

ОБ ЭТОМ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ

НАЗНАЧЕНИЕ

Данное пособие:

- поможет школьникам научиться решать задачи;
- предложит учителям много полезного материала для самостоятельных и домашних работ, а также для подготовки к олимпиадам.

СТРУКТУРА

- Задачи дифференцированы по трём уровням сложности.
- К ключевым задачам приведены подробные решения.
- После каждой ключевой задачи даны похожие задачи с подсказками (советами). Ко всем задачам даны ответы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

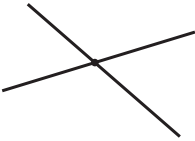
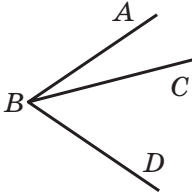
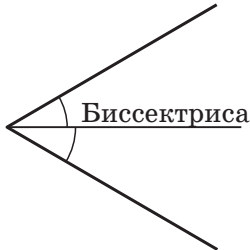
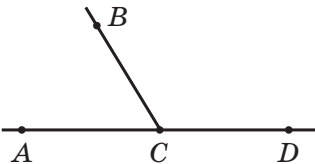
Слева от номера задачи:

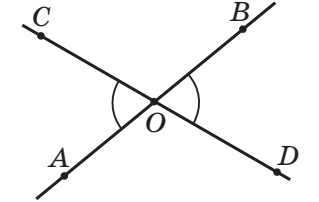
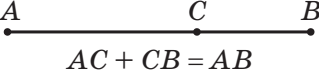
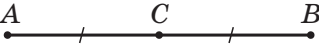
- значком  обозначены ключевые задачи, к которым после условия приведены подробные решения;
- значком  обозначены задачи, для которых приведены подсказки (советы) внизу страницы.

Желаем научиться и научить решать задачи по геометрии!

1. ТОЧКИ, ПРЯМЫЕ, ЛУЧИ, УГЛЫ И ОТРЕЗКИ

ПОЛЕЗНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Через любые две точки можно провести одну и только одну прямую.	
Если на прямой заданы три точки, то одна и только одна из них расположена между двумя другими.	
Две прямые могут пересекаться только в одной точке.	
Градусная мера угла, разделённого на два угла, равна сумме градусных мер этих углов.	 $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD$
Луч, который делит угол на два равных угла, называют <i>биссектрисой</i> этого угла.	
Углы, у которых одна сторона общая, а две другие образуют развёрнутый угол, называют <i>смежными</i> углами. Сумма смежных углов равна 180° .	 $\angle ACB + \angle BCD = 180^\circ$

Два угла называют <i>вертикальными</i>, если стороны одного угла являются дополнительными лучами к сторонам другого угла. Вертикальные углы равны.	
Внутренняя точка отрезка делит его на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка.	
Точку, которая делит отрезок на два равных отрезка, называют <i>серединой</i> отрезка.	

ПЕРВЫЙ УРОВЕНЬ

- 1.1.** На прямой обозначены три точки A , B и C (рис. 1.1).
- Сколько всего лучей изображено на рисунке?
 - Какие лучи можно обозначить заданными на рисунке точками?

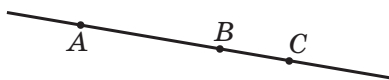


Рис. 1.1

Решение. а) Каждая обозначенная на прямой точка делит прямую на 2 луча, которые являются дополнительными. На рис. 1.1 на прямой обозначено 3 точки, поэтому на нём есть 6 лучей: два дополнительных с началом в точке A , два дополнительных с началом в точке B и два дополнительных с началом в точке C . б) Луч можно обозначить с помощью двух его точек, причём первая из них должна быть началом луча. Следовательно, из двух дополнительных лучей с началом в точке A только обозначение луча, который содержит точки B и C , можно записать с помощью обозначенных точек: AB или AC . Обозначения двух дополнительных лучей с началом в точке B можно записать с помощью обозначенных точек: BA и BC . Из двух дополнительных лучей с началом в точке C только обозначение луча, который содержит точки A и B , можно записать с помощью обозначенных точек: CA или CB .



1.2. Сколько лучей изображено на рис. 1.2?

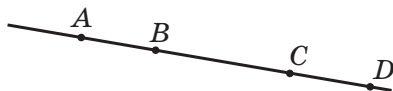


Рис. 1.2



1.3. Какие углы, меньшие развёрнутого, есть на рис. 1.3?

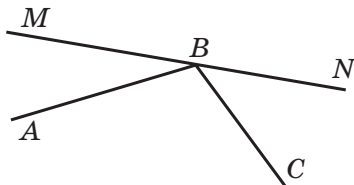


Рис. 1.3

Решение. Любая пара изображённых на рисунке лучей с началом B , кроме пары дополнительных лучей BM и BN , — это стороны угла, меньшего развёрнутого. Действительно, каждый из этих углов имеет общую вершину B с развёрнутым углом MBN , причём одна или обе стороны каждого такого угла лежат внутри угла MBN . Следовательно, углы, меньшие развёрнутого, — это углы MBA , MBC , ABC , ABN , CBN .

Ответ. MBA , MBC , ABC , ABN , CBN .

1.4. Какие углы, меньшие развёрнутого, есть на рис. 1.4?

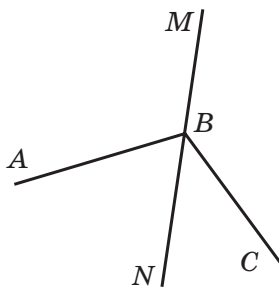


Рис. 1.4

1.2. Каждая обозначенная на прямой точка является началом двух лучей.

1.5. Один из смежных углов равен 50° . Чему равен другой угол?

1.6. Один из смежных углов вдвое меньше другого. Чему равны эти углы?

Решение. Обозначим градусную меру меньшего угла x , тогда градусная мера большего угла $2x$. Поскольку сумма смежных углов равна развёрнутому углу, получаем $x + 2x = 180$, откуда $x = 60$.

Ответ. 60° и 120° .

1.7. Один из смежных углов на 40° больше другого. Чему равны эти углы?

1.8. Чему равен угол между биссектрисами смежных углов?

1.9. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если один из этих углов равен 35° ?

Решение. При пересечении двух прямых образуются 4 угла, меньшие развёрнутого (рис. 1.5). Углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 являются вертикальными, поэтому $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Углы 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, а также 1 и 4 являются смежными, поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. Пусть, например, $\angle 1 = 35^\circ$. Тогда, учитывая записанные выше равенства, получаем: $\angle 1 = \angle 3 = 35^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$.

Ответ. 35° , 145° , 35° , 145° .

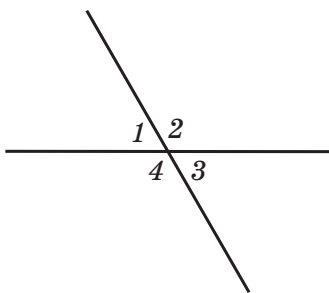


Рис. 1.5

1.5. Воспользуйтесь тем, что сумма смежных углов равна 180° .

1. Точки, прямые, лучи, углы и отрезки

1.10. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если один из этих углов вдвое больше другого?

1.11. Чему равен угол между биссектрисами вертикальных углов?

1.12. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если один из этих углов на 30° больше другого?

1.13. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, втрое больше другого. Чему равен угол между этими прямыми?

1.14. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на 50° больше другого. Чему равен угол между этими прямыми?

1.15. Рассмотрите рис. 1.6.

а) Чему равен каждый из обозначенных углов на рисунке?

б) Запишите обозначения всех углов, равных 60° .

в) Запишите обозначения всех прямых углов.

г) Запишите обозначения всех углов, равных 120° .

д) Запишите обозначения всех углов, равных 150° .

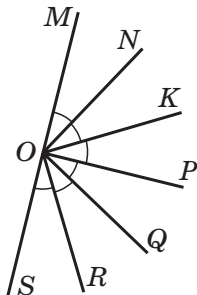


Рис. 1.6

1.10. Учтите, что неравными при пересечении двух прямых могут быть только смежные углы.

1.11. Воспользуйтесь свойством вертикальных и смежных углов. Учтите, что сумма двух смежных углов равна 180° .

1.13. Если углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, не равны, то углом между прямыми называют любой из двух равных меньших углов.

1.16. Рассмотрите рис. 1.7.

- Какие углы являются вертикальными?
- Какие углы являются смежными?
- Чему равны углы DOG , COA , AOF и FOB ?

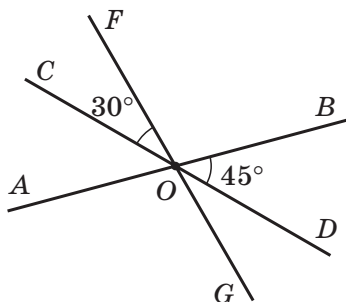


Рис. 1.7

- 1.17.** Точка K лежит на отрезке MN длиной 18 см. Чему равны длины отрезков MK и KN , если MK на 6 см больше, чем KN ?

Решение. Обозначим x заданную в сантиметрах длину отрезка KN , тогда длина отрезка MK равна $x + 6$. Поскольку точка K лежит на отрезке MN , сумма длин отрезков MK и KN равна длине отрезка MN , поэтому $x + x + 6 = 18$, откуда $x = 6$. Следовательно, $KN = 6$ см, $MK = 12$ см.

Ответ. $KN = 6$ см, $MK = 12$ см.

- 1.18.** Точка K лежит на отрезке MN длиной 18 см. Чему равны длины отрезков MK и KN , если MK в 5 раз меньше, чем KN ?

ВТОРОЙ УРОВЕНЬ

- 1.19.** На прямой обозначено 10 точек. Сколько лучей при этом образовалось?

- 1.20.** Угол 120° разделили на два угла и провели биссектрисы этих углов. Чему равен угол между этими биссектрисами?

Решение. Обозначим x и y градусные меры углов, образовавшихся в результате деления данного угла. Биссектрисы

этих углов разделят их на углы, соответственно равные $\frac{x}{2}$ и $\frac{y}{2}$.

Поэтому угол между биссектрисами углов равен $\frac{x+y}{2}$. По условию $x + y = 120$, следовательно, искомый угол равен 60° .

Ответ. 60° .

1.21. Из вершины угла ABC между его сторонами провели луч BK . Угол между биссектрисами образовавшихся углов равен 40° .

а) Чему равен угол ABC ?

б) Чему равны образовавшиеся углы, если первый из них: 1) в 3 раза больше второго; 2) на 60° больше второго?

1.22. На рис. 1.8 $\angle AOC = 80^\circ$, $\angle EOC = 50^\circ$. Лучи OB и OD — биссектрисы этих углов.

а) Чему равен $\angle AOE$?

б) Чему равен угол между биссектрисами углов AOC и EOC ?

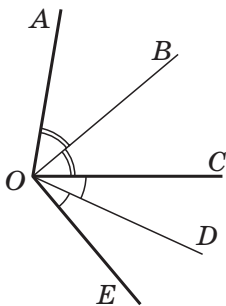


Рис. 1.8

1.23. Известно, что $\angle ABD = 80^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$, луч BC лежит внутри угла ABD . Лучи BM и BN — биссектрисы углов ABD и CBD соответственно. Чему равен угол MBN ?

1.24. Угол между биссектрисами углов ABC и CBD равен 70° , причём луч BD лежит внутри угла ABC . Чему равна разность углов ABC и CBD ?

- 1.25. На рис. 1.9 угол COD вдвое больше угла BOC . Чему равен угол AOB ?

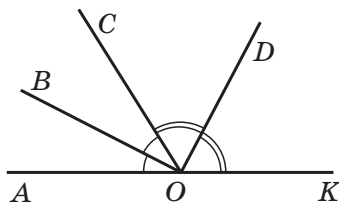


Рис. 1.9

- 1.26. Биссектрисы углов AOB и BOC перпендикулярны. Являются ли эти углы смежными?
- 1.27. Биссектрисы смежных углов образуют равные углы с их общей стороной. Чему равны данные смежные углы?
- 1.28. Градусные меры смежных углов относятся как $5 : 7$. Чему равен угол между биссектрисами этих углов? Есть ли в условии лишние данные?
- 1.29. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если сумма двух из этих углов равна 60° ?
- 1.30. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если разность двух из этих углов равна 40° ?
- 1.31. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если один из этих углов на 50° больше другого?
- 1.32. Чему равны все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если сумма двух из этих углов равна третьему углу?

1.25. Воспользуйтесь свойством смежных углов.

1.26. Докажите, что сумма данных углов вдвое больше угла между их биссектрисами.

1.27. Докажите, что данные смежные углы равны.

1.29. Докажите, что эти два угла — вертикальные.

1.30. Неравными в данном случае могут быть только смежные углы.

СОДЕРЖАНИЕ

Об этом учебном пособии.....	3
1. Точки, прямые, лучи, углы и отрезки.....	4
2. Элементы треугольника. Равенство треугольников	14
3. Равнобедренный треугольник	27
4. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника.....	35
5. Неравенства в треугольнике. Прямоугольный треугольник..	52
6. Окружность	65
Ответы	75