ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В различных областях человеческой деятельности возникают задачи, при решении которых необходим выбор одного из множества вариантов (выбор оптимального плана), например при решении проблем управления и планирования производственных процессов. Математическая дисциплина, разрабатывающая теоретические основы решения подобных задач, называется математическим программированием.

Содержание математического программирования составляют теория и методы решения задач, в математических моделях которых требуется определить экстремум некоторой функции нескольких переменных, связанных условиями в виде равенств и неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \to \max\ (\min); \\ g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, k; \\ g_i(x) = 0,\ i = k+1, \ldots, m; \\ x \in R^n, \end{cases}$$

где $f(x)$, $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — некоторые функции n переменных.

Если функции $f(x)$, $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ линейные, то такая задача называется задачей линейного программирования (ЛП). Хотя она и относится к классу задач на условный экстремум, однако частные производные целевой функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = c_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ постоянны, т. е. не зависят от точек $x \in R^n$. Следовательно, обычные методы математического анализа неприменимы для решения задач ЛП, поэтому для таких задач созданы специальные методы.

Отдельный класс составляют так называемые задачи ЛП транспортного типа и задачи сетевого планирования, которые могут быть описаны моделями ЛП; для решения указанных задач разработаны методы, учитывающие их специфику. Линейное программирование тесно связано и с теорией игр, изучающей математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях, возникающих между двумя или более сторонами.

Если к задаче линейного программирования добавляется требование, чтобы ее переменные были целыми числами, то получается задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Для задач ЦЛП также существуют специально разработанные алгоритмы решения.

Задачам ЛП, а также задачам, связанным с ними, в том числе транспортной задаче, задачам сетевого планирования, задачам целочисленного линейного программирования и некоторым задачам теории игр, и посвящено данное пособие. В нем рассматриваются постановки задач, их свойства и методы решения. Пособие разделено на разделы, по каждому разделу предлагаются типовые расчеты в 25 вариантах.

Пособие предназначено преимущественно для студентов экономических направлений подготовки вузов.

Автор выражает безмерную благодарность Ольге Александровне Заблоцкой за предоставленные материалы и огромную помощь в написании этого пособия.

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Задача математического программирования

Как было отмечено во введении, математическое программирование рассматривает задачи, в которых необходимо определить экстремум (максимум или минимум) некоторой функции при заданных условиях.

Определение 1. *Задачей математического программирования* (*МП*) называется задача вида

$$\begin{cases} f(x) \to \max\ (\min); \\ g_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, k; \\ g_i(x) = 0,\ i = k+1, \dots, m; \\ x \in R^n, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(x)$, $g_i(x)$ $(i = 1, \dots, m)$ — некоторые функции n переменных.

Определение 2. Функция, экстремум которой определяется в задаче МП, называется *целевой.*

Так, в задаче (1) $f(x)$ — это целевая функция.

Определение 3. Все условия задачи МП, помимо целевой функции, называются *ограничениями задачи*.

Определение 4. Любой вектор $x \in R^n$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи МП, называется *допустимым решением*, или *планом задачи МП.*

Определение 5. Вектор $x^* \in D$ называется *оптимальным решением* (*оптимальным планом*) задачи МП, если $f(x^*) \ge f(x)$ для любого $x \in D$ в задаче максимизации или $f(x^*) \le f(x)$ для любого $x \in D$ в задаче минимизации.

Определение 6. Задача МП называется *разрешимой,* если она имеет хотя бы один оптимальный план.

1.2. Задача линейного программирования

Определение 7. *Задачей линейного программирования* (*ЛП*) называется задача МП, в которой функции $f(x)$, $g_i(x)$ $(i = 1, \dots, m)$ — линейные.

Таким образом, задача ЛП в общем случае имеет вид (2)–(6)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{2}$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1, \ldots, k; \quad (3)$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = k+1, \ldots, l; \quad (4)$$

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = l+1, \ldots, m; \quad (5)$$

$$x_j \ge 0 \text{ для некоторых } j \in \{1, \ \ldots, \ n\}. \quad (6)$$

Пример 1. Задача о распределении ресурсов.

Предприятие располагает тремя видами ресурсов — P_1, P_2, P_3, необходимыми для производства трех видов продукции — $П_1, П_2, П_3$. Затраты ресурсов на производство одной партии продукции каждого вида, запасы ресурсов и доход от реализации одной партии продукции каждого вида приведены в таблице 1. Определить план выпуска продукции, позволяющий предприятию получить максимальный суммарный доход.

Таблица 1

Ресурс	**Затраты ресурсов на продукцию**			**Запас ресурса**
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
P_1	2	4	2	120
P_2	1	4	3	100
P_3	3	0	3	200
Доход	30	50	40	—

Составим *математическую модель* этой задачи.

Пусть x_j – количество выпускаемых партий продукции $П_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ характеризует план выпуска, который должен удовлетворять следующим ограничениям, связанным с запасами ресурсов:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 120; \\ g_2(x) &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 100; \\ g_3(x) &= 3x_1 + 3x_3 \le 200. \end{aligned} \quad (7)$$

В этих ограничениях имеем неравенства, так как ресурсы могут быть истрачены не полностью.

Суммарный доход от реализации продукции, произведенной в соответствии с планом *x*, выражается следующей функцией:

$$f(x) = 30x_1 + 50x_2 + 40x_3. \tag{8}$$

Таким образом, получаем следующую задачу математического программирования:

$$\begin{cases} f(x) = 30x_1 + 50x_2 + 40x_3 \to \max; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 120; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 100; \\ 3x_1 + \quad 3x_3 \le 200; \\ x_j \ge 0, \quad j = 1, \ 2, \ 3. \end{cases} \tag{9}$$

Пример 2. Задача о диете.

Рацион солдата складывается из двух продуктов питания, например из хлеба и мяса, питательная ценность которых выражается в количестве протеина и калорий. Их содержание в единице хлеба и мяса, минимальная суточная потребность одного солдата в протеине и калориях, а также стоимость единицы продукта питания приведены в таблице 2. Требуется определить рацион одного солдата, имеющий минимальную стоимость.

Таблица 2

Продукт питания	**Протеин**	**Калории**	**Стоимость**
Хлеб	1	5	1
Мясо	5	1	3
Потребность	15	15	–

Предположим, что солдат ежедневно получает x_1 единиц хлеба и x_2 единиц мяса. Тогда суточные затраты на питание солдата:

$$f(x) = x_1 + 3x_2, \tag{10}$$

причем переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1 + 5x_2 \ge 15; \\ g_2(x) &= 5x_1 + x_2 \ge 15. \end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая, что суточные затраты надо минимизировать, получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} f(x) = x_1 + 3x_2 \to \min; \\ x_1 + 5x_2 \ge 15; \\ 5x_1 + x_2 \ge 15; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2. \end{cases} \tag{12}$$

Так как целевые функции и ограничения задач (9) и (12) линейны, то обе эти задачи относятся к классу задач ЛП.

Из определения задачи ЛП ясно, что она относится к классу задач на условный экстремум, однако частные производные целевой функции $\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_j \ (j = 1, \ldots, n)$ постоянны, т. е. не зависят от точек $x \in R^n$. Следовательно, обычные методы математического анализа неприменимы для решения задач ЛП, поэтому для таких задач созданы специальные методы, учитывающие их специфику.

1.3. Каноническая задача линейного программирования

Особый класс задач ЛП составляют так называемые канонические задачи.

Определение 8. *Канонической задачей ЛП* (*КЗЛП*) называется задача ЛП, в которой:

1) целевая функция максимизируется;

2) все ограничения имеют вид равенств;

3) все переменные задачи неотрицательны.

КЗЛП имеет вид

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1, \ldots, m; \\ x_j \ge 0,\ \ j = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{13}$$

Определение 9. Две задачи ЛП называются *эквивалентными*, если любому допустимому решению x одной из них соответствует допустимое решение $\bar{x}$ другой и наоборот, причем план x оптимален в первой задаче тогда и только тогда, когда соответствующий ему план $\bar{x}$ оптимален во второй задаче.

Теорема 1 (*теорема об эквивалентности*). Для всякой задачи ЛП существует эквивалентная ей каноническая задача ЛП.

Покажем, как произвольная задача ЛП может быть сведена к задаче КЗЛП. Для простоты рассмотрим случай задачи ЛП, имеющей две переменные и три ограничения ($n = 2$, $m = 3$):

$$\begin{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3; \\ x_1 \geq 0. \end{cases} \tag{14}$$

Для перехода к эквивалентной КЗЛП необходимо добиться того, чтобы эта задача была на максимум, все линейные ограничения были равенствами и все переменные – неотрицательными. Покажем, как этого можно добиться.

1. Вместо функции $f(x)$ введем функцию $\overline{f}(x) = -f(x)$. Очевидно, что функция $\overline{f}(x)$ достигает своего максимума тогда и только тогда, когда $f(x)$ достигает минимума.

2. В линейные ограничения задачи (14), имеющие вид неравенств, введем неотрицательные переменные s_1, s_2, называемые *дополнительными.* Получим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - s_1 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + s_2 &= b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \qquad &= b_3. \end{aligned} \tag{15}$$

3. По условию задачи (14) переменная x_2 может принимать значения любого знака. Такую переменную можно представить в виде разности двух неотрицательных переменных:

$$x_2 = x_2' - x_2'' \quad \left(x_2',\ x_2'' \geq 0\right). \tag{16}$$

После выполнения этих преобразований получаем каноническую задачу

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = -c_1x_1 - c_2x_2' + c_2x_2'' \to \max; \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2' - a_{12}x_2'' - s_1 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2' - a_{22}x_2'' + s_2 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2' - a_{32}x_2'' = b_3; \\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ s_1,\ s_2 \geq 0. \end{cases} \tag{17}$$

Докажем эквивалентность задач (14) и (17).

Очевидно, что каждому допустимому решению $x = (x_1, x_2)$ задачи (14) соответствует допустимое решение $\bar{x} = (x_1, x_2', x_2'', s_1, s_2)$ КЗЛП (17) и наоборот. Действительно, задав упорядоченную пару $x = (x_1, x_2)$, найдем

$$\begin{aligned} s_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1; \\ s_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Для положительных значений x_2 положим $x_2' = x_2;\ x_2'' = 0$, для неположительных значений x_2 примем $x_2' = 0;\ x_2'' = -x_2$. Тогда для любых значений x_2 имеем $x_2 = x_2' - x_2''$, где x_2' и x_2'' определяются однозначным образом по значению x_2. Обратно, задав набор $\bar{x} = (x_1, x_2', x_2'', s_1, s_2)$, легко получаем упорядоченную пару $x = (x_1, x_2)$, где $x_2 = x_2' - x_2''$.

Оптимальность или неоптимальность соответствующих планов задач (14) и (17) следует из соотношения $\bar{f}(x) = -f(x)$.

Итак, чтобы решить произвольную задачу ЛП, достаточно решить эквивалентную ей каноническую задачу ЛП, и поэтому в дальнейшем можно ограничиться исследованием именно канонических задач ЛП.

1.4. Графический метод решения задачи линейного программирования

Задача ЛП, имеющая только две переменные, может быть решена графически. В этом случае допустимое множество D задачи ЛП (если оно не пусто) образует на плоскости некоторую область, границами которой являются прямые линии. Такое множество назовем *многогранником задачи*. Задача ЛП сводится к