> 20 человек прислуги и ставил их на стол, а человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили бочонки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху, по мере надобности, поднимали все это на стол при помощи веревок и блоков...

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливеру. Поверхность его тела больше, чем у лилипутов, в $12 \times 12 = 144$ раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т. п. Все это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему «было прикомандировано 300 портных-лилипутов с наказом сшить полную пару платья по местным образцам». (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчеты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Лишь изредка надлежащий масштаб у него не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются крупные ошибки.

> Один раз, — рассказывает Гулливер, — с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул ее над моей головой.
>
> Град яблок, величиной каждое с хороший бочонок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног...

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающий: ведь яблоко в 1728 раз тяжелее нашего, то есть весом в 80 кг, обрушилось с 12-кратной высоты! Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве лишь с натиском артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчете мускульной силы великанов. Мы уже видели в главе 1 первой книги («Геометрия на вольном воздухе», раздел «Шестиногие богатыри»), что мощь крупных животных не пропорциональна их размерам. Если применить приведенные там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше

силы Гулливера, вес их тела был больше в 1728 раз. И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и еще примерно такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчета.

ПОЧЕМУ ПЫЛЬ И ОБЛАКА ПЛАВАЮТ В ВОЗДУХЕ?

«Потому что они легче воздуха», — вот обычный ответ, который представляется многим до того бесспорным, что не оставляет никаких поводов к сомнению. Но такое объяснение, при всей его подкупающей простоте, совершенно ошибочно. Пылинки не только не легче воздуха, они тяжелее его в сотни, даже тысячи раз. Что такое «пылинка»? Мельчайшие частицы различных тяжелых тел: осколки камня или стекла, крупинки угля, дерева, металлов, волокна тканей и т. п. Разве все эти материалы легче воздуха? Простая справка в таблице удельных весов убедит вас, что каждый из них либо в несколько раз тяжелее воды, либо легче ее всего в 2–3 раза. А вода тяжелее воздуха раз в 800; следовательно, пылинки тяжелее его в несколько сот, если не тысяч раз. Теперь очевидна вся несообразность ходячего взгляда на причину плавания пылинок в воздухе.

Какова же истинная причина? Прежде всего надо заметить, что обычно мы неправильно представляем себе самое явление, рассматривая его как плавание. Плавают — в воздухе или жидкости — только такие тела, вес которых не превышает веса равного объема воздуха (или жидкости). Пылинки же превышают этот вес во много раз; поэтому плавать в воздухе они не могут. Они и не плавают, а парят, то есть медленно опускаются, задерживаемые в своем падении сопротивлением воздуха. Падающая пылинка должна проложить себе путь между частицами воздуха, расталкивая их или увлекая с собой. На то и на другое расходуется энергия падения. Расход тем значительнее, чем больше поверхность тела (точнее — площадь поперечного сечения) по сравнению с весом. При падении крупных массивных тел мы не замечаем замедляющего действия сопротивления воздуха, так как их вес значительно преобладает над противодействующей силой.

Но посмотрим, что происходит с уменьшением тела. Геометрия поможет нам разобраться в этом. Нетрудно сообразить, что с уменьшением объема тела вес уменьшается гораздо больше, чем площадь поперечного сечения: уменьшение веса пропорционально третьей степени линейного сокращения, а ослабление сопротивления пропорционально поверхности, то есть второй степени линейного уменьшения. Вообразите, что шар заменен другим, поперечник которого в 10 раз меньше: объем его меньше, чем у крупного шара, в $10 \times 10 \times 10 = 1000$ раз, а поверхность — только в $10 \times 10 = 100$ раз. Теперь понятно, почему для весьма мелких крупинок сопротивление воздуха так значительно по сравнению с их весом, и почему скорость их падения уменьшается до едва заметной величины. Водяная капелька радиусом 0,001 мм падает в воздухе равномерно со скоростью 0,1 мм в секунду; достаточно ничтожного, неуловимого для нас волнения воздуха, чтобы помешать такому медленному падению. Вот почему в комнатах, где много ходят, пыли осаждается меньше, чем в нежилых помещениях, а днем меньше, чем ночью, — хотя, казалось бы, должно происходить обратное: осаждению мешают возникающие в воздухе вихревые течения, которых обычно почти не бывает в спокойном воздухе мало посещаемых помещений.

Если каменный кубик в 1 см высотой раздробить на кубические пылинки высотою в 0,0001 мм, то общая поверхность той же массы камня увеличится в 10 000 раз и во столько же раз возрастет сопротивление воздуха ее движению. Пылинки нередко достигают именно таких размеров, и понятно, что сильно возросшее сопротивление воздуха совершенно меняет картину падения.

По той же причине «плавают» в воздухе облака. Давно отвергнут устарелый взгляд, будто облака состоят из водяных пузырьков, наполненных водяным паром. Облака — это скопление огромного множества чрезвычайно мелких, но сплошных водяных капелек. Капельки эти, хотя тяжелее воздуха примерно в 800 раз, все же почти не падают; опускаются с едва заметною скоростью. Сильно замедленное падение объясняется, как и для пылинок, огромной их поверхностью по сравнению с весом.

Главная причина, обусловливающая все эти явления, — присутствие воздуха: в пустоте и пылинки, и облака (если бы могли существовать) падали бы столь же стремительно, как и тяжелые камни.

Глава 4

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИЯ

КАК ПАХОМ ПОКУПАЛ ЗЕМЛЮ

Эту главу — необычное название которой станет понятно читателю из дальнейшего — начнем отрывком из общеизвестного рассказа Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно».

— А цена какая будет? — говорит Пахом.

— Цена у нас одна: 1000 руб. за день.

Не понял Пахом.

— Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

— Мы этого, говорит, не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена 1000 руб.

Удивился Пахом.

— Да ведь это, — говорит, — в день обойти, земли много будет.

Засмеялся старшина.

— Вся твоя, — говорит. — Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

— А как же, — говорит Пахом, — отметить, где я пройду?

— А мы станем на место, где ты облюбуешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скребку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дернички клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.

Разошлись башкирцы. Обещались завтра на зорьке собраться, до солнца на место выехать.

Приехали в степь, заря занимается. Подошел старшина к Пахому, показал рукой.

— Вот, — говорит, — все наше, что глазом окинешь. Выбирай любую.

Снял старшина шапку лисью, поставил на землю.

— Вот, — говорит, — метка будет. Отсюда поди, сюда приходи. Что обойдешь, все твое будет.

Только брызнуло из-за края солнце, вскинул Пахом скребку на плечо и пошел в степь.

Отошел с версту, остановился, вырыл ямку. Пошел дальше. Отошел еще, вырыл еще другую ямку.

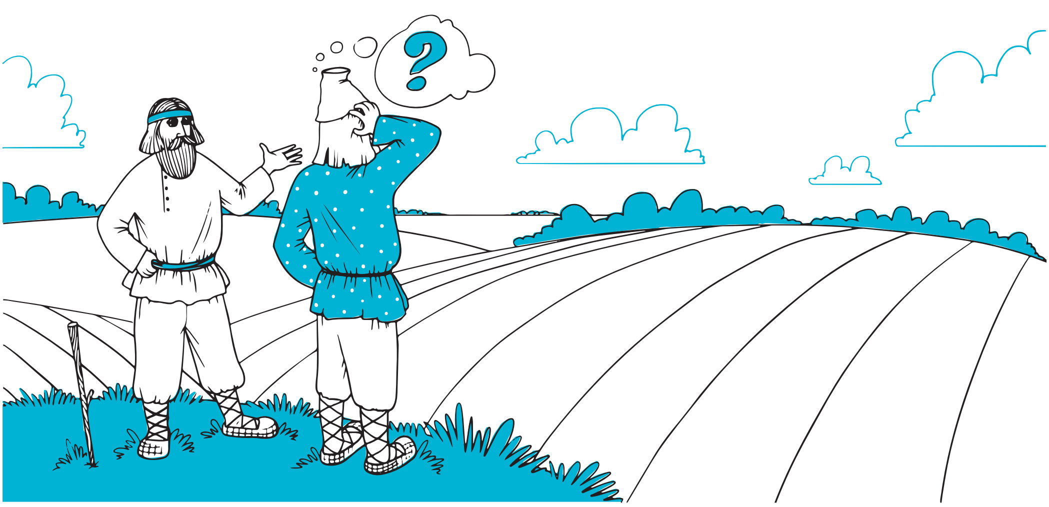
Верст 5 прошел. Взглянул на солнышко, — уже время об завтраке. «Одна упряжка прошла, — думает Пахом.— А их четыре во дню, рано еще заворачивать. Дай пройду еще верст пяток, тогда влево загибать начну». Пошел еще напрямик. «Ну, — думает, — в эту сторону довольно забрал; надо загибать». Остановился, вырыл ямку побольше и загнул круто влево.

Прошел еще и по этой стороне много; загнул второй угол. Оглянулся Пахом на шихан (бугорок): от тепла затуманился, а сквозь мару чуть виднеются люди на шихане. «Ну, — думает, — длинны стороны взял, надо эту покороче взять». Пошел третью сторону. Посмотрел на солнце, — уж оно к полднику подходит, а по третьей стороне всего версты две прошел. И до места все те же верст 15. «Нет, — думает, — хоть кривая дача будет, а надо прямиком поспевать».

Вырыл Пахом поскорее ямку и повернул прямиком к шихану.

Идет Пахом прямо на шихан, и тяжело уж ему стало. Отдохнуть хочется, а нельзя, — не поспеешь дойти до заката. А солнце уж недалеко от края.

Идет так Пахом; трудно ему, а все прибавляет да прибавляет шагу. Шел, шел, — все еще далеко; побежал рысью... Бежит Пахом,



рубаха и портки от пота к телу липнут, во рту пересохло. В груди как меха кузнечные раздуваются, а сердце молотком бьет.

Бежит Пахом из последних сил, а солнце уж к краю подходит. Вот-вот закатываться станет.

Солнце близко, да и до места уж вовсе не далеко. Видит шапку лисью на земле и старшину, как он на земле сидит.

Взглянул Пахом на солнце, а оно до земли дошло, уже краешком заходить стало. Наддал из последних сил Пахом, надулся, взбежал на шихан. Видит — шапка. Подкосились ноги, и упал он наперед руками, до шапки достал.

— Ай, молодец! — закричал старшина: — Много земли завладел.

Подбежал работник, хотел поднять его, а у него изо рта кровь течет, и он мертвый лежит...

Задача Льва Толстого (№ 16)

Отвлечемся от мрачной развязки этой истории и остановимся на ее геометрической стороне. Можно ли установить по данным, рассеянным в этом рассказе, сколько примерно десятин земли обошел Пахом? Задача — на первый взгляд как будто неразрешимая — решается, однако, довольно просто.

Решение

Внимательно перечтя рассказ и извлекая из него все геометрические указания, нетрудно убедиться, что полученных данных вполне достаточно для исчерпывающего ответа на поставленный вопрос. Можно даже начертить план обойденного Пахомом земельного участка.

Прежде всего из рассказа ясно, что Пахом бежал по сторонам четыреугольника. О первой стороне его читаем:

«Верст пять прошел... Пройду еще верст пяток, тогда влево загибать...»

Значит, первая сторона четырехугольника имела в длину около 10 верст[1].

О второй стороне, составляющей прямой угол с первой, численных указаний в рассказе не сообщается. Сказано, впрочем, что сторона эта короче первой (*«Надо эту покороче взять»*).

[1] Верста — 1067 м. — *Примеч. ред.*

Длина третьей стороны — очевидно, перпендикулярной ко второй — указана в рассказе прямо: *«По третьей стороне всего версты две прошел»*.

Непосредственно дана и длина четвертой стороны: *«До места все те же верст 15»*[1].

По этим данным мы и можем начертить план обойденного Пахомом участка (рис. 37, *а*). В полученном четырехугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$ верстам; $CD = 2$ в.; $AD = 15$ в.; углы B и C — прямые. Длину же x неизвестной стороны BC нетрудно вычислить, если провести из D перпендикуляр DE на AB (рис. 37, *б*). Тогда в прямоугольном треугольнике AED нам известны катет $AE = 8$ в. и гипотенуза $AD = 15$ в. Неизвестный катет $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 12{,}7$ в.

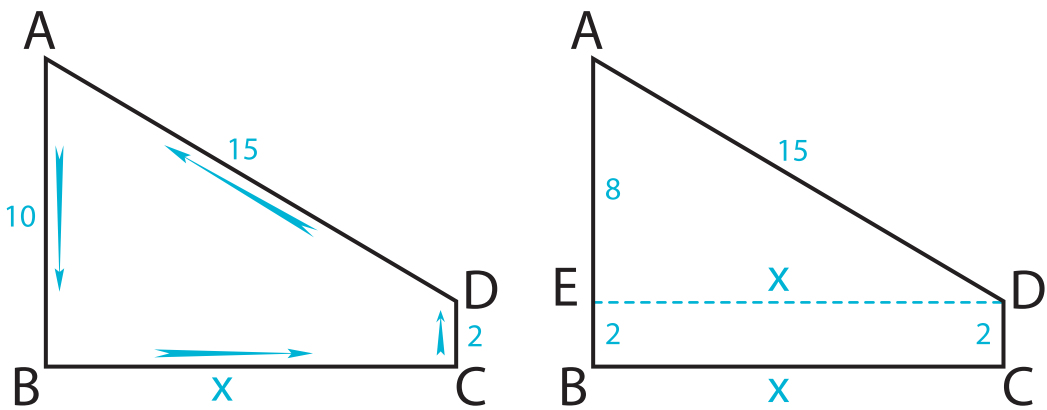


Рис. 37. План участка

Итак, вторая сторона имела в длину около 13 верст. Как видим, Пахом (или Л. Н. Толстой) ошибся, считая вторую сторону короче первой.

Теперь легко вычислить и площадь трапеции $ABCD$, состоящей из прямоугольника $EBCD$ и прямоугольного треугольника AED. Она равна

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ кв. верст.}$$

[1] Здесь непонятно, однако, как мог Пахом с такого расстояния различать людей на шихане.

Вычисление по формуле трапеции дало бы, конечно, тот же результат:

$$\frac{AB+CD}{2}\times BC=\frac{10+2}{2}\times 13=78 \text{ кв. верст.}$$

Мы узнаем, что Пахом обежал обширный участок площадью в 78 кв. верст, или около 8000 десятин. Десятина обошлась ему в $12\frac{1}{2}$ копеек.

ТРАПЕЦИЯ ИЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

Задача № 17

В роковой для своей жизни день Пахом прошел 10 + 13 + 2 + + 15 = 40 верст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчета. Интересно определить: выгадал ли он или прогадал оттого, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае он должен был получить бóльшую площадь земли?

Решение

Прямоугольников с обводом 40 верст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь. Вот ряд примеров:

14 × 6 = 84 кв. верст
13 × 7 = 91 —//—
12 × 8 = 96 —//—
11 × 9 = 99 —//—

Мы видим, что у всех этих фигур, при одном и том же периметре в 40 верст, площадь больше, чем у нашей трапеции. Однако, возможны и такие прямоугольники с периметром в 40 верст, площадь которых меньше, чем у трапеции:

18 × 2 = 36 кв. верст
19 × 1 = 19 —//—
$19\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=9\frac{3}{4}$ —//—

Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определенного ответа. Есть прямоугольники с большей площадью, чем трапеция, но есть и с меньшей, при одном и том же обводе. Зато можно дать вполне определенный ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь? Сравнивая наши прямоугольники, мы замечаем, что чем меньше разница в длине сторон, тем площадь прямоугольника больше. Естественно заключить, что, когда этой разницы не будет вовсе, то есть когда прямоугольник превратится в квадрат, площадь фигуры достигнет наибольшей величины. Она будет равна тогда $10 \times 10 = 100$ кв. верст. Легко видеть, что этот квадрат действительно превосходит по площади любой прямоугольник одинакового с ним периметра. Пахому следовало идти по сторонам квадрата, чтобы получить участок наибольшей площади, — на 22 кв. версты больше, чем он успел охватить.

ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО КВАДРАТА

Замечательное свойство квадрата — заключать в своих границах наибольшую площадь по сравнению со всеми другими прямоугольниками того же периметра — многим неизвестно. Приведем поэтому строгое доказательство этого положения.

Обозначим периметр прямоугольной фигуры через P. Если взять квадрат с таким периметром, то каждая сторона его должна равняться $\frac{P}{4}$. Докажем, что, укорачивая одну его сторону на какую-нибудь величину b, при таком же удлинении смежной стороны, мы получим прямоугольник строго одинакового с ним периметра, но меньшей площади. Другими словами, докажем, что площадь $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ квадрата больше площади $\left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right)$ прямоугольника:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right).$$

Так как правая сторона этого неравенства равна $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$, то все выражение принимает вид

$$O > -b^2, \text{ или } b^2 > 0.$$

Но последнее неравенство очевидно: квадрат всякого количества, положительного или отрицательного, больше 0. Следовательно, справедливо и первоначальное неравенство, которое привело нас к этому.

Итак, квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с таким же периметром.

Отсюда следует, между прочим, и то, что из всех прямоугольных фигур с одинаковыми площадями квадрат имеет *наименьший периметр*. В этом можно убедиться следующим рассуждением. Допустим, что это неверно и что существует такой прямоугольник A, который, при равной с квадратом B площади, имеет периметр меньший, чем у него. Тогда, начертив квадрат C того же периметра, как у прямоугольника A, мы получим квадрат, имеющий бо́льшую площадь, чем у A, и, следовательно, бо́льшую, чем у квадрата B. Что же у нас вышло? Что квадрат C имеет периметр меньший, чем квадрат B, а площадь бо́льшую, чем он. Это, очевидно, невозможно: раз сторона квадрата меньше, то и площадь должна быть меньше. Значит, нельзя было допустить существования прямоугольника A, который при одинаковой площади имеет периметр меньший, чем у квадрата. Другими словами, из всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Знание этих свойств квадрата помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы и получить прямоугольный участок наибольшей площади. Зная, что он может пройти в день без напряжения, скажем, 36 верст, он пошел бы по границе квадрата со стороной 9 верст и к вечеру был бы обладателем участка в 81 кв. версту, — на 3 кв. версты больше, чем он получил со смертельным напряжением сил. И наоборот, если бы он наперед ограничился какою-нибудь определенною площадью прямоугольного участка, например, в 36 кв. верст, то мог бы достичь результата с наименьшей затратой сил, идя по границе квадрата, сторона которого — 6 верст.

УЧАСТКИ ДРУГОЙ ФОРМЫ

Но, может быть, Пахому еще выгоднее было бы выкроить себе участок вовсе не прямоугольной формы, а какой-нибудь другой — четырехугольной, треугольной, пятиугольной и т. д.?

Этот вопрос может быть рассмотрен строго математически; однако, из опасения утомить нашего добровольного читателя, мы не станем входить здесь в это рассмотрение и познакомим его только с результатами.

Можно доказать, во-первых, что из всех *четырехугольников* с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому, желая иметь четырехугольный участок, Пахом никакими ухищрениями не мог бы овладеть более, чем 100 кв. верстами (считая, что максимальный дневной пробег его — 40 верст).

Во-вторых, можно доказать, что квадрат имеет бо́льшую площадь, чем всякий треугольник равного периметра. Равносторонний треугольник такого же периметра имеет сторону $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ версты, а площадь (по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где S — площадь, а a — сторона) —

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ кв. верст},$$

то есть меньше даже, чем у той трапеции, которую Пахом обошел. Дальше (в разделе «Треугольник с наибольшей площадью») будет доказано, что из всех треугольников с равными периметрами равносторонний обладает наибольшей площадью. Значит, если даже этот наибольший треугольник имеет площадь, меньшую площади квадрата, то и все прочие треугольники того же периметра по площади меньше, чем квадрат.

Но если будем сравнивать площадь квадрата с площадью пятиугольника, шестиугольника и т. д. равного периметра, то здесь первенство его прекращается: правильный пятиугольник обладает большею площадью, правильный шестиугольник — еще большей, и т. д. Легко убедиться в этом на примере правильного шестиугольника. При периметре 40 верст, его сторона $\frac{40}{6}$, площадь (по формуле $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ равна —

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3}=115{,}5 \text{ кв. версты.}$$

Избери Пахом для своего участка форму правильного шестиугольника, он, при том же напряжении сил, овладел бы площадью на 115,5 – 78, то есть на 37,5 кв. версты больше, чем в действительности, и на 15,5 кв. версты больше, чем дал бы ему квадратный участок. (Но для этого, конечно, пришлось бы ему пуститься в путь с землемерными инструментами.)

Задача № 18

Из шести спичек сложить фигуру с наибольшей площадью.

Решение

Из шести спичек можно составить довольно разнообразные фигуры: равносторонний треугольник, прямоугольник, множество параллелограммов, целый ряд неправильных пятиугольников, ряд неправильных шестиугольников и, наконец, правильный шестиугольник. Геометр, не сравнивая между собою площадей этих фигур, заранее знает, какая фигура имеет наибольшую площадь: правильный шестиугольник.

ФИГУРА С НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

Можно бы доказать строго геометрически, что чем больше сторон у правильного многоугольного участка, тем большую площадь заключает он в одних и тех же границах. А самую большую площадь при данном периметре охватывает окружность. Если бы Пахом бежал по кругу, то, пройдя те же 40 верст, он получил бы площадь в

$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2=127{,}2 \text{ кв. версты.}$$

Большей площадью, при данном периметре, не может обладать никакая другая фигура, безразлично — прямолинейная или криволинейная.

Мы позволим себе несколько остановиться на этом удивительном свойстве круга заключать в своих границах большую площадь, чем всякая другая фигура любой формы, имеющая тот же периметр. Может быть, некоторые читатели полюбопытствуют узнать, каким способом доказываются подобные положения. Приводим далее доказательство — правда, не вполне строгое — этого свойства круга, доказательство, предложенное знаменитым германским математиком Яковом Штейнером. Оно довольно длинное, но те, кому оно покажется утомительным, могут пропустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

Надо доказать, что фигура, имеющая при данном периметре наибольшую площадь, есть круг. Прежде всего установим, что искомая фигура должна быть выпуклой. Это значит, что всякая ее хорда должна полностью располагаться внутри фигуры. Пусть у нас имеется фигура $AaBC$ (рис. 38), имеющая внешнюю хорду AB. Заменим дугу a дугой b, симметричной с ней. От такой замены периметр фигуры ABC не изменится, площадь же явно увеличится. Значит, фигуры вроде $AaBC$ не могут быть теми, которые при одинаковом периметре заключают наибольшую площадь.

Итак, искомая фигура есть фигура *выпуклая*. Далее, мы можем наперед установить еще и другое свойство этой фигуры: всякая хорда, которая делит пополам ее периметр, рассекает пополам и ее площадь. Пусть фигура $AMBN$ (рис. 39) есть искомая, и пусть хорда MN делит ее периметр пополам. Докажем, что площадь

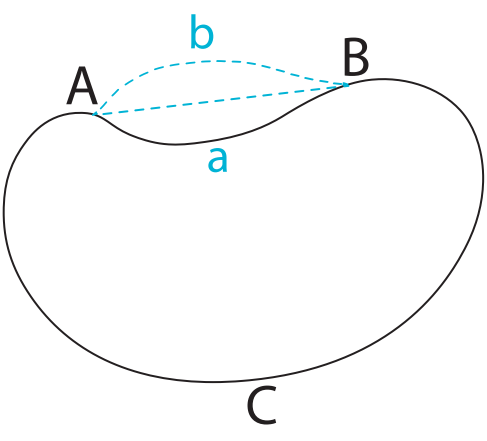


Рис. 38. Фигура с наибольшей площадью — выпуклая

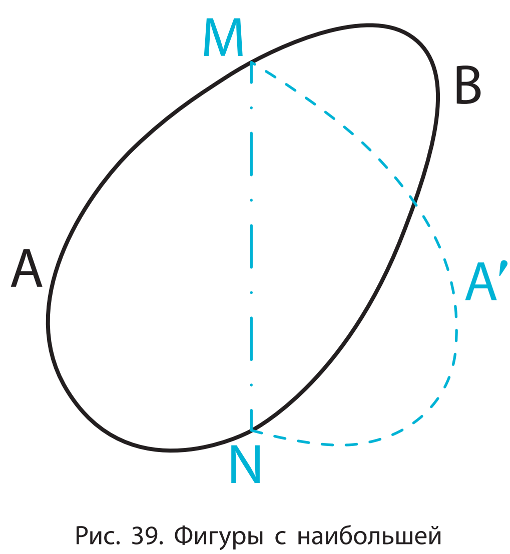


Рис. 39. Фигуры с наибольшей площадью можно разделить пополам

AMN равна площади *MBN*. В самом деле, если бы какая-либо из этих частей была по площади больше другой, — например, $AMN > MNB$, то, перегнув фигуру *AMN* по *MN*, мы получили бы фигуру *AMA'N*, площадь которой больше, чем у первоначальной фигуры *AMBN*, периметр же одинаков с нею. Значит, фигура *AMBN*, в которой хорда, рассекающая периметр пополам, делит площадь на неравные части, не может быть искомая (то есть не может иметь *наибольшую* площадь при данном периметре).

Прежде чем идти далее, докажем еще следующую вспомогательную теорему: из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого стороны эти заключают прямой угол. Чтобы доказать это, вспомним тригонометрическое выражение площади S треугольника со сторонами a и b и углом между ними C:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Выражение это будет, очевидно, наибольшим (при данных сторонах) тогда, когда $\sin C$ примет наибольшее значение, то есть будет равен единице. Но угол, синус которого равен 1, есть прямой, — что и требовалось доказать.

Теперь можем приступить к основной задаче — к доказательству того, что из всех фигур с периметром p наибольшую площадь ограничивает круг. Чтобы убедиться в этом, попробуем допустить существование некруговой выпуклой фигуры *MANB* (рис. 40), которая обладает этим свойством. Проведем в ней хорду *MN*, делящую пополам ее периметр; она же — как мы уже знаем — разделит пополам и площадь фигуры. Перегнем половину *MAN* по линии *MN* так, чтобы она расположилась симметрично (*MA'N*). Заметим, что фигура *MANA'* обладает тем же периметром и той же площадью, что и первоначальная фигура *MANB*. Так как дуга *MAN* не есть полуокружность (иначе нечего было бы и доказывать), то на ней должны находиться такие точки, из которых отрезок *MN* виден не под прямым углом. Пусть *K* такая точка, а *K'* — ей симметричная, то есть углы *K* и *K'* — не прямые. Раздвигая (или сдвигая) стороны *MK*, *KN*, *M'K*, *NK'* мы можем сделать заключенный между ними угол прямым и получим тогда равные прямоугольные треугольники. Эти треугольники приложим друг к другу гипотенузами, как на рисунке 41, и присоединим к ним в соответствующих местах заштрихованные сегменты.

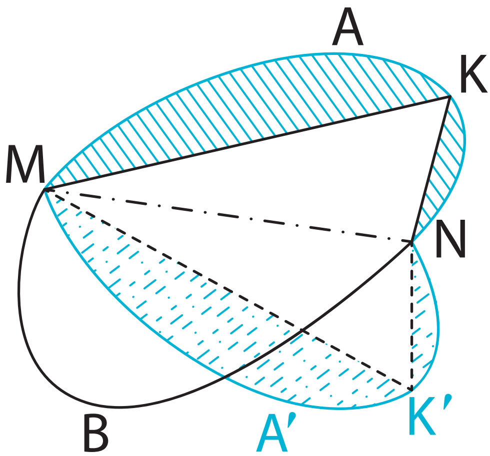


Рис. 40. Фигура с наибольшей площадью: проверка

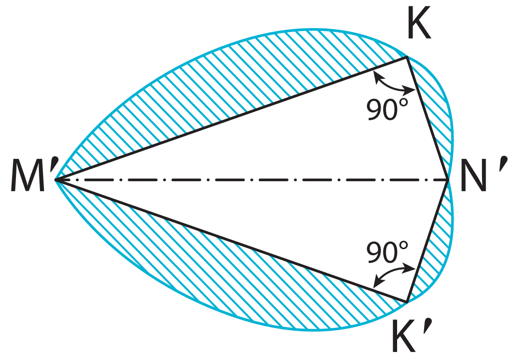


Рис. 41. Фигура с наибольшей площадью: проверка

Получим фигуру $M'KN'K'$, обладающую тем же периметром, что и первоначальная, но, очевидно, большей площадью (потому что прямоугольные треугольники $M'KN'$ и $M'K'N'$ имеют большую площадь, чем непрямоугольные MKN и $MK'N$). Значит, никакая некруговая фигура не может обладать при данном периметре наибольшею площадью. И только в случае круга мы указанным способом не могли бы построить фигуры, имеющей при том же периметре еще большую площадь.

Вот каким способом можно доказать, что круг есть фигура, обладающая при данном периметре наибольшей площадью.

Легко доказать справедливость и такого положения: из всех фигур равной площади круг имеет наименьший периметр. Для этого нужно лишь применить к кругу те рассуждения, которые мы раньше приложили к квадрату (см. раздел «Замечательное свойство квадрата»).

ГВОЗДИ

Задача № 19

Какой гвоздь должен крепче держаться — круглый, квадратный или треугольный, — если они забиты одинаково глубоко и имеют одинаковую площадь поперечного сечения?

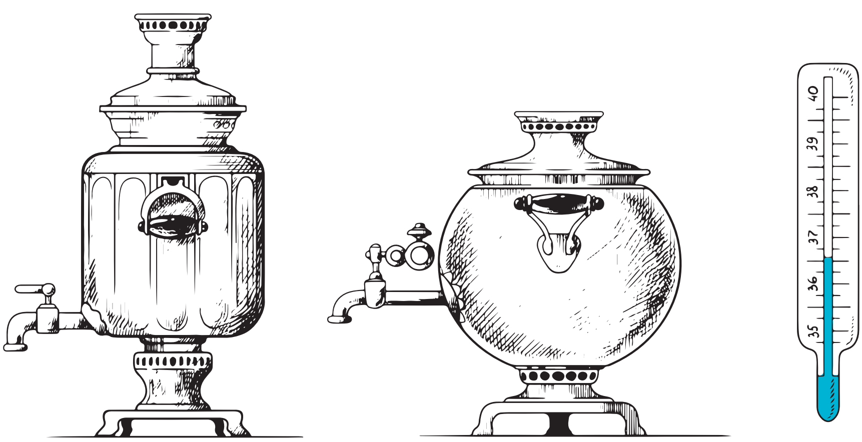
Решение

Будем исходить из того, что крепче держится тот гвоздь, который соприкасается с окружающим материалом по большей поверхности. У какого же из наших гвоздей бо́льшая боковая поверхность? Мы уже знаем, что при равных площадях периметр квадрата меньше периметра треугольника, а окружность меньше периметра квадрата. Если сторону квадрата принять за единицу, то вычисление дает для этих трех величин значения: 4,53; 4; 3,55. Следовательно, крепче других должен держаться треугольный гвоздь.

Таких гвоздей, однако, не изготовляют, — по крайней мере, в продаже они не встречаются. Причина кроется, вероятно, в рутинной приверженности покупателей к старым привычным образцам.

ТЕЛО НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Свойством, сходным со свойством круга, обладает и шаровая поверхность: она обхватывает наибольший объем при данной величине поверхности. И, наоборот, из всех тел одинакового объема наименьшую поверхность имеет шар. Эти свойства не лишены значения в практической жизни. Шарообразный самовар обладает меньшей поверхностью, чем цилиндрический или какой-либо иной формы, вмещающий столько же стаканов; а так как тело теряет теплоту только с поверхности, то шарообразный самовар остывает медленнее, чем всякий другой того же объема. Напротив, резервуар градусника быстрее нагревается и охлаждается (то есть



принимает температуру окружающих предметов), когда ему придают форму не шарика, а цилиндра.

По той же причине земной шар, — если он действительно состоит из твердой оболочки и жидкого ядра, — должен уменьшаться в объеме, то есть сжиматься, уплотняться, от всех причин, изменяющих форму его поверхности: его внутреннему содержимому должно становиться тесно всякий раз, когда наружная его форма претерпевает какое-либо изменение, отклоняясь от шара. Возможно, что этот геометрический факт находится в связи с землетрясениями и вообще с тектоническими явлениями; но об этом должны иметь суждение геологи.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Задачи в роде тех, которыми мы сейчас занимались, рассматривают вопрос со стороны как бы экономической: при данной затрате сил (например, при прохождении 40-верстного пути) как достигнуть наивыгоднейшего результата (охватить наибольший участок)? Отсюда и заглавие настоящего отдела этой книги: «Геометрическая экономия». Но это — вольность популяризатора; в математике вопросы подобного рода носят другое название: задачи «на максимум и минимум». Они могут быть весьма разнообразны по сюжетам и по степени трудности. Многие разрешаются лишь приемами высшей математики, но немало есть и таких, для решения которых достаточно самых элементарных сведений. В дальнейшем будет рассмотрен ряд подобных задач из области геометрии, которые мы будем решать, пользуясь одним любопытным свойством произведения равных множителей.

Для случая двух множителей свойство это уже знакомо нам. Мы знаем, что площадь квадрата больше, чем площадь всякого прямоугольника такого же периметра. Если перевести это геометрическое положение на язык арифметики, оно будет означать следующее: когда требуется разбить число на две такие части, чтобы произведение их было наибольшим, то следует делить пополам. Например, из всех произведений

13×17, 16×14, 12×18, 11×19, 10×20, 15×15 и т. д., сумма множителей которых равна 30, наибольшим будет 15×15 — даже если сравнивать и произведения дробных чисел ($14\frac{1}{2} \times 15\frac{1}{2}$ и т. п.).

То же справедливо и для произведений трех множителей, имеющих постоянную сумму: произведение их достигает наибольшей величины, когда множители равны между собою. Это прямо вытекает из предыдущего. Пусть три множителя x, y, z в сумме равны a:

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что x и y не равны между собой. Если заменим каждый из них полусуммой $\frac{x+y}{2}$, то сумма множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но так как, согласно предыдущему,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

то произведение трех множителей

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z$$

больше произведения xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z > xyz.$$

Вообще, если среди множителей xyz есть хотя бы два неравных, то можно всегда подобрать числа, которые, не изменяя общей суммы, дадут большее произведение, чем xyz. И только когда все три множителя равны, произвести такую замену нельзя. Следовательно, при $x + y + z = a$ произведение xyz будет наибольшим тогда, когда

$$x = y = z.$$

Воспользуемся теперь знанием этого свойства равных множителей, чтобы решить несколько интересных задач.

ТРЕУГОЛЬНИК С НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

Задача № 20

Какую форму нужно придать треугольнику, чтобы при данной сумме его сторон он имел наибольшую площадь?

Мы уже заметили раньше (в разделе «Участки другой формы»), что этим свойством обладает треугольник равносторонний. Но как это доказать?

Решение

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c и периметром $a + b + c = 2p$ выражается, как известно из курса геометрии, так:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Площадь S треугольника будет наибольшей тогда же, когда станет наибольшей величиной и ее квадрат S^2, или выражение $\frac{S^2}{p}$, где p, полупериметр, есть, согласно условию, величина неизменная. Но так как обе части равенства получают наибольшее значение одновременно, то вопрос сводится к тому, при каком условии произведение

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

становится наибольшим. Заметив, что сумма этих трех множителей есть величина постоянная,

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p,$$

мы заключаем, что произведение их достигнет наибольшей величины тогда, когда множители станут равны, то есть когда осуществится равенство

$$p - a = p - b = p - c,$$