

УДК 51
ББК 22.1
К57

Перевод с итальянского Олеси Пантелеенко

Кодоньо, М.

К57 Математика за чашечкой кофе = *Matematica in pausa caffè* / Маурицио Кодоньо ; перевод с итальянского Олеси Пантелеенко. — Минск : Дискурс, 2020. — 160 с.
ISBN 978-985-90515-7-9.

Парадоксов в математике предостаточно, но главный из них, пожалуй, состоит в том, что многие считают ее сложной, скучной и ненужной. И правда: зачем сегодня может понадобиться математика? Разве что прикинуть стоимость покупок в магазине или помочь ребенку решить задачу по математике... Стоит ли в таком случае тратить на нее время?

Безусловно! И прежде всего потому, что математика — это очень интересно. Если у вас есть 15 минут, налейте себе чашечку кофе и устраивайтесь поудобнее, а Маурицио Кодоньо объяснит, почему ваша очередь всегда движется медленнее соседней, существует ли надежный способ выиграть в казино и можно ли доверять большим данным.

УДК 51
ББК 22.1

Научно-популярное издание

Кодоньо Маурицио

МАТЕМАТИКА ЗА ЧАШЕЧКОЙ КОФЕ

Дизайн обложки *Т. Сиплевич*

Верстка *К. Подольцева*

Корректоры *Т. Радецкая, А. Павлович*

Подписано в печать 27.01.20. Формат 84×108^{1/32}. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 4,4. Тираж 3000. Заказ

Частное унитарное предприятие «Издательство Дискурс».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,

распространителя печатных изданий № 1/519 от 11.08.2017.

Ул. Гусовского, д. 10, помещение № 9 (комн. 404), 220073, г. Минск.

Дата изготовления 27.02.20. Срок годности не ограничен.

Произведено в Российской Федерации

12+

ISBN 978-985-90515-7-9

© Maurizio Codogno, Codice Edizioni 2014
Translated by arrangements with Bennici & Sirianni Literary Agency

© Издание на русском языке, оформление.
ЧУП «Издательство Дискурс», 2020

Содержание

Введение.....	9
Раздел I. Арифметика.....	13
Что дает минус на минус (плюс или минус)?	14
Осторожно: средние величины!	17
Способ девятки	22
Цифры сомнительной известности	26
Единица или нет.....	30
Логарифмы	34
Стремительный рост	38
Раздел II. Парадокс, возможность, прогноз.....	43
Один к тысяче не получится.....	44
Парадокс двух конвертов.....	48
Игра Пенни.....	51
Парадокс Симпсона	55
Закон Бенфорда.....	60
Сколько весит «Википедия»?.....	64
Смещение в центр	68

Раздел III. Игры.....	73
Удваиваете ставку? Нет, оставляю.....	74
Как выиграть в рулетку.....	78
Двойная ставка, двойная взятка.....	82
Пусть победит худший.....	86
Переложите карту.....	89
Кубики честные и нечестные.....	93
Ищем секретаря	97
Раздел IV. На прогулке	101
Остерегайтесь кольцевых дорог.....	102
Соседняя очередь всегда движется быстрее.....	107
У моих друзей больше друзей, чем у меня.....	110
Исчезающие лифты.....	115
Автобусные тройки.....	119
Стоп — поехали.....	122
Случайные прогулки.....	126
Раздел V. Компьютеры и стандарты.....	131
Календарь в уме	132
Бумага формата А4	136
Не доверяйте слишком сжатым файлам.....	140
Абсолютно безопасная криптография.....	144
Почему компакт-диск не шуршит?	148
Стеганография.....	152
Влияние больших данных	155

Посвящается Анне, моей спутнице жизни

Введение

Среди итальянцев 78,2 % считают, что математика — сложная наука. Более того, 42 % утверждают, что «боятся математики». Что можно сказать по этому поводу? Бесспорно, математика, которую преподают в университете, сложна. И что с того? Приготовить безукоризненный капучино тоже нелегко, и я изумляюсь всякий раз, когда смотрю, как бармен, наливая молоко в чашку, рисует листочек или сердечко. Я даже не знаю, с чего начать, чтобы получить нечто подобное. Тем не менее я могу включить кофемашину и приготовить кофе — пусть не такой идеальный с эстетической точки зрения, но более чем приличный по вкусу.

К сожалению, школьная программа на 99 % состоит из того, что не пригодится ученикам в дальнейшей жизни. И не так часто встречаются действительно хорошие педагоги, не только умеющие показать, что математика окружает нас в повседневной жизни (так говорят многие, и, если честно, это начинает надоедать), но способные объяснять математику без сложных вычислений. Здесь кто-нибудь может возразить, что математика применяется, только когда речь идет о вычислениях, но, на мой

взгляд, это всего лишь предлог для того, чтобы держать нас подальше от настоящей математики. Не буду повторять избитые фразы о том, как прекрасна математика. Я убежден, что так оно и есть, хотя и не в состоянии разъяснить, почему это так. Я имею в виду, что бывает сложно объяснить окружающие нас явления, однако их можно понять интуитивно и рассказать о них в непринужденной беседе за чашечкой кофе. В конце концов, если эти несколько минут можно посвятить разговорам о политике, кино, экономике, хотя мы не являемся политиками, обладателями премии «Оскар» или Нобелевской премии, то почему же нам нельзя поболтать на любопытные математические темы?

Разделы книги объединяют ряд близких тем, каждой из которых посвящено несколько страниц. Она предназначена для людей с нематематическим складом ума. Да, иногда я использую примеры с числами, однако гарантирую доступность изложения. В тексте есть изображения, но их немного, потому что рисунок сам по себе бесполезен по сравнению с тем, что можно о нем рассказать. И я вас уверяю, что несколько формул, которые вы встретите, вставлены только из соображений их эстетической значимости. Так что если вы и пропустите несколько страниц, то ничего страшного не произойдет. Вы же не думаете, что мы будем рисовать графики и решать примеры, используя ложечку от кофемашины и пену от капучино?

Книга состоит из пяти разделов. Раздел «Арифметика» посвящен вопросам, которые вы, возможно, задавали себе в школьные годы, но о которых потом забыли. В раздел

«Парадокс, возможность, прогноз» включены на первый взгляд необъединяемые темы, однако при более внимательном рассмотрении такой подход оказывается логичным. Раздел «Игры» — ну, здесь название говорит само за себя: речь пойдет об играх азартных и не только. Раздел «На прогулке» рассказывает о проблемах, с которыми можно столкнуться, например, прогуливаясь по улице. И наконец, в разделе «Компьютеры и стандарты» затронуты вопросы, меньше всего связанные с математикой (хотя есть люди, которые уверены, что информатика — это та же математика, только в другом облики). Каждую тему можно читать по отдельности, несмотря на отсылки к другим разделам, в которых она подается немного иначе. Книга включает и общеизвестные темы, однако я все-таки надеюсь, что мне удалось рассказать о них по-новому.

Развлекая вас любопытными фактами, я постараюсь донести их суть через интуицию. Я принадлежу к школе, полагающей, что в основе математики лежит создание моделей, которые практически в совершенстве находят применение в реальной жизни. Главная проблема состоит в том, чтобы создать логико-математическую структуру окружающего мира. А вот умение решать примеры или вычислять интегралы нам не очень нужно в повседневной жизни: если возникнет такая необходимость, всегда можно посчитать на компьютере.

Если у нас не сформирована качественная модель прогнозирования, мы подвергаемся реальной опасности: кто угодно может использовать огромное количество более или менее случайных чисел и формул, чтобы разыграть нас, воспользовавшись нашей безграмотностью.

С 2012 года по «Фейсбуку» гуляет текст следующего содержания: «Вчера Сенат республики утвердил 257 голосами “за” при 165 воздержавшихся проект закона сенатора Чиренга, предусматривающий создание фонда для “депутатов в кризисе”, ввиду неизбежной кончины законодательной структуры. Этот фонд предусматривает заложить в бюджет 134 миллиарда евро для всех депутатов, которые не найдут работу в течение года, последующего за истечением мандата». Сколько тех, кто прочел пост и поделился им, однако не попытался суммировать количество указанных голосов, чтобы заметить, что их больше, чем членов Сената? А сколько тех, кто разделил указанную сумму на меньше чем тысячу депутатов, чтобы понять, что каждый из них должен был бы получить более 130 миллионов? Знаний по математике потребуется немного, здравого смысла — ненамного больше: и если первая вас не испугает, то я уверен, что второго у вас более чем достаточно.

В первую очередь я хотел бы выразить признательность Энрико Казадеи из издательского дома «Кодиче», который, читая мою болтовню в онлайн-газете «Пост», предложил написать об этом книгу. Также благодарю Стефано ди Милано из «Кодиче», который оказался втянут в выбор тем для написания. Спасибо (кого еще назвать?) Марко Фискетти и Массимо Манка за кропотливую работу над первой редакцией, которые не только выжили, но и указали, какие части подлежат корректировке. И наконец, спасибо Анне, Чечилии и Якопо, которые дали мне время написать и особенно переписать эту книгу.

Да, совсем забыл: статистические данные, приведенные выше, я выдумал. Прошу, не размещайте их в «Фейсбуке».

Раздел I

Арифметика

Что дает минус на минус (плюс или минус)?

Думаю, многие из вас заметили определенное сходство между математическими формулами и магическими заклинаниями. Не обязательно иметь волшебную палочку, чтобы привести в действие законы математики и получить желаемый результат, однако правила следует учить слово в слово, потому что малейшая неточность ведет к досадным ошибкам. Одни формулы мы воспринимаем как должное, например: объем шара равен три четвертых пи на радиус в кубе. Другие же сбивают нас с толку, например правило знаков, которое звучит следующим образом: плюс на плюс дает плюс; плюс на минус дает минус; минус на плюс дает минус... До сих пор правило не кажется сложным для усвоения. Но стоит произнести фразу «минус на минус дает плюс», в классе неизбежно раздается вопрос: «Как можно получить положительное число из отрицательных?»

На уроке учитель обычно торопится и лишь бросает в ответ: «Это нужно просто запомнить». Он не задумывается о том, насколько трудно школьнику разобраться

в отрицательных числах. А ведь до XVII века их не изучали вовсе. В те времена математик избавлялся от неудобных минусов и записывал уравнение $x^2 = 5x + 6$ вместо $x^2 - 5x - 6 = 0$. Страх перед отрицательными числами сохраняется и в современном обществе. Он проявляется в том, что выражение «минимальная ночная температура составила минус 3 градуса» в нашей речи превращается в «три градуса ниже нуля». Этот комментарий не поможет понять правило знаков, но, к счастью, существует относительно простой способ разобраться в том, как оно действует, если воспользоваться воображением.

Мы можем, например, будущее обозначить положительными числами, а прошлое — отрицательными. Таким образом, позавчера будет равняться «минус два дня от сегодняшнего дня», а завтра — «плюс один день к сегодняшнему дню».

Еще проще представить, что доходы — это положительные числа, а долги — отрицательные. Если у меня совсем нет денег и при этом я должен отдать 1000 евро кредиторам, то я могу сказать, что у меня есть минус 1000 евро. Конечно, я так не говорю, но главное, что подход к объяснению правила становится понятным.

Объединим теперь обе идеи и посмотрим, что получится. Если я каждый год кладу на счет 100 евро (+100), то через десять лет (+10) у меня будет на 1000 евро больше, чем сейчас: плюс на плюс дает плюс. Представим, что эта ситуация длится уже не первый год. Если я начал пополнять счет в банке давно, то десять лет назад (-10) у меня было на 1000 евро меньше, чем сегодня: плюс на минус дает минус. А сейчас предположим, что давным-давно мои бабушка с дедушкой — пусть земля

им будем пухом — завели чековую книжку в банке. И использовали они ее только для одной операции: снимали каждый год 100 евро, чтобы уплачивать налоги (-100). Через десять лет ($+10$) первоначальная сумма уменьшилась на 1000 евро: минус на плюс дает минус. И наконец, я с тоской вспоминаю, как ежегодно снимал со счета по 100 евро (-100). Если предположить, что я делал так каждый год, то какая сумма была на моем счету десять лет назад (-10)? Все согласятся, что на 1000 евро больше, чем сейчас: вот так минус на минус дает плюс.

Таким образом снимаются все вопросы и правило знаков становится понятным. Общеизвестно, что математические правила лучше усваиваются на примере денежных операций.

Осторожно: средние величины!

Я известный зануда. И когда я слышу заявление: «Демократичность общества определяется уровнем образованности избирателей, а он у нас ниже среднего», мне тотчас хочется исправить оратора, что не ниже среднего, а ниже медианы! Среднее арифметическое и медиана не являются взаимозаменяемыми синонимами ни в разговорной речи, ни в научном стиле, а представляют собой разные виды средних величин. Классификация усложняется, когда вводится еще один термин под названием «мода», который не имеет никакого отношения к весенне-летней коллекции. Давайте разберемся в разнице между этими понятиями и научимся использовать их в правильном контексте.

Итак, мы находимся в школьном классе. У всех детей есть конфеты, у кого-то больше, у кого-то меньше. Как узнать среднюю величину?

Сценарий 1. Учитель решает обеспечить социальное равенство: собирает все конфеты, ставит детей в ряд и начинает раздавать по одной каждому. Предположим, в результате все конфеты поровну и без остатка будут

разделены между детьми. Таким образом, *среднее арифметическое* — это количество конфет, которым обладает каждый ребенок.

Сценарий 2. Учитель желает объяснить марксистскую теорию, для чего начинает формировать две группы: слева ставит ребенка с наименьшим количеством конфет, справа — с наибольшим. Так он распределяет детей до тех пор, пока не останутся один или два ребенка. Количество конфет, которыми обладает последний ребенок, и является *медианой*.

Сценарий 3. Учитель — заядлый любитель голосований в телешоу. Он делит класс таким образом, чтобы у всех детей из одной группы было одинаковое количество конфет. А затем определяет самую многочисленную группу. В итоге количество конфет, которыми обладает ребенок из данной группы, представляет собой *моду в распределении* конфет.

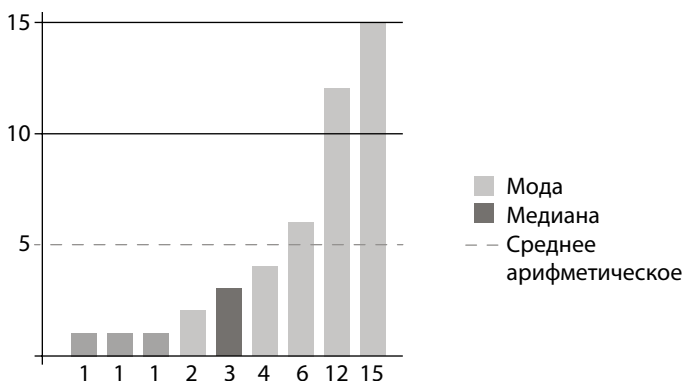
Сразу же отвечу на вопросы, которые, возможно, возникли у вас при чтении этих примеров.

- «Могло ли в первом сценарии у нескольких детей оказаться на одну конфету больше, чем у других?» Действительно, среднее арифметическое может иметь дробное значение, несмотря на то что все исходные числа являются целыми. Однако в любом случае данный пример помогает понять суть среднего арифметического, а заключается она в том, что у всех детей одинаковое количество конфет.
- «Что произойдет, если во втором сценарии останутся двое детей с разным количеством конфет?» В таком случае одного ребенка отправят налево, другого — направо, а среднее значение количества конфет

у этих двоих будет определять медиану. Важно усвоить, что медиана делит исходную группу на две одинаковые части.

- «Что будет, если в третьем сценарии окажется несколько групп с одинаковым количеством детей?» Такая ситуация в математике получила название *мультимодального распределения*. Мода — единственный вид средних величин, который может иметь сразу несколько значений.

Если в глубине души вы настоящий математик, то наверняка спросите: «Всегда ли среднее арифметическое, медиана и мода имеют разные значения? А могут ли они совпадать?» Вопрос серьезный, я не шучу. Существует масса примеров, когда и мода, и медиана, и среднее арифметическое приходятся на одну точку. Но также несложно выбрать совокупность чисел, в которой все три вида средних величин будут иметь разные значения: на рисунке вы видите как раз такую ситуацию.



Проще говоря, между средним арифметическим, медианой и модой нет никакой взаимосвязи типа «среднее

арифметическое меньше медианы». Это всего лишь три независимых числа.

После того как разница между средним арифметическим, медианой и модой усвоена, становится понятен и контекст их использования. Поскольку среднее арифметическое является величиной, наиболее связанной с количеством, оно нередко пригождается в повседневной жизни. Такие вычисления полезны, когда тренируешься для участия в марафоне и каждый день записываешь в таблицу свой пробег в километрах. А если ежедневно в течение нескольких недель ходишь собирать дрова для камина, то в конце концов, вероятно, заинтересуешься средним объемом работы, прodelываемой за день.

Если же мы желаем узнать значение некоего показателя по отношению к населению в целом, то логичнее было бы высчитать медиану, как в ситуации с конфетами. Я специально использовал условное наклонение, так как обычно поступают иначе. Классический пример — определение среднего заработка по стране, когда из-за простоты вычисления общий доход населения делят на число людей. Но есть еще более глупые примеры из разряда «определение средней температуры по палате». Не верите? Представьте, что, находясь в зале с дюжиной коллег Берлускони (или Маркьонне¹, если предпочитаете не говорить о политике), вы решили вычислить среднюю зарплату итальянцев по доходам этих богачей: вы сразу

¹ Серджо Маркьонне (итал. Sergio Marchionne; 1952–2018) — канадско-итальянский предприниматель в области автомобилестроения, возглавлявший компанию «Фиат» с 2004 по 2018 год. Под его руководством компания, находившаяся на пути к банкротству, вновь стала прибыльной. — *Здесь и далее прим. пер.*

заметите, что среднее арифметическое в этом случае не имеет практической значимости.

Другой пример, наглядно демонстрирующий суть медианы (или, лучше сказать, ее производной), — диаграммы роста младенцев. Если ваш ребенок оказался ниже 50-го перцентиля¹, это совсем не означает, что с ним что-то не так. По определению половина всех детей располагается до отметки 50 %, а другая половина — выше этого уровня. Короче, это мера относительная, а не абсолютная, поэтому она сама по себе ничего не говорит о здоровье ребенка.

А зачем необходимо знать моду? Ну, она может понадобиться, если вы следите за модой... или желаете просчитать результат лотереи, в которой не все числа имеют равную вероятность выигрыша. Так, при выбрасывании двух кубиков куда выше шанс получить 7, чем 12.

Мультимодальное распределение помогает обнаружить ошибки в расчетах. Если мы построим кривую для анализа роста итальянцев, то, скорее всего, заметим в ней два пика; так станет очевидно, что полезно составлять отдельные графики для мужчин и женщин.

Как видите, чтобы разобраться в этой теме и не затеряться в серединке, достаточно уделить ей немного внимания.

¹ Перцентиль — значение антропометрического признака для сотой доли совокупности измеренных людей. Если кривую распределения всей совокупности измеренных людей разделить на 100 равных частей, то получим 99 площадей, в каждой из которых будет свое значение признака и частота ее встречаемости. Значение 50 окажется точно посередине.