I. ИГРЫ С ШАШКАМИ

Знаменитый шотландский ученый и профессор физико-математических наук Тэйт, путешествуя по железной дороге, развлекался, между прочим, следующей интересной игрой. Он вынимал из кармана 4 золотые монеты и 4 серебряные, затем клал их в ряд в переменном поеядке, то есть золотую монету и серебряную, золотую и серебряную и т. д., пока не раскладывал все 8 монет, оставив слева такое свободное место, на котором могли бы уместиться еще две монеты и не более. Вслед за тем он задавал себе такую задачу.

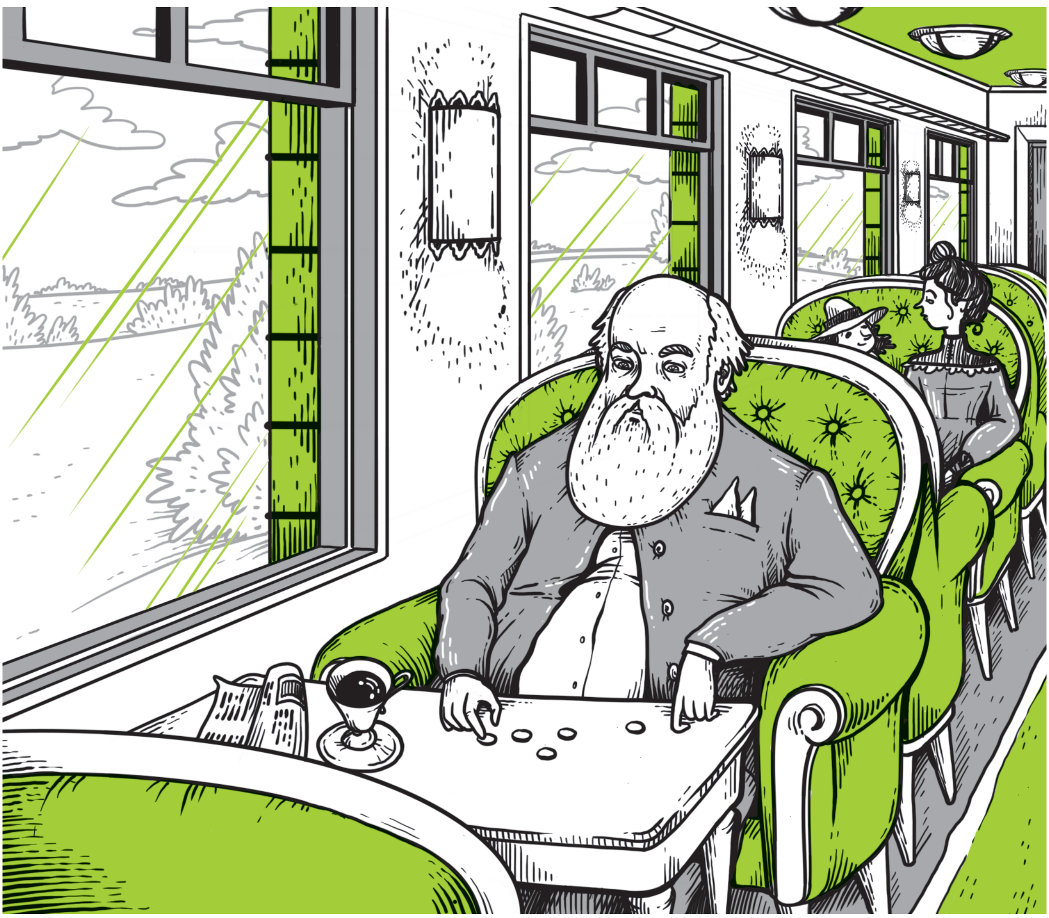

Рис. 1

Перемещать только две рядом лежащие монеты, не изменяя их взаимного расположения и пользуясь для этого свободным местом для двух монет так, чтобы после четырех всего таких перемещений оказались рядом 4 золотые монеты, а за ними следовали 4 серебряные.

Попробуйте сделать это! Если у вас нет, что очень может быть, золотых и серебряных монет, то, может быть, найдутся серебряные и медные… Сущность задачи ведь от этого не меняется! Или, может быть, у вас совсем нет монет — да еще целых восьми? Тогда ничто не мешает вам воспользоваться черными и белыми шашками, взяв их по четыре. А если нет и шашек, то ничто не помешает вам сделать 4 кружочка (жетона) черных и 4 красных или белых из бумаги, картона или дерева и попытаться решить предложенную задачу. Возьмите, наконец, 4 красные и 4 черные карты.

При всей своей видимой простоте задача эта не так-то легка, особенно если увеличивать число пар монет, жетонов, кружочков или карт, то есть если вместо 8 взять их 10, 12, 14 и т. д. Начнем с такой задачи:

1. ЧЕТЫРЕ ПАРЫ

Взяты 4 белых и 4 черных шашки и положены в ряд в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д.

Можно пользоваться свободным местом только для двух шашек и можно на это свободное место перемещать только две рядом лежащие шашки, не меняя порядка, в котором они лежат. Требуется в четыре перемещения шашек попарно переместить их так, чтобы оказались подряд 4 черные и затем 4 белые шашки. (Помните, что всюду вместо шашек можно брать разного цвета кружки или жетоны, или монеты и т. д.)

Рис. 2

2. ПЯТЬ ПАР

Кладут в ряд 5 белых и 5 черных шашек в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д.

Требуется, пользуясь двумя свободными местами и перемещая на них по две шашки без изменения их взаимного положения, в пять перемещений расположить их так, чтобы белые шашки были с белыми, а черные — с черными.

Рис. 3

3. ШЕСТЬ ПАР

Положены в ряд в переменном порядке шесть белых и шесть черных шашек: белая, черная, белая, черная и т. д. Пользуясь двумя свободными местами, требуется, передвигая каждый раз только по две шашки без изменения их взаимного положения, в шесть перемещений расположить черные шашки с черными, а белые с белыми.

Рис. 4

4. СЕМЬ ПАР

Кладут в ряд 7 белых и 7 черных шашек в переменном порядке: белая, черная, белая, черная и т. д. Пользуясь свободным местом для двух шашек, требуется, передвигая каждый раз только по две шашки без изменения их взаимного положения, в семь перемещений расположить черные шашки с черными, а белые с белыми.

Рис. 5

5. ПЯТЬ ЛИНИЙ, 10 ШАШЕК

Начертите на бумаге пять прямых линий и разложите на них 10 шашек так, чтобы на каждой линии лежало по 4 шашки.

II. ВОЛШЕБНЫЕ КВАДРАТЫ

В квадрате, состоящем из n^2 клеток, напишем все числа от единицы до n^2. Если суммы чисел в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали одинаковы, то такой квадрат называется волшебным.

Из каждого волшебного квадрата поворачиванием и переворачиванием можно составить еще семь новых волшебных квадратов.

6. РАССТАВИТЬ ДЕВЯТЬ ЧИСЕЛ

Расположить в три ряда девять чисел от единицы до девятки (можно использовать игральные карты, где роль единицы пусть играет туз) так, чтобы число очков каждого ряда, считая справа налево (горизонтально), сверху вниз (вертикально) и с угла на угол (по диагоналям) было одинаково.

Полученный квадрат и есть то, что называется волшебным квадратом из девяти клеток. В нем сумма чисел каждого ряда, столбца и диагонали = 15. Можно также для решения этой задачи взять соответствующие кости домино.

Если в данном примере заменить единицу двойкой, двойку — тройкой, тройку — четверкой и т. д., наконец, девятку — десяткой, то получим тоже волшебный квадрат, в каждом ряду, столбце и диагонали которого заключается 18 очков.

7. В 25 КЛЕТОК

Расположить 25 чисел, начиная от 1 до 25, в виде квадрата с 25 клетками так, чтобы в каждом вертикальном, в каждом горизонтальном ряду и с угла на угол (по обеим диагоналям) получились одинаковые суммы.

8. РАСКЛАДКА КАРТ

Взято по четыре «старшие» карты каждой масти (туз, король, дама и валет каждой масти). Требуется эти 16 карт расположить в виде четырехугольника так, чтобы в каждом горизонтальном, в каждом вертикальном ряду и в каждой диагонали находились в каком-либо порядке туз, король, дама, валет и притом разных мастей.

III. ДОМИНО

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Предполагают, что игра «домино» перешла к нам от индусов или древних греков. Действительно, простота этой игры наводит на мысль, что она придумана еще в очень отдаленные времена, на первых ступенях цивилизации. Что касается названия самой игры, то филологи находятся относительно этого в разногласии. Иные ищут его корень в древних наречиях, но вероятнее всего такое предположение. Игра в домино в прежние времена была дозволена в монастырях и религиозных общинах. Но всякое дело начиналось там, как известно, с восхваления имени Божия. И когда игрок выставлял первую кость, он произносил: *benedicamus Domino* (бенедикамус Домино), то есть «восхвалим Господа». Или произносилось *Domino gratias* (Домино гратиас), то есть «благодарение Господу». Отсюда и получилось в сокращении просто слово «домино».

Чаще всего игра состоит из 28 домино, образующих все комбинации по два из семи чисел:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Рис. 6

СРЕДНЕЕ

Если взять сумму всех очков, содержащихся во всей игре домино, то окажется 168 очков. Если это число поделить на число домино (костяшек), то получим среднее каждой «кости», или плитки. Это среднее, как видим, равно 6, и оно останется таким же, если мы отбросим все «двойняшки», то есть двойные домино, как 6–6, 5–5, 4–4 и т. д. Это можно проверить непосредственно. В самом деле, всех «двойняшек» в игре семь (6–6, 5–5, 4–4, 3–3, 2–2, 1–1, 0–0), а число заключающихся в них очков оказывается равным 42:

$$6 + 6 + 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 = 42.$$

Вычитая число 42 из общего числа очков всей игры 168, получаем 126, деля же это последнее число на число оставшихся домино, то есть на 21 $(28 - 7 = 21)$, получаем опять среднее 6.

Есть игры домино с большим количеством костей. Так, можно составить игру, где наибольшая кость будет 7–7, и тогда всех костей будет 36. В игре, где наибольшее — 8–8, всех домино будет 45 и т. д. И во всех таких играх одна и та же последовательность. Среднее для игры, в которой наибольшее домино есть 7–7, будет семь, для 8–8 — восемь и т. д.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДОМИНО

Если возьмем два домино (обыкновенной игры, где наивысшая кость 6–6) таких, что числа очков квадратиков в одном дополняют числа очков квадратиков в другом до шести, то такие домино называются *дополнительными* друг другу. Так, например, домино 2–3 и 4–3 будут дополнительными друг другу, как и домино 1–2 и 5–4, 1–4 и 5–2 и т. д.

В рассматриваемой нами обыкновенной игре из 28 костей есть четыре кости: 0–6, 1–5, 2–4 и 3–3, которые *дополняют сами себя*, то есть не имеют других дополнительных.

Если взять для всей игры все ее дополнительные домино, то получим ту же игру, в другом только порядке.

9. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Посредством плиток домино доказать Пифагорову теорему[1].

10. ВОЛШЕБНЫЙ КВАДРАТ ИЗ 9 КОСТЯШЕК

Расположить семь единиц и еще две кости домино в квадрате с девятью ячейками так, чтобы сумма очков домино, считая их по столбцам (вертикально), по строкам (горизонтально) и по диагоналям была постоянно одна и та же.

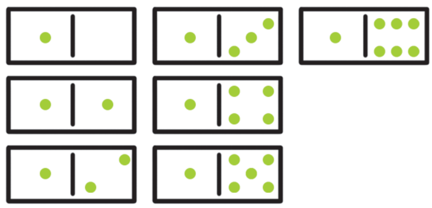

Рис. 7

11. ВОЛШЕБНЫЙ КВАДРАТ ИЗ 16 КОСТЯШЕК

Взяты все нули и единицы домино и к ним прибавлены еще три подходящие кости. Расположить 16 костей на 16 ячейках квадрата так, чтобы сумма очков, считаемых вертикально, горизонтально и по обеим диагоналям, была одинакова.

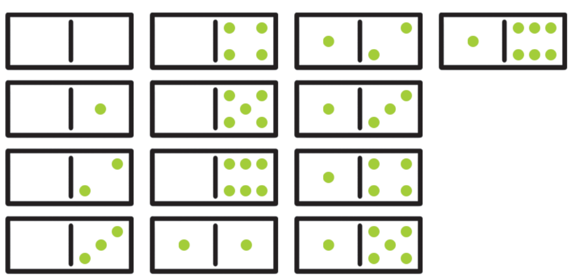

Рис. 8

---

[1] То есть что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

12. УДИВИТЕЛЬНЫЙ ОТГАДЧИК

Десять косточек домино положены в ряд, начиная справа налево, вниз «лицом», и положены в последовательно возрастающем порядке, то есть одно, два, три и т. д. до десяти. «Отгадчик» объявляет остальным, что он уйдет в другую комнату или отвернется, а они без него могут переместить справа налево сколько угодно косточек, причем единственным условием ставится то, чтобы не изменялось относительное расположение как перемещенных, так и остальных косточек. По возвращении отгадчик берется узнать не только число перемещенных косточек, но и открыть ту косточку, которая укажет (числом очков), сколько перемещено косточек.

Задача эта весьма проста, но и весьма эффектна. Разобраться в решении ее не составляет особого труда, и каждый желающий может это сделать с большой пользой для себя.

13. ВЕРНАЯ ОТГАДКА

Возьмите 25 костей домино, переверните их «лицом» вниз и положите рядом одна за другой так, чтобы они соприкасались более длинными сторонами. Вслед за тем объявите, что вы отвернетесь или даже уйдете в другую комнату, а кто-нибудь пусть с правого конца переместит на левый какое-нибудь число домино (не более, однако, 12). Возвратившись в комнату, вы тотчас открываете кость, число очков которой непременно укажет число перемещенных в ваше отсутствие домино.

Действительно, оказывается, что требуемую косточку всегда можно открыть. Но для этого не нужно даже «догадки», а достаточно самого простого, не выходящего из предела первого десятка, арифметического расчета.

Как это сделать?

14. ЗАБАВА-ЗАДАЧА

Переверните «лицом» вниз все кости игры домино. Одну же из косточек тихонько спрячьте, наблюдая только, чтобы эта косточка не была двойная. Затем предложите кому-либо взять любую из лежащих на столе косточек, посмотреть ее и положить на стол вверх лицевой стороной, а вслед за тем пусть он же раскроет и все остальные домино и расположит их вместе с первой открытой костью по правилам игры, но так, чтобы не замкнуть игры и не брать в расчет двойняшек, или же ввести их в игру вне очереди. Получится некоторое расположение костей всей игры домино, и вы сможете заранее предсказать числа очков, которые получатся на концах этого расположения. Эти числа будут как раз те, которые находятся на квадратиках раньше спрятанной вами косточки домино.

15. ОТГАДЫВАНИЕ КОСТЕЙ ДОМИНО

Этот салонный фокус обычно выдают за «чтение мыслей». Но «чтение мыслей» здесь такого сорта, что вы сами можете осуществлять его, не обладая никакими сверхъестественными способностями.

Вы заявляете своим гостям, что беретесь отгадать задуманную ими костяшку домино, находясь с завязанными глазами в дальнем углу или даже в соседней комнате. И действительно, когда гости, выбрав из груды камней любую костяшку, спрашивают

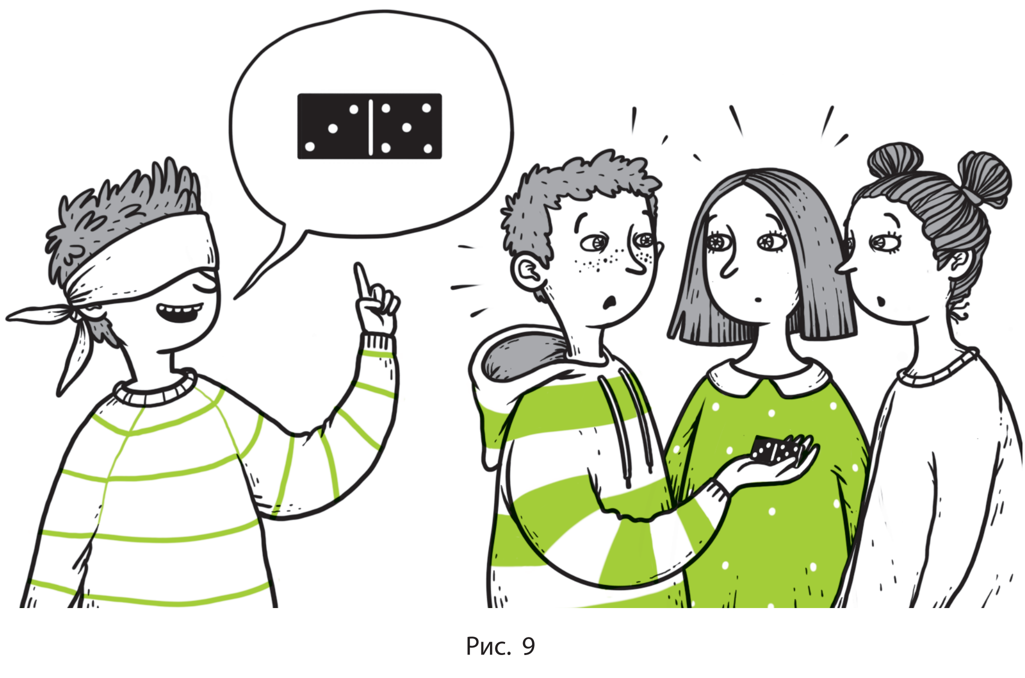

Рис. 9

вас, какая эта костяшка, вы сразу же отвечаете, хотя не можете видеть не только домино, но даже гостей.

Объяснение фокуса находится в разделе ответов.

16. НАИБОЛЬШИЙ УДАР

Допустим, что играют в домино четверо и что между ними поделены все кости поровну, то есть при начале игры у каждого игрока есть по семь костей. При этом могут получаться такие интересные расположения косточек, при которых первый игрок обязательно выигрывает, в то время как второй и третий игроки не смогут положить ни одной косточки. Пусть, например, у первого игрока будут четыре первых нуля и три последние единицы, то есть такие кости:

0–0, 0–1, 0–2, 0–3, 1–4, 1–5, 1–6,

а у четвертого игрока пусть будут остальные единицы и нули, то есть кости

1–1, 1–2, 1–3, 0–4, 0–5, 0–6

и еще какая-либо кость. Остальные домино поделены между вторым и третьим игроками. В таком случае первый игрок выигрывает после того, как будут положены все 13 указанных выше косточек домино, а второй и третий игроки не смогут поставить ни одной из своих.

В самом деле, первый игрок начинает игру и ставит 0–0. Второй и третий досадуют, ибо у них нет подходящей косточки. Тогда четвертый игрок может положить любую из трех косточек 0–4, 0–5 или 0–6. Но первый приложит в ответ 4–1, 5–1 или 6–1. Второй и третий опять не смогут ничего положить, а четвертый поставит 1–1 или 1–2, или 1–3, на что первый может ответить 1–0, 2–0, 3–0 и т. д. Таким образом он положит все свои кости, в то время как у второго и третьего игроков останутся все их кости домино, а у четвертого — одна. Сколько же выигрывает первый? Сумма очков в положенных 13 домино равна, как легко видеть, 48, а число очков всей игры есть 168. Значит, первый игрок выигрывает $168 - 48 = 120$ очков в одну игру. Это наибольший удар!

Можно составить и другие партии, подобные предыдущей. Для этого стоит только нули и единицы заменить соответственно домино с иным количеством очков: 2, 3, 4, 5 или 6. Число подобных партий, следовательно, равно числу всех простых сочетаний из семи элементов по 2, то есть равно 21. Ясно, что вероятность получить такую партию случайно весьма мала. Кроме того, все остальные партии, за исключением приведенной выше, дадут меньшее, чем 120, число выигранных очков.

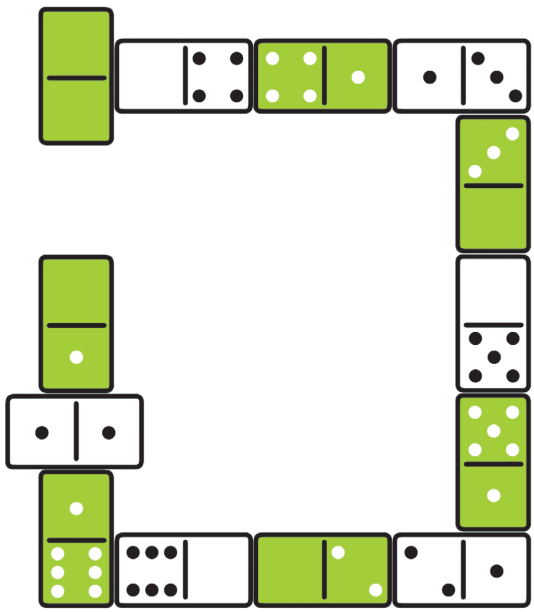

Рис. 10

IV. ШАХМАТЫ

Существует легенда индусского происхождения, которую рассказывает арабский писатель Асафад.

Брамин[1] Сесса, сын Дагера, придумал игру в шахматы, где король, хотя и самая важная фигура, не может ступить шагу без помощи и защиты своих подданных — пешек и других фигур. Изобрел он эту игру в забаву своему монарху и повелителю Индии, Шерану. Царь Шеран, восхищенный выдумкой брамина, сказал, что даст ему все, что только брамин захочет.

— В таком случае, — сказал Сесса, — прикажи дать мне столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить зерно, на вторую — 2, на третью — 4, на четвертую — 8 и т. д., все удваивая, пока не дойдут до 64-й клетки.

Повелитель Индии не смог этого сделать! Число требуемых зерен выражалось 20-значным числом. Чтобы удовлетворить «скромное» желание брамина, нужно было бы восемь раз засеять всю поверхность земного шара и восемь раз собрать жатву. Тогда бы только получилось нужное для Сессы количество зерен[2].

Обещать «все, что хочешь», легко, но трудно исполнить!

17. РАЗРЕЗАТЬ ШАХМАТНУЮ ДОСКУ

Даны две шахматные доски: обыкновенная в 64 клетки и другая — в 36 клеток (см. рисунок на следующей странице).

Требуется каждую из них разрезать на две части так, чтобы из всех полученных четырех частей составить новую шахматную доску, содержащую на каждой стороне по 10 клеток.

[1] Браминами, или брахманами, в Индии называют жрецов. — *Примеч. ред.*

[2] Подробнее с этой легендой можно ознакомиться в книге «Живая математика» Я. Перельмана («Качели», 2021). Там же приведен подробный расчет количества зерен, причитающихся брамину по условиям сделки. — *Примеч. ред.*

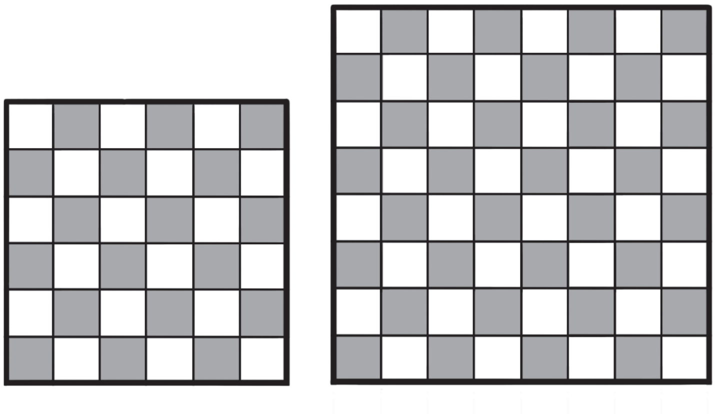

Рис. 11

18. О ВОСЬМИ КОРОЛЕВАХ

На шахматной доске, состоящей из 64 клеток, расставить восемь королев так, чтобы ни одна из них не могла бить другую. Другими словами: на восьми клетках шахматной доски поставить восемь королев так, чтобы каждые две из них не были расположены ни на одной линии, параллельной какому-либо краю, и ни на одной из прямых, параллельных какой-нибудь диагонали доски.

Задача эта предложена была для решения знаменитому немецкому математику Гауссу. Гаусс после нескольких попыток нашел все ее решения.

19. ШАХМАТНЫЙ ВОПРОС

Шахматная фигура тура (или ладья), как известно, может «брать» всякую фигуру, стоящую с ней на одном столбце клеток или на одной горизонтальной полосе.

Всмотритесь в квадраты на рисунке 12: каждый из них представляет тоже шахматную доску, но только из 16 клеток. И каждая фигурная перестановка на этой доске представляет такое положение четырех тур, при котором ни одна не может взять другой.

Значит, на доске в 16 клеток 4 туры можно расставить $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ способами так, что ни одна не может взять другой.

На доске из $5^2 = 25$ клеток можно получить $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ фигурных перестановок, другими словами, это значит, что на такой доске можно расставить 120 способами 5 тур так, что ни одна не будет брать другой.

Итак, мы приходим к заключению, что каждая фигуральная перестановка из любого числа элементов на соответствующей доске дает такое расположение шахматных тур, при котором они не могут брать одна другой. Теперь будет нетрудно решить вопрос, относящийся к нашей обыкновенной шахматной доске:

Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 тур так, чтобы ни одна из них не могла брать другой?

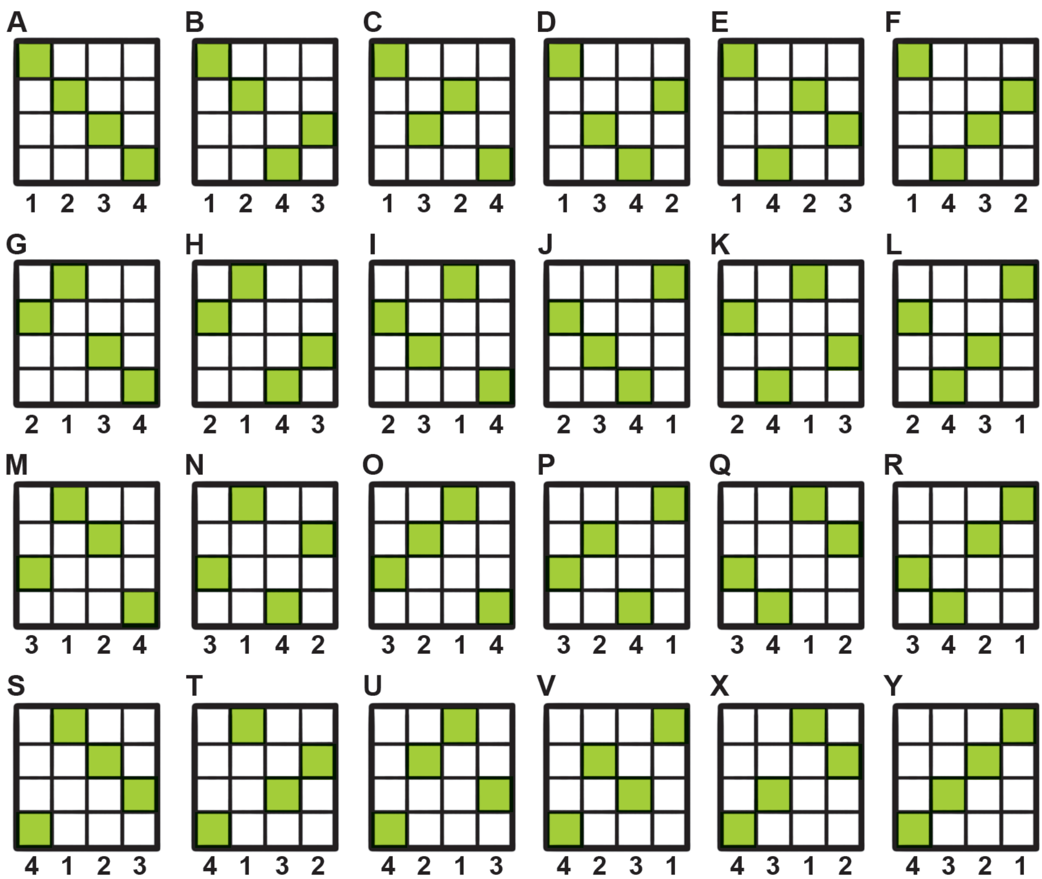

Рис. 12

20. О ХОДЕ ШАХМАТНОГО КОНЯ

Задача о ходе шахматного коня, или задача Эйлера, состоит в следующем:

Требуется обойти конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке конь был только один раз и затем возвратился бы в клетку, из которой вышел.

Задачей этой занимался Эйлер и в письме к Гольдбаху (26 апреля 1757 года) дал одно из решений ее. Вот что, между прочим, пишет он в этом интересном письме:

> …Воспоминание о предложенной когда-то мне задаче послужило для меня недавно поводом к некоторым тонким изысканиям, в которых обыкновенный анализ, как кажется, не имеет никакого применения. Вопрос состоит в следующем. Требуется обойти шахматным конем все 64 клетки шахматной доски так, чтобы на каждой клетке он побывал только один раз. С этой целью все места, которые занимал конь при своих последовательных ходах, закрывались марками. Но к этому присоединилось еще требование, чтобы начало хода делалось с данного места. Это последнее условие казалось мне очень затрудняющим вопрос, так как я скоро нашел некоторые пути, при которых, однако, выбор начала для меня свободен. Я утверждаю, однако, что если полный обход коня будет возвратный, то есть если конь из последнего места опять может перейти на первое, то устраняется и это затруднение. После некоторых изысканий по этому поводу я нашел, наконец, ясный способ находить сколько

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Рис. 13

угодно подобных решений (число их, однако, не бесконечно), не делая проб. Подобное решение представлено на рисунке.

Конь ходит в порядке, указанном числами. Так как из последнего места 64 он может перейти на 1, то этот полный ход есть возвратный.

Таково решение задачи о ходе шахматного коня, данное Эйлером. В письме не указаны ни приемы, ни путь, которыми знаменитый ученый пришел к своему открытию.

V. ПЕРЕПРАВЫ

21. ЧЕРЕЗ РОВ

Четырехугольное поле окружено рвом, ширина которого всюду одинакова (рис. 14). Даны две доски, длина которых равна точно ширине рва, и требуется с помощью этих досок устроить переход через ров.

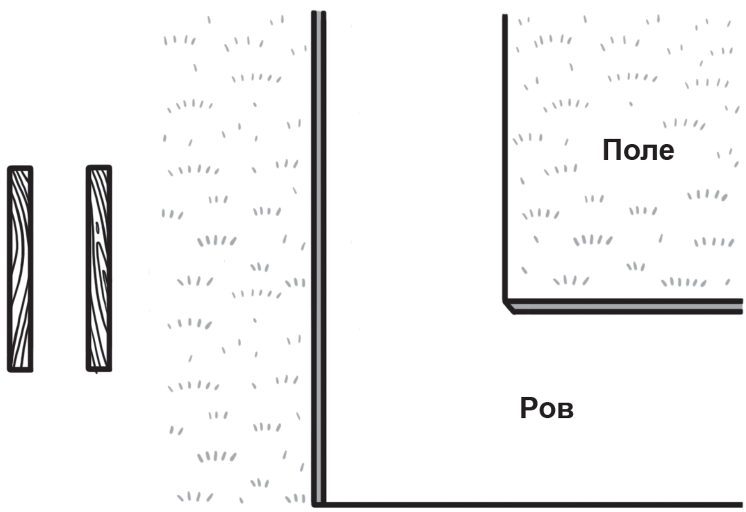

Рис. 14

22. ОТРЯД СОЛДАТ

Отряд солдат подходит к реке, через которую необходимо переправиться. Но мост сломан, а река глубока. Как быть? Вдруг командир замечает двух мальчиков, которые забавляются, катаясь на лодке. Но последняя так мала, что на ней может переправиться только один солдат или только двое мальчиков— не больше! Однако все солдаты переправились через реку именно на этой лодке. Как это было сделано?

23. ВОЛК, КОЗА И КАПУСТА

Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться крестьянин, а с ним или один волк, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевез свой груз крестьянин?

Рис. 15