

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 10 |
| Глава 1. Начальные геометрические сведения | 11 |
| Прямая и отрезок | 11 |
| Точки, прямые | 11 |
| Отрезки | 14 |
| Луч и угол | 16 |
| Луч | 16 |
| Угол | 17 |
| Сравнение отрезков и углов | 20 |
| Равенство геометрических фигур | 20 |
| Сравнение отрезков и углов | 20 |
| Измерение отрезков | 23 |
| Длина отрезка | 23 |
| Единицы измерения. Измерительные инструменты | 25 |
| Измерение углов | 29 |
| Градусная мера угла | 29 |
| Измерение углов | 30 |
| Виды углов | 32 |
| Перпендикулярные прямые | 35 |
| Смежные углы | 35 |
| Вертикальные углы | 37 |
| Перпендикулярные прямые | 37 |
| Глава 2. Треугольники | 46 |
| Первый признак равенства треугольников | 46 |
| Треугольник | 46 |
| Первый признак равенства треугольников | 48 |
| Медианы, биссектрисы и высоты треугольника | 53 |
| Перпендикуляр к прямой | 53 |
| Медианы, биссектрисы и высоты треугольника | 54 |
| Свойства равнобедренного треугольника | 57 |



| | |
|--|-----------|
| Второй и третий признаки равенства треугольников | 60 |
| Второй признак равенства треугольников | 61 |
| Третий признак равенства треугольников | 61 |
| Задачи на построение | 63 |
| Окружность | 63 |
| Построения циркулем и линейкой | 65 |
| Примеры задач на построение | 67 |
| Глава 3. Параллельные прямые | 74 |
| Признаки параллельности двух прямых | 74 |
| Определение параллельных прямых | 74 |
| Признаки параллельности двух прямых | 76 |
| Практические способы построения параллельных прямых | 78 |
| Аксиома параллельных прямых | 81 |
| Об аксиомах геометрии | 81 |
| Аксиома параллельных прямых и её следствия | 82 |
| Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей | 83 |
| Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами | 84 |
| Глава 4. Соотношения между сторонами и углами треугольника | 89 |
| Сумма углов треугольника | 89 |
| Теорема о сумме углов треугольника | 89 |
| Остроугольный, прямоугольный, тупоугольный треугольники | 91 |
| Соотношения в треугольнике | 94 |
| Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника | 94 |
| Неравенство треугольника | 95 |
| Прямоугольные треугольники | 97 |
| Некоторые свойства прямоугольных треугольников | 97 |
| Признаки равенства прямоугольных треугольников | 98 |
| Построение треугольника по трём элементам | 102 |
| Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми | 102 |
| Решение задач на построение треугольника по трём элементам | 103 |

| | |
|---|-----|
| Глава 5. Четырёхугольники | 110 |
| Многоугольники..... | 110 |
| Многоугольник и его элементы..... | 110 |
| Выпуклый многоугольник..... | 112 |
| Четырёхугольник..... | 113 |
| Параллелограмм и трапеция..... | 118 |
| Параллелограмм..... | 118 |
| Признаки параллелограмма..... | 119 |
| Теорема Фалеса..... | 121 |
| Трапеция..... | 121 |
| Прямоугольник, ромб, квадрат..... | 127 |
| Прямоугольник..... | 127 |
| Ромб и квадрат..... | 128 |
| Взаимосвязь параллелограмма, ромба, прямоугольника и квадрата..... | 133 |
| Осевая и центральная симметрия..... | 133 |
| Глава 6. Площадь | 141 |
| Площадь многоугольника..... | 141 |
| Понятие площади многоугольника..... | 141 |
| Площадь квадрата и прямоугольника..... | 143 |
| Площади параллелограмма, треугольника и трапеции..... | 146 |
| Площадь параллелограмма..... | 146 |
| Площадь треугольника..... | 147 |
| Площадь ромба..... | 149 |
| Площадь трапеции..... | 150 |
| Теорема Пифагора. Формула Герона..... | 153 |
| Теорема Пифагора..... | 153 |
| Теорема, обратная теореме Пифагора..... | 154 |
| Формула Герона..... | 155 |
| Глава 7. Подобные треугольники | 161 |
| Определение подобных треугольников..... | 161 |
| Пропорциональные отрезки..... | 161 |
| Определение подобных треугольников..... | 162 |
| Отношение периметров и площадей подобных треугольников..... | 163 |
| Теорема о биссектрисе треугольника..... | 163 |
| Признаки подобия треугольников..... | 166 |
| Первый признак подобия треугольников..... | 166 |
| Второй признак подобия треугольников..... | 166 |



| | |
|---|------------|
| Третий признак подобия треугольников..... | 167 |
| Применение подобия к доказательству теорем и решению задач | 169 |
| Средняя линия треугольника | 169 |
| Свойство медиан треугольника..... | 171 |
| Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике | 171 |
| О подобии произвольных фигур | 173 |
| Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника..... | 175 |
| Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника | 176 |
| Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30° , 45° , 60° | 177 |
| Глава 8. Окружность | 181 |
| Касательная к окружности..... | 181 |
| Взаимное расположение прямой и окружности | 181 |
| Касательная к окружности..... | 182 |
| Центральные и вписанные углы | 185 |
| Градусная мера дуги окружности..... | 185 |
| Теорема о вписанном угле..... | 186 |
| Углы, образованные касательными, секущими, хордами..... | 187 |
| Теоремы о длинах хорд, касательной, секущих | 188 |
| Четыре замечательные точки треугольника..... | 192 |
| Свойство биссектрисы угла..... | 192 |
| Свойство серединного перпендикуляра к отрезку..... | 193 |
| Теорема о пересечении высот треугольника | 194 |
| Вписанная и описанная окружности | 196 |
| Вписанная окружность..... | 196 |
| Описанная окружность..... | 198 |
| Четыре замечательные точки треугольника..... | 201 |
| Глава 9. Векторы..... | 207 |
| Понятие вектора..... | 207 |
| Определение вектора | 207 |
| Равенство векторов | 208 |
| Откладывание вектора от данной точки..... | 211 |
| Сложение и вычитание векторов..... | 214 |
| Сумма двух векторов | 214 |
| Законы сложения векторов. Правило параллелограмма | 215 |



| | |
|---|------------|
| Сумма нескольких векторов..... | 216 |
| Вычитание векторов..... | 216 |
| Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач..... | 222 |
| Произведение вектора на число..... | 222 |
| Применение векторов к решению задач..... | 223 |
| Средняя линия трапеции..... | 224 |
| Глава 10. Метод координат | 229 |
| Координаты вектора..... | 229 |
| Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам..... | 229 |
| Координаты вектора..... | 230 |
| Простейшие задачи в координатах..... | 236 |
| Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца..... | 236 |
| Задачи в координатах..... | 237 |
| Уравнения окружности и прямой..... | 240 |
| Уравнение линии на плоскости..... | 240 |
| Уравнение окружности..... | 241 |
| Уравнение прямой..... | 242 |
| Взаимное расположение двух окружностей..... | 243 |
| Глава 11. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов | 249 |
| Синус, косинус, тангенс, котангенс угла..... | 249 |
| Синус, косинус, тангенс, котангенс..... | 249 |
| Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения..... | 251 |
| Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса углов от 0° до 180° | 252 |
| Соотношения между сторонами и углами треугольника..... | 254 |
| Теорема о площади треугольника, параллелограмма..... | 254 |
| Теорема синусов..... | 256 |
| Теорема косинусов..... | 257 |
| Решение треугольников..... | 258 |
| Скалярное произведение векторов и его свойства..... | 263 |
| Угол между векторами..... | 263 |
| Скалярное произведение векторов..... | 264 |
| Скалярное произведение в координатах..... | 265 |
| Свойства скалярного произведения векторов..... | 266 |



| | |
|---|-----|
| Глава 12. Длина окружности и площадь круга | 272 |
| Правильные многоугольники | 272 |
| Понятие правильного многоугольника..... | 272 |
| Окружность, описанная около правильного многоугольника.... | 274 |
| Окружность, вписанная в правильный многоугольник..... | 275 |
| Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности | 276 |
| Построение правильных многоугольников..... | 278 |
| Длина окружности и дуги. Площадь круга и сектора | 282 |
| Длина окружности. Длина дуги..... | 282 |
| Площадь круга и его частей..... | 283 |
| Глава 13. Движения | 289 |
| Понятие движения | 289 |
| Отображение плоскости на себя..... | 289 |
| Определение и свойства движения | 290 |
| Наложения и движения..... | 290 |
| Параллельный перенос и поворот | 293 |
| Параллельный перенос | 293 |
| Поворот..... | 294 |
| Глава 14. Начальные сведения из стереометрии | 299 |
| Многогранники..... | 299 |
| Предмет стереометрии..... | 299 |
| Многогранник и его элементы | 300 |
| Призма..... | 302 |
| Параллелепипед..... | 304 |
| Объём тела | 305 |
| Свойства прямоугольного параллелепипеда | 307 |
| Пирамида..... | 308 |
| Тела и поверхности вращения..... | 313 |
| Цилиндр..... | 313 |
| Конус..... | 314 |
| Сфера и шар | 316 |
| Глава 15. Подготовка к ОГЭ. Задания по геометрии | 321 |
| Примеры выполнения заданий | 322 |
| Задание 15..... | 322 |
| Задание 16..... | 323 |
| Задание 17..... | 324 |



| | |
|---|------------|
| Задание 18..... | 324 |
| Задание 19..... | 325 |
| Приложение | 338 |
| Условные обозначения | 338 |
| Площади фигур..... | 339 |
| Треугольник..... | 339 |
| Четырёхугольник..... | 340 |
| Многоугольник..... | 342 |
| Круг и его части..... | 342 |
| Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса углов..... | 343 |
| Признаки равенства треугольников..... | 343 |
| Признаки равенства прямоугольных треугольников..... | 344 |
| Признаки подобия треугольников..... | 344 |
| Ответы | 345 |

ВВЕДЕНИЕ

Справочник поможет обучающимся систематизировать, обобщить и закрепить знания по курсу геометрии 7—9 классов.

Пособие содержит подробную информацию по планиметрии, а также начальные сведения из стереометрии. В справочнике рассматриваются свойства основных геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Основное назначение данного пособия — помочь учащимся в решении геометрических задач с применением изученных теоретических фактов, поэтому формулировки теорем приводятся без доказательств. В случае необходимости доказательства можно найти в школьном учебнике.

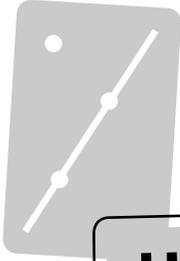
Теоретические блоки в справочнике сопровождаются примерами, схемами и таблицами. Это поможет систематизировать и закрепить изученный материал. Определения, требующие особого внимания или заучивания наизусть, выделены рамкой

с изображением . Приведённые примеры с развёрнутыми пояснениями позволят детально разобраться в темах школьного курса геометрии и отработать навыки выполнения различных типов заданий. Особое внимание уделено тем видам задач, которые встречаются при проведении основного государственного экзамена (ОГЭ). Они снабжены изображением . В ответах, размещённых в конце пособия, такие задания сопровождаются наиболее подробными пояснениями. Кроме того, решению заданий ОГЭ посвящена глава 15 справочника.

Пособие поможет при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к выполнению Всероссийской проверочной работы (ВПР) и сдаче ОГЭ по математике.

Издание будет полезно учителям математики для организации образовательного процесса с целью отработки и закрепления материала уроков, а также осуществления отдельных видов контроля.

Желаем успехов!



1

Глава

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ПРЯМАЯ И ОТРЕЗОК

В данном разделе рассматриваются простейшие геометрические фигуры: точки, прямые и отрезки, знакомые по курсу математики 5—6 классов. Предложенный материал позволяет расширить знания о свойствах этих фигур.

Точки, прямые

Точка и прямая являются основными неопределяемыми понятиями геометрии. Основными они называются, поскольку относятся к главным, то есть важнейшим, понятиям, неопределяемыми — поскольку не имеют определения, а задаются набором конкретных свойств.

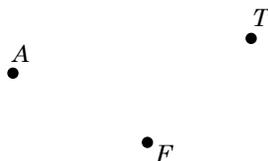


НА ЗАМЕТКУ

В последующем свойства, которые базируются на исходных положениях, будем называть аксиомами. Подробнее об аксиомах геометрии поговорим в главе «Параллельные прямые» (см. с. 81).

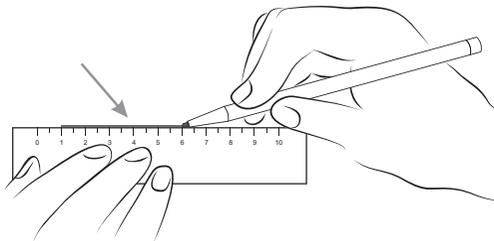
Самой простой геометрической фигурой является **точка**. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части.

Точки обозначаются одной заглавной буквой латинского алфавита. На рисунке изображены три точки: A , F и T .



Здесь и далее, говоря «две точки», «три точки» и т. п., будем считать, что эти точки различны, то есть не совпадают. Случаи совпадения будем оговаривать отдельно.

Вспомним, что нам известно о **прямой**. Для её построения мы использовали линейку, понимая, что на чертеже изображена лишь часть прямой. А всю прямую мы представляли себе неограниченно продолжающейся в обе стороны.



Прямая — это геометрическая фигура, обладающая определёнными свойствами.

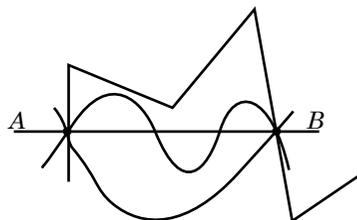
ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПРЯМОЙ

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.



НА ЗАМЕТКУ

Поясним, почему данное свойство является основным. Через точки A и B можно провести много различных линий, но только прямая задаётся этими точками однозначно. Приведённое свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые её точки: «прямая AB » или «прямая BA ».

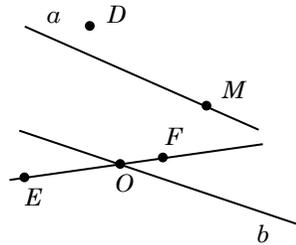


Прямые также обозначаются одной строчной буквой латинского алфавита. На рисунке изображены прямые a , b , EF .

Здесь и далее, говоря «две прямые», «три прямые» и т. п., будем считать, что эти прямые различны, то есть не совпадают. Случаи совпадения будем оговаривать отдельно.

Например, прямые EO и OF совпадают (см. рисунок выше). Будем считать, что это одна прямая.

Заметим, что точки могут быть по-разному расположены относительно прямой. На рисунке точка M принадлежит прямой a , точка D не принадлежит прямой a . Записывается это так: $M \in a$, $D \notin a$.



ЗАПОМНИ

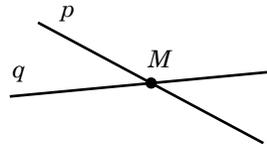
- \in — принадлежит;
- \notin — не принадлежит.

Рассмотрим две прямые. Они могут иметь общую точку.



Две прямые, имеющие общую точку, называются **пересекающимися**.

На рисунке прямые p и q пересекаются. Кратко это записывается так: $p \cap q$. Если известна точка пересечения прямых, это можно записать в виде: $p \cap q = M$. Последняя запись читается как «прямые p и q пересекаются в точке M ».

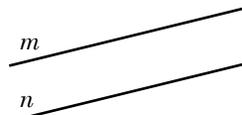


ВАЖНО ЗНАТЬ!



Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

В том случае, когда прямые не имеют общих точек, говорят, что они не пересекаются. На рисунке изображены непересекающиеся прямые m и n . Записывают это так: $m \not\cap n$.



ЗАПОМНИ

- \cap — пересекаются;
- $\not\cap$ — не пересекаются.

ВЫВОД. Любые две прямые либо имеют одну общую точку, либо не имеют общих точек.

Отрезки



Часть прямой, ограниченная двумя точками, называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**.

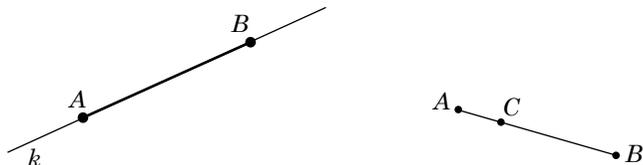


НА ЗАМЕТКУ

Отрезок содержит все точки прямой, лежащие между концами, а также свои концы.

Отметим на прямой k две точки A и B . Получим отрезок AB или BA .

Точки A и B — концы отрезка AB .

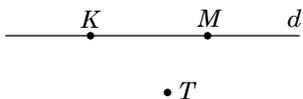


На рисунке точка C принадлежит отрезку, но не совпадает ни с одним из его концов. В этом случае говорят, что точка C лежит между точками A и B . Кратко записывают так: $A - C - B$.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

- ✓ Проведите прямую, обозначьте её буквой d . Отметьте точки K и M , лежащие на прямой d , точки S и T , не лежащие на прямой d . Опишите взаимное расположение точек K , M , S , T и прямой d , используя символы \in и \notin .

Решение. S .

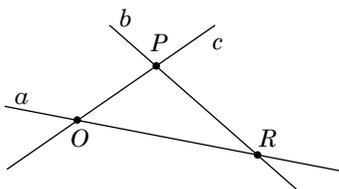


Ответ: $K \in d$, $M \in d$, $S \notin d$, $T \notin d$.

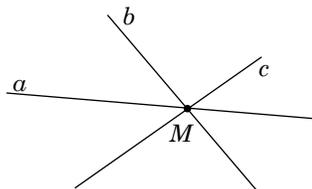
- ✓ Проведите три прямые a , b и c так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения? Опишите взаимное расположение прямых a , b и c , используя символ \cap .

Решение.

Случай 1. Прямые попарно пересекаются, то есть $a \cap b = R$, $a \cap c = O$, $c \cap b = P$.

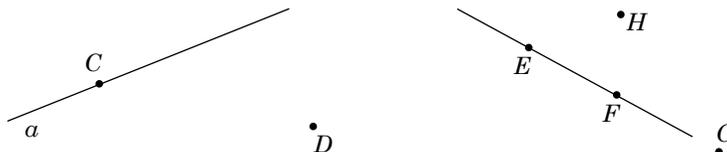


Случай 2. Три прямые пересекаются в одной точке: $a \cap b = a \cap c = c \cap b = M$.



Ответ: 3 или 1 точка пересечения.

- ✓ Пользуясь рисунком, выполните задания:



- 1) определите, пересекаются ли прямые a и EF ;
- 2) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a ;
- 3) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой EF .

Ответы запишите, используя символы \in , \notin , \cap , $\not\cap$.

Подсказка. При выполнении пунктов 1 и 3 следует учитывать, что прямые a и EF можно неограниченно продолжать.

Ответ: 1) $a \cap EF$; 2) $C \in a$; 3) $C \notin EF$, $D \notin EF$, $H \notin EF$.

- ✓ На прямой отмечены точки K , L , M , N .



Запишите все изображённые отрезки:

- 1) на которых лежит точка M ;
- 2) на которых не лежит точка L .

Ответы запишите, используя символы \in , \notin .

Подсказка. При выполнении задания следует помнить, что концы отрезка принадлежат этому отрезку.

- Ответ:** 1) $M \in KM$, $M \in LM$, $M \in LN$, $M \in KN$, $M \in MN$;
2) $L \notin MN$.

ЛУЧ И УГОЛ

Продолжим рассмотрение уже знакомых фигур. В этом разделе будут даны определения луча и угла, способы их обозначения.

Луч



Луч (полупрямая) — часть прямой, состоящая из данной точки (начало луча) и всех точек, лежащих по одну сторону от неё.

Проведём прямую m и отметим на ней точку A .



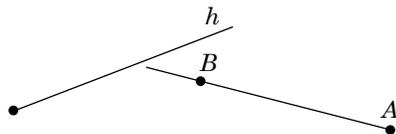
Точка A разбивает прямую m на два луча, для каждого из которых точка A является началом.

Луч обозначают строчной латинской буквой либо двумя прописными латинскими буквами, первая из которых — начало луча, а вторая — любая точка на луче.

На рисунке изображены два луча: h и AB .

ВАЖНО ЗНАТЬ!

Луч AB и луч BA — это разные лучи.



На рисунке лучи OA и OB дополняют друг друга до прямой. Лучи OA и OB — дополнительные.

