

Мой френд, Пифагор!



Алла: «Почему я не стала математиком»



Нелли: «Не говорите себе „нет“»



Зачем нужен синус



Математика — это не то, что вы думаете



Систематическая ошибка выжившего



Ноль критики



Как устроена эта книга



Благодарности

Мой френд, Пифагор!

Эта книга родилась из эксперимента. Летом 2017 года профессор математики Нелли Литвак и креативный продюсер Алла Кечеджан, вероятно, первые в мире начали обучать взрослых «гуманитариев» математике «с нуля» через социальные сети. Мы пишем слово «гуманитарий» в кавычках, потому что, как вы скоро увидите, мы не согласны с разделением людей на «технарей» и «гуманитариев» и не верим в существование исключительно «гуманитарных» мозгов.

Нелли и Алла познакомились совершенно случайно через соцсети. Через два дня после виртуального знакомства Алла в аэропорту Шереметьево читала новую книгу «Кому нужна математика?»¹, которую Нелли написала в соавторстве с известным математиком Андреем Райгородским. Алла читала, пропуская все формулы, и думала о том, сколько лет пройдет, прежде чем она поймет, как составлять уравнения, находить расстояние между рядами нулей и единиц и тому подобное.

К тому моменту Алла уже создала несколько групп в соцсети. Теперь ей пришла в голову новая мысль:

¹ Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

«А ты можешь научить меня математике? — спросила она Нелли. — Вот так, через группу в соцсети. Ну, не только меня. У меня уже есть еще пара желающих...»

Еще год назад Нелли отнеслась бы к этой идее скептически. Интернет-площадка — это не доска и не учебник. Но так случилось, что незадолго до знакомства с Аллой она прочитала две книги, которые ее вдохновили.

В книге «Математика в огне»¹ (Burn Math Class: And Reinvent Mathematics for Yourself) молодой автор Джейсон Уилкс рассказывает, как ненавидел математику в школе. Уже в университете он совершенно случайно наткнулся на книгу по матанализу, заинтересовался, прослушал курс и... закончил университет с дипломом математика, причем лучшим в потоке! В книге с молодежным энтузиазмом он обрушивает лавы гнева на школьную программу и объясняет математику с нуля, «в противоположном порядке»: сначала площадь прямоугольника, потом теорема Пифагора. Зато потом сразу теория относительности Эйнштейна и матанализ!

Еще большее впечатление на Нелли произвела книга профессора Стэнфордского университета Джо Боулер «Математическое мышление. Книга для родителей и учителей»² (Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching). Боулер пишет о том, что в математике важно обсуждать, работать в команде и делиться информацией друг с другом.

¹ Джейсон Уилкс. Математика в огне. — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

² Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

Где еще обсуждать и делиться информацией, как не в соцсетях? И благодаря Уилксу понятно, с чего начать: с площади прямоугольника и теоремы Пифагора!

Через неделю после знакомства Нелли и Алла создали в популярной соцсети группу «Математика — великая и ужасная!» Еще через неделю первые участники группы, «безнадежные гуманитарии», сами доказали теорему Пифагора. За месяц к группе присоединилась тысяча участников. Через год группа выросла до восьми тысяч. А на сегодняшний день количество участников составляет более 36 000 человек.

Алла не перестает удивляться, что в математике всё связано и не так уж сложно. А Нелли поражается огромному количеству мыслей, статей, вопросов, шуток, видео, которые находят и публикуют «гуманитарии»! Она сама узнала много нового. Вернувшись на работу к студентам-математикам, Нелли и им стала преподавать по-другому: снизила темп, стала задавать больше вопросов и больше рассказывать, как математические теории работают на практике.

Исходя из собственного опыта, мы надеемся, что наша книга будет интересна и полезна и тем, кто знает и любит математику, и тем, кто хочет попытаться ее понять.

Алла: «Почему я не стала математиком»

Помните ли вы свои самые первые уроки математики? Когда вы выписывали аккуратно строчки с цифрами 1, 2, 3? Это было сразу после палочек и крючочков. Уже тогда с самого начала математи-

ка была важнее. На уроках русского — всего лишь палочки и крюпочки. На математике же — ЧИСЛО. В моем классе у каждого была коробочка со счетными палочками — до массового внедрения калькуляторов оставалось еще много лет, а компьютеры тогда занимали целую комнату.

Слова «задача» и «решение» нужно было писать без ошибок, красиво рисовать фигурные скобки, не тереть плюс ластиком до дыр, чтобы получить минус.

Всё шло более-менее неплохо, пока учитель мог на карандашах объяснить, на сколько у Маши конфет больше, чем у Пети. А потом что-то сломалось. В учебниках стало меньше картинок. Никто не объяснил, что время — это четвертое измерение. А ведь объяснить было проще простого. Чтобы он не пришел в кино, а она в аптеку, надо знать не только место встречи, но и время встречи! Вы прекрасно знаете, что расстояние зависит от времени. В 46 лет, благодаря Нелли, я научилась обозначать это с помощью функции: $S(t)$.

Но разве будут детям говорить о свиданиях? Нам говорили о бездушных поездах и самолетах, которые должны прибыть в какое-то время в какое-то место. А я всё задавала странные для математики вопросы: какого цвета поезд; как называется город, из которого он выехал; как зовут пассажиров. Мне говорили, что такого поезда в жизни не существует, а выехал он из пункта А и движется в пункт Б.

— Если ничего не существует, то зачем мне математика? — растерянно спрашивала я.

— Тебе она и не нужна, пиши свои сочинения, а к математике у тебя никаких способностей нет.

И вот я всю жизнь писала статьи, брала интервью, в том числе у гениев, например, у писателя-фанта-

ста Артура Кларка в 2001 году при запуске капсулы времени в космос. Любовь к писательству позволяла практически «в одни руки» издавать еженедельную 16-полосную газету и обеспечивать контентом одновременно 21 группу в соцсетях.

Говорят, что математику надо учить в детстве, а потом — безнадега. Однако я считаю, что всё происходит вовремя. Когда я была маленькой, не было даже калькуляторов, не говоря уже о компьютерах, которые рисуют многомерные графики. К тому же не было никакой возможности задавать вопросы профессору математики онлайн. А сейчас всё это есть. И оказывается, во мне не умер математик. Прислушайтесь к себе, я уверена, что он жив и в вас.

Нелли: «Не говорите себе „нет“»

Мой дедушка в свое время потратил целое лето, чтобы научить меня кататься на велосипеде. Мне повезло с его ангельским терпением, другой бы давно бросил. Даже научившись с огромным трудом, я долго боялась ездить быстро и боялась ездить по асфальту, предпочитала проселочные дороги.

Мне легко давалась математика. Но многое другое давалось с большим трудом. Баланс и моторика были чуждыми для меня понятиями. В старших классах я не могла перепрыгнуть планку высотой 70 см, а волейбол сдала на 4 только благодаря помощи доброй одноклассницы-волейболистки.

В 42 года я научилась кататься на велосипеде, не держась руками за руль. В моей юности никто не поверил бы, что это возможно. Поэтому не надо гово-

ритель, что вы «боитесь формул», что у вас «ступор», что «зубы сводит». Если я могу отпустить руки от руля, то вы в состоянии освоить математику.

Одна из заповедей в нашей семье: «Не говори себе „нет“!» Математического гена не существует. Математику, как и велосипед, в состоянии осилить любой человек. Я готова вам помогать. Я верю в вас. И я такая же терпеливая, как мой дедушка.

Зачем нужен синус

Когда вышла книга Нелли Литвак и Андрея Райгородского «Кому нужна математика?», Нелли приехала в Москву, чтобы прочитать несколько публичных лекций.

Лекции, как и сама книга, были в основном о приложениях математики в современных цифровых технологиях. Но очень скоро Нелли заметила, что слушателей интересует совершенно другая постановка вопроса: почему нужно мучиться в школе с синусами и логарифмами? кому и зачем это надо? зачем изучать эти абстракции, кроме знаменитого «структурирования мозгов», которого можно достичь и другими способами?

Вопрос «зачем мне математика?» вполне понятный и естественный. Математика — это наука об идеальных объектах. Например, математик может изобразить дорогу в виде линии, а деревья вдоль дороги в виде точек. Всем очевидно, что дерево это не точка и точкой никогда не будет. Поэтому создается впечатление, что математика имеет мало отношения к жизни. Но это впечатление довольно узкое, неполное и, по сути, ошибочное.

Дедушка Нелли, Виталий Анатольевич Зверев, — ученый-физик. Его научным руководителем был замечательный ученый Габриэль Семенович Горелик. Горелик всегда подчеркивал, что именно то, что математика абстрагируется от реальной сути вещей, и есть очень важная и основная сила математики. Математика позволяет решить конкретную физическую задачу, но при этом делает это так, что это решение справедливо для целого ряда других задач, относящихся к другим разделам физики, и не только физики, а и, например, медицины. Вся научная деятельность Горелика была сосредоточена на этой сильной стороне математики.

Математик изображает дерево в виде точки и изучает точки на площади. Математику точки на плоскости интересны сами по себе. Они такие идеальные, что мы можем выяснить про них очень много. Например, если предположить, что точки разбросаны случайным образом независимо друг от друга, то мы можем подсчитать, с какой вероятностью на любом пространстве площади S образуется «плешь» без единой точки. А потом та же модель применима к жилому району, где точка — это дом, куда должна приехать скорая помощь.

Математика играет очень важную роль, потому что идеальные математические объекты описывают наш мир и связи в нем. Эти связи могут быть самые неожиданные. Например, в этой книге мы увидим, как стоимость хранения контейнеров на складе связана с площадью треугольника. И, конечно, мы разберемся, зачем нам нужны синус и косинус!

Математика — это не то, что вы думаете

В книге Джо Боулер «Математическое мышление» поражает простая мысль: школьная математика зачастую совсем не похожа на математику как науку.

Что мы представляем себе, когда говорим о школьной математике? Школьник в полном одиночестве зубрит формулы, чтобы потом стандартным способом получить правильный ответ — тот, что написан в конце учебника. Правильно? В общем, да. Так нас и учат.

Только парадокс в том, что профессиональные математики так никогда не работают! Когда математики решают задачи, они пользуются интуицией, рисуют, ошибаются, спорят, подходят к задаче с разных сторон, перерывают кучу материалов, обсуждают со всеми подряд.

Математики никогда не стремятся запомнить формулы наизусть. Запоминать формулы вообще не имеет смысла, особенно если не понимаешь их значения. Говорят, это сам Эйнштейн сказал: «Никогда не заучивайте то, что можно найти в книге». А сейчас и подавно любую формулу можно найти в Интернете. К вопросу о вреде зубрежки мы еще вернемся в главе 11 «Зачем синусу окружность».

Как видите, школьная математическая подготовка и живая научная практика радикально отличаются друг от друга! В результате выпускники школы не имеют ни малейшего представления о том, что такое математика, как она развивается и чем занимается.

В школе под «математическими способностями» часто понимают скорость решения задач и хорошую

память. Большинство коллег Нелли, математиков, подтвердят, что ни то ни другое не так уж важно для развития математической мысли. Математика — это наука о связях, которые описывают законы и явления реального мира. И для понимания этих связей совсем не нужно зубрить формулы наизусть. В книге мы не делаем особого упора на терминологию и вычисления. Наша задача перестать бояться и увидеть смысл.

Систематическая ошибка выжившего

Известный математик Джордан Элленберг начинает свой бестселлер «Как не ошибаться»¹ (How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking) знаменитой историей про математика Абрахама Вальда.

Во время Второй мировой войны перед военными встал вопрос, как укрепить самолеты. Броню невозможно добавить повсюду, потому что самолет станет слишком тяжелым. Какие участки особенно важно прикрыть? Естественно, стали смотреть на пробоины вернувшихся самолетов. Казалось, укреплять броню нужно там, где пробоин больше.

Однако Вальд предложил делать прямо наоборот! Почему? Он рассуждал очень просто. Мы видим пробоины только тех самолетов, которые вернулись на базу. Если они вернулись, значит, пробоина не была критичной. Самолеты с пробитым двигателем просто не возвращаются. Критических пробоин мы не видим. Вывод? Нужно укреплять именно непробитые места.

¹ Джордан Элленберг. Как не ошибаться: Сила математического мышления. — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

Интуитивная тенденция судить по вернувшимся самолетам называется «систематическая ошибка выжившего». Она часто появляется в разных контекстах. Мы не всегда ее узнаем и в результате приходим к неверным выводам.

Например, мы часто слушаем советы успешных людей: работай больше, ставь цели, не сдавайся. Наверное, успешные люди так и делают. Но мы не знаем, сколько людей поступают точно так же и успеха при этом не достигают. Возможно, если взять всех людей, то картина сложится совсем другая. Например, как пишет Малькольм Гладуэлл в книге «Гении и аутсайдеры»¹ (Outliers: The story of succes), очень многое зависит просто от везения!

Мы рискуем предположить, что в систему преподавания математики тоже проникла «ошибка выжившего». Возможно, не все с нами согласятся, поэтому мы объясним, что именно мы имеем в виду.

Профессиональные преподаватели-математики исходят из того, как их учили и какие методы оказались для них самыми яркими и действенными. Они правы, что эта система дала миру великих математиков. Но только в терминах «ошибки выжившего» все математики — это «выжившие самолеты». И, к сожалению, не все самолеты вернулись на базу. Многие получили пробоину в самый двигатель и печатать на всю жизнь: «Тебе это не дано».

Нелли иногда в шутку называет Аллу «самолетом с пробитым двигателем». В этой книге мы постара-

¹ Малькольм Гладуэлл. Гении и аутсайдеры. Почему одним все, а другим ничего? — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2012.

емя объяснить математику через истории, вопросы, связи, иллюстрации.

Барбара Оакли¹, которая освоила математику во взрослом возрасте после службы в армии и стала профессором-инженером, говорит, что творческий, многоплановый подход — самый эффективный при изучении математики и в образовании вообще. Мы верим, что это и есть то самое «непробитое» место, где нужно укреплять броню!

Ноль критики

Один из главных принципов, которому мы следуем при обучении «гуманитариев» математике с нуля, очень простой, хотя для многих и неожиданный:

Категорически нельзя никого критиковать! НИКОГО!

Интересно, что в нашей группе в соцсети правило «ноль критики» оказалось на удивление сложным. Мы получили тонну критики за то, что запретили критику! Тем не менее мы настаиваем на своем.

Почему мы обе против критики? Потому что критика неприятна. Математика и без того многих пугает. Если человек берется за трудное дело, которого всегда боялся, то он достоин только похвалы, восхищения и долгих продолжительных аплодисментов! И совершенно не достоин никаких неприятных комментариев, пусть даже и математически верных.

¹ Профессор математики из Оклендского университета (США) и автор научно-популярных книг. — *Прим. ред.*

Особенно нельзя критиковать за ошибки. Когда человек делает ошибки? Когда пытается сделать что-то новое и трудное. Математики делают море ошибок, прежде чем что-то получить. Даже на конференциях об этом рассказывают! В точных науках в статьях не принято критиковать других ученых. Когда ученые пытаются получить сложные результаты, то ошибку сделать очень просто. Здесь, как и везде, не ошибается только тот, кто ничего не делает.

При изучении математики ошибки — это нормально и даже хорошо! Джо Боулер в своей книге пишет, что когда мы делаем ошибку, то наш мозг растет, связи между нейронами развиваются и укрепляются. Интересно, что это происходит, даже если мы ошибку не осознали и не исправили! Зато когда мы даем правильные ответы, то активность и развитие мозга намного меньше. Боулер убеждена, что ошибки очень полезны, что за них нужно хвалить и искать в них рациональное зерно.

Мы очень просим читателей придерживаться нашего правила. Если при вас кто-то делает ошибку, то, пожалуйста, воздержитесь от критики! Лучше спросите: «А почему так?» Возможно, человек решает задачу каким-то своим способом, и его ответ вас удивит! Именно так начались многие разговоры Нелли и Аллы, которые привели к более интересным и понятным объяснениям по каждой теме, в каждой главе.

Принцип «ноль критики» распространяется и на самокритику. Постарайтесь избегать мыслей типа «это выше моих способностей», «меня пугают формулы» и так далее. Сегодня пугают, завтра не будут пугать. Не надо ставить на себя всякие штампы.