задача 5. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник со стороной 6. Найдите объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать сферу.

Решение. Пусть O — центр сферы, вписанной в правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, O_1 и O_2 — точки касания сферы с основаниями. Так как в призму можно вписать сферу, то радиус сферы R равен половине высоты призмы, $h = 2R$. Пусть L — точка касания сферы с гранью BB_1C_1C , $OL = O_1K = R$. Задача сводится к нахождению O_1K .

$O_1K = \frac{1}{3}AK$ (по свойству медианы треугольника). Из треугольника ABC находим: $AK = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, $O_1K = \sqrt{3}$, следовательно, $R = \sqrt{3}$ и $h = 2\sqrt{3}$.

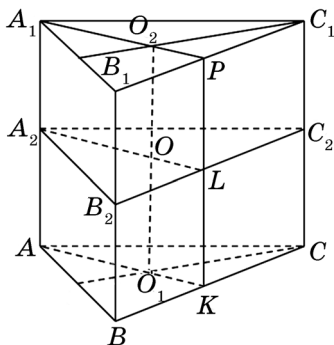


Рис. 4, а

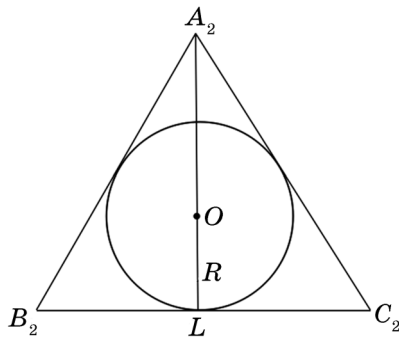


Рис. 4, б

Найдем объем пирамиды: $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_0 \cdot h = \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 54$.

Ответ: 54.

Задача 6. Шар касается всех граней правильной треугольной призмы. Найдите отношение объемов шара и призмы.

Решение. Пусть O — центр шара радиуса R , вписанного в правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, M и M_1 — точки касания шара с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, а D , E и F — с боковыми гранями. Тогда M и M_1 — центры равносторонних треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, а D , E и F — центры прямоугольников AA_1B_1B , BB_1C_1C и AA_1C_1C соответственно.

В сечении призмы плоскостью, проходящей через центр шара параллельно основаниям, получится равносторонний треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$, и вписанный в него круг радиуса R , касающийся сторон A_2B_2 , B_2C_2 и A_2C_2 в точках D , E и F соответственно. Центр O шара лежит на отрезке MM_1 и делит его пополам, значит, $AA_1 = MM_1 = 2R$. Точка O лежит на медиане треугольника

$A_2B_2C_2$ и делит ее в отношении $2 : 1$, считая от C_2 , значит, $C_2D = 3OD = 3R$. Из прямоугольного треугольника OA_2D найдем, что $A_2D = OD \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3}$.

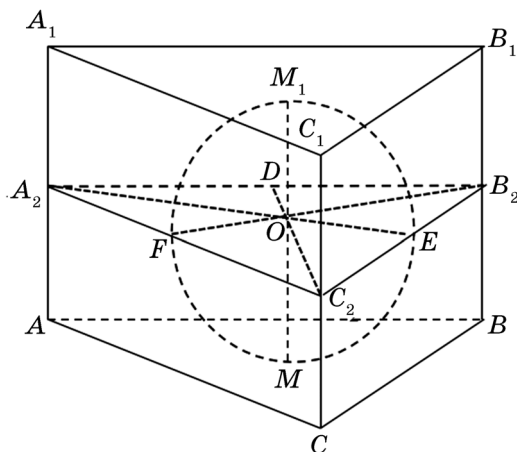


Рис. 5

Значит,

$$S_{ABC} = S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} A_2B_2 \cdot C_2D = R\sqrt{3} \cdot 3R = 3R^2\sqrt{3}.$$

Тогда:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3, V_{\text{призмы}} = S_{ABC} \cdot AA_1 = 3R^2\sqrt{3} \cdot 2R = 6R^3\sqrt{3}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{призмы}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{6R^3\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1*. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .

Ответ: 4,5.

2*. В куб вписан шар радиуса 2. Найдите объем куба.

Ответ: 64.

3*. Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

Ответ: 0,9025.

4*. Найти радиус сферы, вписанной в куб, ребра которого равны 6.

Ответ: 3.

5*. В куб вписан шар радиуса 3. Найдите площадь поверхности куба.

Ответ: 216.

6*. Шар вписан в куб. Найдите радиус шара, если диагональ куба равна $8\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

7*. Шар вписан в куб. Найдите ребро куба, если радиус шара равен $9\sqrt{3}$.

Ответ: 18.

8*. Шар, объем которого равен 36π , вписан в куб. Найдите объем куба.

Ответ: 216.

9*. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1. Найдите его объем.

Ответ: 8.

10*. Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 2. Найдите его объем.

Ответ: 64.

11*. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.

Ответ: 3.

12*. Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 125. Найдите радиус сферы.

Ответ: 2,5.

13. Найдите высоту правильной треугольной призмы и радиус вписанной в нее сферы, если ребро основания призмы равно 1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

14. В правильную треугольную призму вписан шар, касающийся трех граней и обоих оснований призмы. Найдите отношение поверхности шара к полной поверхности призмы.

Ответ: $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

15. В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.

Ответ: $2\sqrt{3}$; 2.

16. В призму, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами, равными 1, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.

Ответ: $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$; $2 - \sqrt{2}$.

17. В призму, в основании которой равнобедренный треугольник со сторонами 2, 3, 3, вписана сфера. Найдите радиус сферы и высоту призмы.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{2}$.

18. Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб со стороной 1 и острым углом 60° . Найдите радиус сферы и высоту призмы.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. Единичная сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб с острым углом 60° . Найдите сторону основания a и высоту призмы h .

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 2.

20. Найдите высоту правильной шестиугольной призмы и радиус вписанной в нее сферы, если сторона основания призмы равна 1.

Ответ: $\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. В правильную шестиугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 2.

22. Около шара радиусом $\frac{\sqrt{3}}{2}$ описана правильная шестиугольная призма. Найдите площадь полной ее поверхности.

Ответ: $9\sqrt{3}$.

1.2. ПРИЗМЫ, ВПИСАННЫЕ В СФЕРЫ

Призма называется вписанной в сферу, если все ее вершины принадлежат этой сфере. Сама сфера при этом называется описанной около призмы.

Для того чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой, а около ее основания можно описать окружность.

Перпендикуляр, опущенный из центра описанной около призмы сферы на ребро призмы, будет делить это ребро как хорду сферы пополам. Кроме того, центр сферы будет проецироваться в центр боковой грани призмы, являющейся прямоугольником.

Около любой прямой правильной призмы можно описать сферу.

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. КОМБИНАЦИИ ПРИЗМ И СФЕР.....	4
1.1. Призмы, описанные около сфер	4
1.2. Призмы, вписанные в сферы	13
1.3. Нестандартные комбинации призм и сфер	19
Глава 2. КОМБИНАЦИИ ПРИЗМ И КОНУСОВ	24
Глава 3. КОМБИНАЦИИ ПРИЗМ И ЦИЛИНДРОВ.....	29
Глава 4. КОМБИНАЦИИ ПИРАМИД И СФЕР	36
4.1. Пирамиды, вписанные в сферы	36
4.2. Усеченные пирамиды, вписанные в сферы	43
4.3. Пирамиды, описанные около сфер	46
4.4. Усеченные пирамиды, описанные около сфер.....	58
4.5. Нестандартные комбинации пирамид и сфер	62
Глава 5. КОМБИНАЦИИ ПИРАМИД И КОНУСОВ	68
5.1. Пирамиды, вписанные в конусы.....	68
5.2. Пирамиды, описанные около конусов.....	73
Глава 6. КОМБИНАЦИИ ПИРАМИД И ЦИЛИНДРОВ.....	82
6.1. Пирамиды, вписанные в цилиндры.....	82
6.2. Пирамиды, описанные около цилиндров	85
Глава 7. МНОГОГРАННИКИ И ПОЛУВПИСАННЫЕ СФЕРЫ..	91
Глава 8. СЛОЖНЫЕ КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И КРУГЛЫХ ТЕЛ.....	99
Приложение. Примеры изображения пирамид, вписанных в сферу и описанных около сферы	108
ЛИТЕРАТУРА.....	111