

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	10
Глава 1. Начальные геометрические сведения	11
Прямая и отрезок	11
Точки, прямые.....	11
Отрезки	14
Луч и угол.....	16
Луч	16
Угол.....	17
Сравнение отрезков и углов.....	20
Равенство геометрических фигур.....	20
Сравнение отрезков и углов.....	20
Измерение отрезков.....	23
Длина отрезка.....	23
Единицы измерения. Измерительные инструменты.....	25
Измерение углов.....	29
Градусная мера угла.....	29
Измерение углов.....	30
Виды углов.....	32
Перпендикулярные прямые.....	35
Смежные углы.....	35
Вертикальные углы.....	37
Перпендикулярные прямые	37
Глава 2. Треугольники	46
Первый признак равенства треугольников	46
Треугольник.....	46
Первый признак равенства треугольников.....	48
Медианы, биссектрисы и высоты треугольника.....	53
Перпендикуляр к прямой.....	53
Медианы, биссектрисы и высоты треугольника.....	54
Свойства равнобедренного треугольника.....	57



Второй и третий признаки равенства треугольников	60
Второй признак равенства треугольников	61
Третий признак равенства треугольников	61
Задачи на построение	63
Окружность	63
Построения циркулем и линейкой	65
Примеры задач на построение	67
Глава 3. Параллельные прямые	74
Признаки параллельности двух прямых	74
Определение параллельных прямых	74
Признаки параллельности двух прямых	76
Практические способы построения параллельных прямых	78
Аксиома параллельных прямых	81
Об аксиомах геометрии	81
Аксиома параллельных прямых и её следствия	82
Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей	83
Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами	84
Глава 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника	89
Сумма углов треугольника	89
Теорема о сумме углов треугольника	89
Остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольники	91
Соотношения в треугольнике	94
Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника	94
Неравенство треугольника	95
Прямоугольные треугольники	97
Некоторые свойства прямоугольных треугольников	97
Признаки равенства прямоугольных треугольников	98
Построение треугольника по трём элементам	102
Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми	102
Решение задач на построение треугольника по трём элементам	103

Глава 5. Четырёхугольники	110
Многоугольники.....	110
Многоугольник и его элементы.....	110
Выпуклый многоугольник.....	112
Четырёхугольник.....	113
Параллелограмм и трапеция.....	118
Параллелограмм.....	118
Признаки параллелограмма.....	119
Теорема Фалеса.....	121
Трапеция.....	121
Прямоугольник, ромб, квадрат.....	127
Прямоугольник.....	127
Ромб и квадрат.....	128
Взаимосвязь параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата.....	133
Осевая и центральная симметрия.....	133
Глава 6. Площадь	141
Площадь многоугольника.....	141
Понятие площади многоугольника.....	141
Площадь квадрата и прямоугольника.....	143
Площади параллелограмма, треугольника и трапеции.....	146
Площадь параллелограмма.....	146
Площадь треугольника.....	147
Площадь ромба.....	149
Площадь трапеции.....	150
Теорема Пифагора. Формула Герона.....	153
Теорема Пифагора.....	153
Теорема, обратная теореме Пифагора.....	154
Формула Герона.....	155
Глава 7. Подобные треугольники	161
Определение подобных треугольников.....	161
Пропорциональные отрезки.....	161
Определение подобных треугольников.....	162
Отношение периметров и площадей подобных треугольников.....	163
Теорема о биссектрисе треугольника.....	163
Признаки подобия треугольников.....	166
Первый признак подобия треугольников.....	166
Второй признак подобия треугольников.....	166



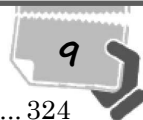
Третий признак подобия треугольников.....	167
Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	169
Средняя линия треугольника	169
Свойство медиан треугольника.....	171
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	171
О подобии произвольных фигур	173
Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.....	175
Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника	176
Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30° , 45° , 60°	177
Глава 8. Окружность	181
Касательная к окружности.....	181
Взаимное расположение прямой и окружности	181
Касательная к окружности.....	182
Центральные и вписанные углы	185
Градусная мера дуги окружности.....	185
Теорема о вписанном угле.....	186
Углы, образованные касательными, секущими, хордами.....	187
Теоремы о длинах хорд, касательной, секущих	188
Четыре замечательные точки треугольника.....	192
Свойство биссектрисы угла.....	192
Свойство серединного перпендикуляра к отрезку.....	193
Теорема о пересечении высот треугольника	194
Вписанная и описанная окружности	196
Вписанная окружность.....	196
Описанная окружность.....	198
Четыре замечательные точки треугольника.....	201
Глава 9. Векторы.....	207
Понятие вектора.....	207
Определение вектора	207
Равенство векторов	208
Откладывание вектора от данной точки.....	211
Сложение и вычитание векторов.....	214
Сумма двух векторов	214
Законы сложения векторов. Правило параллелограмма	215



Сумма нескольких векторов.....	216
Вычитание векторов.....	216
Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач.....	222
Произведение вектора на число.....	222
Применение векторов к решению задач.....	223
Средняя линия трапеции.....	224
Глава 10. Метод координат	229
Координаты вектора.....	229
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.....	229
Координаты вектора.....	230
Простейшие задачи в координатах.....	236
Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца.....	236
Задачи в координатах.....	237
Уравнения окружности и прямой.....	240
Уравнение линии на плоскости.....	240
Уравнение окружности.....	241
Уравнение прямой.....	242
Взаимное расположение двух окружностей.....	243
Глава 11. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов	249
Синус, косинус, тангенс, котангенс угла.....	249
Синус, косинус, тангенс, котангенс.....	249
Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения.....	251
Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса углов от 0° до 180°	252
Соотношения между сторонами и углами треугольника.....	254
Теорема о площади треугольника, параллелограмма.....	254
Теорема синусов.....	256
Теорема косинусов.....	257
Решение треугольников.....	258
Скалярное произведение векторов и его свойства.....	263
Угол между векторами.....	263
Скалярное произведение векторов.....	264
Скалярное произведение в координатах.....	265
Свойства скалярного произведения векторов.....	266



Глава 12. Длина окружности и площадь круга	272
Правильные многоугольники	272
Понятие правильного многоугольника.....	272
Окружность, описанная около правильного многоугольника....	274
Окружность, вписанная в правильный многоугольник.....	275
Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности	276
Построение правильных многоугольников.....	278
Длина окружности и дуги. Площадь круга и сектора	282
Длина окружности. Длина дуги.....	282
Площадь круга и его частей.....	283
Глава 13. Движения	289
Понятие движения	289
Отображение плоскости на себя.....	289
Определение и свойства движения	290
Наложения и движения.....	290
Параллельный перенос и поворот	293
Параллельный перенос	293
Поворот.....	294
Глава 14. Начальные сведения из стереометрии	299
Многогранники.....	299
Предмет стереометрии.....	299
Многогранник и его элементы	300
Призма.....	302
Параллелепипед.....	304
Объём тела	305
Свойства прямоугольного параллелепипеда	307
Пирамида.....	308
Тела и поверхности вращения.....	313
Цилиндр.....	313
Конус.....	314
Сфера и шар	316
Глава 15. Подготовка к ОГЭ. Задания по геометрии	321
Примеры выполнения заданий	322
Задание 15.....	322
Задание 16.....	323
Задание 17.....	324





Задание 18.....	324
Задание 19.....	325
Приложение	338
Условные обозначения	338
Площади фигур.....	339
Треугольник.....	339
Четырёхугольник.....	340
Многоугольник.....	342
Круг и его части.....	342
Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса углов.....	343
Признаки равенства треугольников.....	343
Признаки равенства прямоугольных треугольников.....	344
Признаки подобия треугольников	344
Ответы	345

ВВЕДЕНИЕ

Справочник поможет обучающимся систематизировать, обобщить и закрепить знания по курсу геометрии 7—9 классов.

Пособие содержит подробную информацию по планиметрии, а также начальные сведения из стереометрии. В справочнике рассматриваются свойства основных геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Основное назначение данного пособия — помочь учащимся в решении геометрических задач с применением изученных теоретических фактов, поэтому формулировки теорем приводятся без доказательств. В случае необходимости доказательства можно найти в школьном учебнике.

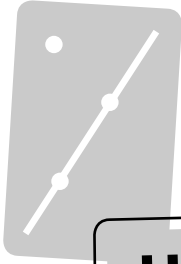
Теоретические блоки в справочнике сопровождаются примерами, схемами и таблицами. Это поможет систематизировать и закрепить изученный материал. Определения, требующие особого внимания или заучивания наизусть, выделены рамкой

с изображением . Приведённые примеры с развёрнутыми пояснениями позволят детально разобраться в темах школьного курса геометрии и отработать навыки выполнения различных типов заданий. Особое внимание уделено тем видам задач, которые встречаются при проведении основного государственного экзамена (ОГЭ). Они снабжены изображением . В ответах, размещённых в конце пособия, такие задания сопровождаются наиболее подробными пояснениями. Кроме того, решению заданий ОГЭ посвящена глава 15 справочника.

Пособие поможет при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к выполнению Всероссийской проверочной работы (ВПР) и сдаче ОГЭ по математике.

Издание будет полезно учителям математики для организации образовательного процесса с целью отработки и закрепления материала уроков, а также осуществления отдельных видов контроля.

Желаем успехов!



1

Глава

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ПРЯМАЯ И ОТРЕЗОК

В данном разделе рассматриваются простейшие геометрические фигуры: точки, прямые и отрезки, знакомые по курсу математики 5—6 классов. Предложенный материал позволяет расширить знания о свойствах этих фигур.

Точки, прямые

Точка и прямая являются основными неопределяемыми понятиями геометрии. Основными они называются, поскольку относятся к главным, то есть важнейшим, понятиям, неопределяемыми — поскольку не имеют определения, а задаются набором конкретных свойств.

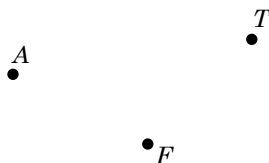


НА ЗАМЕТКУ

В последующем свойства, которые базируются на исходных положениях, будем называть аксиомами. Подробнее об аксиомах геометрии поговорим в главе «Параллельные прямые» (см. с. 81).

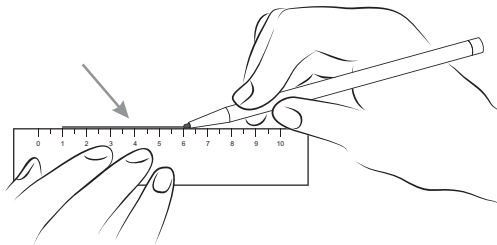
Самой простой геометрической фигурой является **точка**. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части.

Точки обозначаются одной заглавной буквой латинского алфавита. На рисунке изображены три точки: A , F и T .



Здесь и далее, говоря «две точки», «три точки» и т. п., будем считать, что эти точки различны, то есть не совпадают. Случаи совпадения будем оговаривать отдельно.

Вспомним, что нам известно о **прямой**. Для её построения мы использовали линейку, понимая, что на чертеже изображена лишь часть прямой. А всю прямую мы представляли себе неограниченно продолжающейся в обе стороны.



Прямая — это геометрическая фигура, обладающая определёнными свойствами.

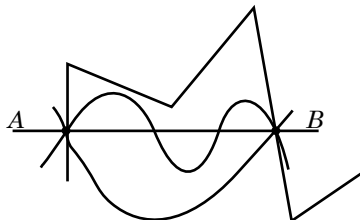
ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПРЯМОЙ

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.



НА ЗАМЕТКУ

Поясним, почему данное свойство является основным. Через точки A и B можно провести много различных линий, но только прямая задаётся этими точками однозначно. Приведённое свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые её точки: «прямая AB » или «прямая BA ».

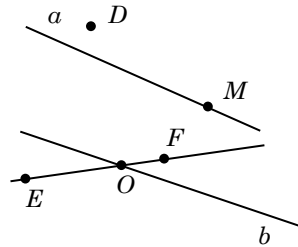


Прямые также обозначаются одной строчной буквой латинского алфавита. На рисунке изображены прямые a , b , EF .

Здесь и далее, говоря «две прямые», «три прямые» и т. п., будем считать, что эти прямые различны, то есть не совпадают. Случаи совпадения будем оговаривать отдельно.

Например, прямые EO и OF совпадают (см. рисунок выше). Будем считать, что это одна прямая.

Заметим, что точки могут быть по-разному расположены относительно прямой. На рисунке точка M принадлежит прямой a , точка D не принадлежит прямой a . Записывается это так: $M \in a$, $D \notin a$.



ЗАПОМНИ

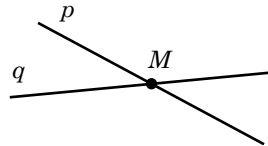
- \in — принадлежит;
- \notin — не принадлежит.

Рассмотрим две прямые. Они могут иметь общую точку.



Две прямые, имеющие общую точку, называются **пересекающимися**.

На рисунке прямые p и q пересекаются. Кратко это записывается так: $p \cap q$. Если известна точка пересечения прямых, это можно записать в виде: $p \cap q = M$. Последняя запись читается как «прямые p и q пересекаются в точке M ».

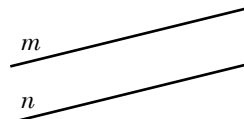


ВАЖНО ЗНАТЬ!



Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

В том случае, когда прямые не имеют общих точек, говорят, что они не пересекаются. На рисунке изображены непересекающиеся прямые m и n . Записывают это так: $m \not\cap n$.



ЗАПОМНИ

- \cap — пересекаются;
- $\not\cap$ — не пересекаются.

ВЫВОД. Любые две прямые либо имеют одну общую точку, либо не имеют общих точек.

Отрезки



Часть прямой, ограниченная двумя точками, называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**.

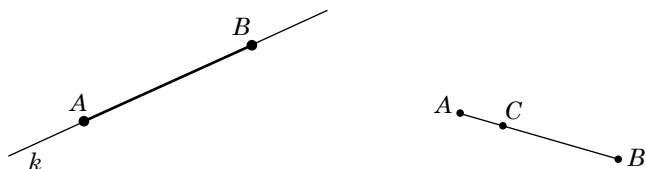


НА ЗАМЕТКУ

Отрезок содержит все точки прямой, лежащие между концами, а также свои концы.

Отметим на прямой k две точки A и B . Получим отрезок AB или BA .

Точки A и B — концы отрезка AB .

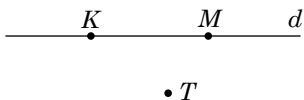


На рисунке точка C принадлежит отрезку, но не совпадает ни с одним из его концов. В этом случае говорят, что точка C лежит между точками A и B . Кратко записывают так: $A - C - B$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- ✓ Проведите прямую, обозначьте её буквой d . Отметьте точки K и M , лежащие на прямой d , точки S и T , не лежащие на прямой d . Опишите взаимное расположение точек K , M , S , T и прямой d , используя символы \in и \notin .

Решение. S .

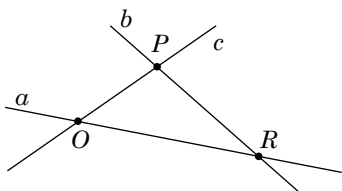


Ответ: $K \in d$, $M \in d$, $S \notin d$, $T \notin d$.

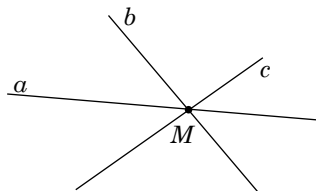
- ✓ Проведите три прямые a , b и c так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения? Опишите взаимное расположение прямых a , b и c , используя символ \cap .

Решение.

Случай 1. Прямые попарно пересекаются, то есть $a \cap b = R$, $a \cap c = O$, $c \cap b = P$.

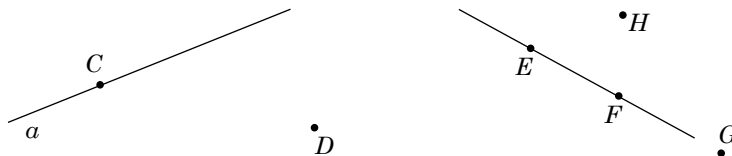


Случай 2. Три прямые пересекаются в одной точке: $a \cap b = a \cap c = c \cap b = M$.



Ответ: 3 или 1 точка пересечения.

- ✓ Пользуясь рисунком, выполните задания:



- 1) определите, пересекаются ли прямые a и EF ;
- 2) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a ;
- 3) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой EF .

Ответы запишите, используя символы \in , \notin , \cap , \nexists .

Подсказка. При выполнении пунктов 1 и 3 следует учитывать, что прямые a и EF можно неограниченно продолжать.

Ответ: 1) $a \cap EF$; 2) $C \in a$; 3) $C \notin EF$, $D \notin EF$, $H \notin EF$.

- ✓ На прямой отмечены точки K , L , M , N .



Запишите все изображённые отрезки:

- 1) на которых лежит точка M ;
- 2) на которых не лежит точка L .

Ответы запишите, используя символы \in , \notin .

Подсказка. При выполнении задания следует помнить, что концы отрезка принадлежат этому отрезку.

- Ответ:** 1) $M \in KM$, $M \in LM$, $M \in LN$, $M \in KN$, $M \in MN$;
2) $L \notin MN$.

ЛУЧ И УГОЛ

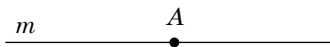
Продолжим рассмотрение уже знакомых фигур. В этом разделе будут даны определения луча и угла, способы их обозначения.

Луч



Луч (полупрямая) — часть прямой, состоящая из данной точки (начало луча) и всех точек, лежащих по одну сторону от неё.

Проведём прямую m и отметим на ней точку A .



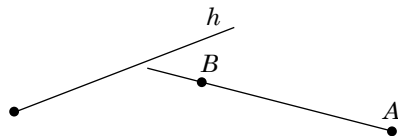
Точка A разбивает прямую m на два луча, для каждого из которых точка A является началом.

Луч обозначают строчной латинской буквой либо двумя прописными латинскими буквами, первая из которых — начало луча, а вторая — любая точка на луче.

На рисунке изображены два луча: h и AB .

ВАЖНО ЗНАТЬ!

Луч AB и луч BA — это разные лучи.



На рисунке лучи OA и OB дополняют друг друга до прямой. Лучи OA и OB — дополнительные.

