ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Всем привет! Меня зовут Борис Трушин, и я учитель математики. Я преподаю математику уже 24 года (хотя последние 14 лет в основном онлайн), и уже больше шести лет веду довольно популярный YouTube-канал «Борис Трушин» по околошкольной математике.

Многие разделы и задачи из этой книги можно найти в виде видеороликов на моём канале. Специально для тех, кому проще воспринимать информацию через видео, мы снабдили книгу QR-кодами со ссылками на соответствующие ролики.

В этой книге собран мой многолетний опыт преподавания комбинаторики школьникам разного возраста. Я попытался показать маршрут, по которому можно пройти любому, кто хочет разобраться в азах этой науки.

Если вы только начинаете интересоваться этой темой, то читайте книгу с самого начала, останавливаясь и пытаясь решать все предложенные здесь задачи. Не расстраивайтесь, если не всё получается, отложите задачу на день-два и подумайте ещё. В крайнем случае можно посмотреть подробное решение, которое можно найти для каждой задачи в конце книги.

Некоторые разделы могут быть сложны для новичков, особенно для тех, кто не привык к работе с громоздкими вычислениями. Например, раздел «Сумма степеней» из второй главы, раздел «Бином решает» из третьей или раздел «Опять про сумму степеней» из четвёртой главы. Ничего страшного не произойдёт, если вы пропустите их при первом прочтении. Это никак не повлияет на общее понимание остального текста. Но, если вы всё же рискнёте продраться через эти разделы, делайте это вместе с ручкой и листом бумаги. Хотя это пожелание относится и ко всем остальным разделам.

Если же вы уже не совсем новичок в комбинаторике, то некоторые разделы можно смело пропускать, останавливаясь лишь на задачах, которые вызывают сложности и интерес. Но учтите, что многие факты и методы здесь изложены не так, как в большинстве других книг по комбинаторике, поэтому вас могут ждать маленькие открытия даже там, где, как вам кажется, вы всё хорошо знаете.

В любом случае не рассматривайте эту книгу как лёгкое вечернее чтиво. Потому что вас ждёт не только множество красивых комбинаторных фактов, идей и методов, но и полторы сотни интересных задач. А задачи не всегда удобно решать, лёжа в постели перед сном.

Те, кто разберётся со всеми рассказанными здесь фактами и методами, решат или хотя бы поймут решения всех изложенных здесь задач, уже будут понимать комбинаторику на достаточно высоком уровне. Кому-то для этого будет достаточно пары недель, а у кого-то может уйти и пара лет.

Приятного вам чтения!

Post scriptum. Хочу выразить слова благодарности всем тем, кто учил меня математике в школе и в вузе, всё, что я знаю и умею в математике и её преподавании, всё благодаря этим людям. В первую очередь это мой отец, Трушин Виктор Борисович, без которого я никогда бы не узнал и не полюбил математику. А также Терёшин Дмитрий Александрович, Петрович Александр Юрьевич, Подлипский Олег Константинович, Карасёв Роман Николаевич, Чубаров Игорь Андреевич, Балашов Максим Викторович, Курочкин Сергей Владимирович, Бесов Олег Владимирович, Половинкин Евгений Сергеевич и ещё пара десятков потрясающих учителей и преподавателей, у которых мне посчастливилось учиться. Спасибо вам, без вас бы не только не было этой книги, но не было бы меня как учителя!

Большое спасибо Константину Кнопу за то, что согласился прочитать рукопись перед публикацией. Его предложения помогли значительно улучшить некоторые разделы этой книги.

Отдельная благодарность моей жене, Елене Трушиной, за то, что взялась первой вычитать эту книгу, взглянув на неё глазами человека, который совсем не знает комбинаторики. Без её помощи в книге было бы гораздо больше мелких опечаток.

16 августа 2023 года
Борис Трушин

ГЛАВА 1

КОГДА НУЖНО УМНОЖАТЬ, А КОГДА — СКЛАДЫВАТЬ?

Что такое *комбинаторика*? Комбинаторикой называется раздел математики, который решает задачи подсчёта количества объектов, удовлетворяющих какому-либо свойству. Поэтому большинство задач, которые мы будем обсуждать, будут содержать один и тот же вопрос: «Сколько существует различных способов сделать *то-то*?» А начнём мы с совсем простых примеров, решение которых не требует вообще никаких знаний.

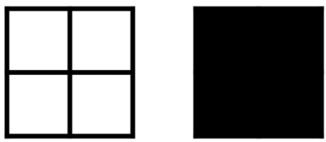
Простой перебор

Если вам нужно посчитать количество чего-то, то часто самый элементарный способ это сделать — просто перечислить все интересующие вас объекты. Главное — убедиться, что ничего не забыто. Например, если вам нужно вспомнить, сколько человек с вами учится в одном классе, то можно попробовать восстановить отсортированный по алфавиту список фамилий, записанный в журнале, а можно нарисовать, как расставлены парты в классе, и вспомнить, кто за какой партой сидит.

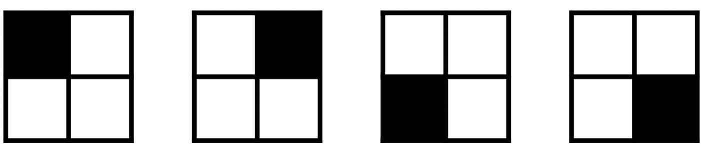
Давайте обсудим несколько задач, для решения которых будем пользоваться простым перебором всех возможных вариантов.

Задача 1. Каждую из четырёх клеток квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок таблицы?

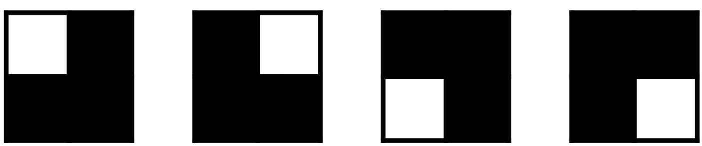
Решение. Для того чтобы не пропустить ни одной раскраски, давайте их классифицируем. Есть две одноцветные раскраски:



Есть четыре раскраски, в которых ровно одна чёрная клетка:

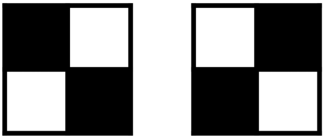


Есть четыре раскраски, в которых ровно одна белая клетка:



Среди раскрасок, в которых по две чёрные и белые клетки, есть, во-первых, четыре таких, у которых одноцветные клетки граничат по стороне:

а во-вторых, ещё две раскраски, у которых одноцветные клетки лежат на диагоналях:



Итого получаем, что существует

$$2 + 4 + 4 + 4 + 2 = 16$$

различных раскрасок таблицы 2×2 в два цвета.

Ответ. 16 раскрасок.

Задача 2. Нужно придумать код из двух букв, в котором на первом месте должна стоять согласная буква, а на втором — гласная. При этом разрешено использовать только буквы

А, Б, В, Г, Д, Е, Ё.

Сколько различных кодов можно придумать?

Решение. Попробуем выписать все возможные варианты. В качестве первой буквы можно выбрать любую из согласных:

Б, В, Г, Д.

Если возьмём «Б», то можно будет написать следующие коды:

БА, БЕ, БЁ.

Если возьмём «В», то можно написать коды:

ВА, ВЕ, ВЁ.

То же самое можно сделать с «Г» и «Д»:

ГА, ГЕ, ГЁ,
ДА, ДЕ, ДЁ.

В итоге мы получили всего 12 кодов.

Ответ. 12 кодов.

Для более удобного подсчёта можно было выписать все варианты в виде таблицы:

	А	**Е**	**Ё**
Б	БА	БЕ	БЁ
В	ВА	ВЕ	ВЁ
Г	ГА	ГЕ	ГЁ
Д	ДА	ДЕ	ДЁ

По этой таблице сразу видно, что всего может быть составлено 12 кодов и что точно посчитаны все возможные коды, удовлетворяющие условию.

Задача 3. Сколько всего существует паролей, состоящих из трёх различных цифр, если в пароле могут быть использованы только цифры 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Попробуем выписать все возможные коды. Давайте рассматривать пароль как трёхзначное число. И, чтобы не пропустить ни одного пароля, выпишем все пароли в порядке возрастания. Сначала будут те, у которых в разряде сотен стоит цифра 1:

123, 124, 125,
132, 134, 135,
142, 143, 145,
152, 153, 154.

Итого 12 различных паролей.

Потом будут те, у которых в разряде сотен стоит цифра 2:

213, 214, 215,
231, 234, 235,
241, 243, 245,
251, 253, 254.

И их снова 12 штук.

Потом будут те, которые начинаются с цифры 3, потом — с цифры 4 и, наконец, те, которые начинаются с цифры 5:

312, 314, 315, 321, 324, 325, 341, 342, 345, 351, 352, 354,
412, 413, 415, 421, 423, 425, 431, 432, 435, 451, 452, 453,
512, 513, 514, 521, 523, 524, 531, 532, 534, 541, 542, 543.

В каждой сотне получилось по 12 паролей. А значит, всего во всех пяти сотнях $5 \cdot 12 = 60$ паролей.

Ответ. 60 паролей.

В этой задаче тоже можно было представить все варианты в виде таблицы, но здесь это сделать несколько сложнее:

Первая цифра	Вторая цифра	Третья цифра		
1	2	3	4	5
	3	2	4	5
	4	2	3	5
	5	2	3	4
2	1	3	4	5
	3	1	4	5
	4	1	3	5
	5	1	3	4
3	1	2	4	5
	2	1	4	5
	4	1	2	5
	5	1	2	4
4	1	2	3	5
	2	1	3	5
	3	1	2	5
	5	1	2	3
5	1	2	3	4
	2	1	3	4
	3	1	2	4
	4	1	2	3

По этой таблице видно, что всего может быть составлено 60 различных паролей.

Мы справились с этими тремя задачами простым перебором вариантов, но если бы этих вариантов было очень много, то на перебор ушло бы гораздо больше времени. С другой стороны, мы видим, что, например, во второй задаче ответ — $4 \cdot 3 = 12$, а в третьей — $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Давайте научимся доходить до таких ответов, не занимаясь полным перебором всех возможных вариантов.

Но перед этим попробуйте самостоятельно решить следующие задачи, используя простой перебор всех возможных вариантов.

Задача 4. Девочке мама на завтрак дала конфету, пряник и булочку. Сколько различных порядков поедания этих сладостей есть у девочки?

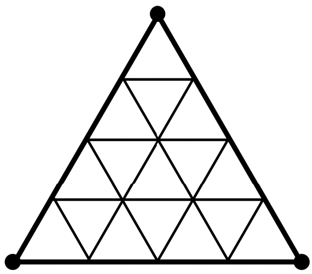
Задача 5. Монету подбрасывают три раза. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Задача 6. Турнир по теннису проходит в один круг, то есть каждый участник турнира сыграет с каждым ровно один раз. Сколько будет проведено игр, если в турнире принимают участие восемь теннисистов?

Задача 7. У Ивана есть пять друзей — Аня, Боря, Вася, Гоша и Даша. Он хочет позвать в гости троих из них, чтобы вместе поиграть в настольную игру. Сколько существует различных способов выбрать трёх друзей из пяти?

Задача 8. Сколько существует способов представить число 10 в виде суммы трёх натуральных слагаемых? Два представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 9. Каждую сторону правильного треугольника разбили тремя точками на четыре равные части и соединили эти точки отрезками, параллельными сторонам треугольника.



Какое количество равносторонних треугольников можно выделить на этой картинке?

Правила произведения и суммы

Рассмотрим ещё несколько простых задач, но попробуем их решить, не делая явного перебора.

Задача 10. К девочке в гости пришла подруга, и девочка решила её чем-нибудь угостить. У себя на кухне она нашла семь разных печений и пять разных пирожных. Сколькими различными способами девочка может угостить подругу, если она хочет дать ей лишь одно пирожное и одно печенье?

Решение. Пусть девочка уже выбрала, какое печенье она даст подруге. Тогда в пару к нему она может выбрать любое из пяти пирожных. Поэтому она может сделать пять различных угощений с этим печеньем. А так как печений всего семь, то всего различных угощений будет семь раз по пять, то есть $7 \cdot 5 = 35$.

Ответ. 35 способов.

Задача 11. Девочка ещё порылась в шкафчиках на кухне и обнаружила, кроме семи печений и пяти пирожных, ещё и десять различных конфет. Сколько теперь у неё есть способов составить угощение для подруги, если она хочет дать ей одну конфету, одно печенье и одно пирожное?

Решение. Мы уже знаем, что существует 35 различных комбинаций из одного печенья и одного пирожного. Для каждой из этих комбинаций есть десять различных способов добавить конфету. Поэтому девочка может составить угощение $35 \cdot 10 = 350$ различными способами.

Ответ. 350 способов.

Задача 12. Пусть девочка, отыскав на кухне семь печений, пять пирожных и десять конфет, решила дать подруге только две какие-нибудь сладости (печенье с пирожным, пирожное с конфетой или конфету с печеньем). Сколько различных вариантов угощения она может составить?

Решение. У девочки есть три возможности выбора двух видов сладостей. Для каждой из них несложно подсчитать число вариантов:

- **печенье с пирожным:** в пару к каждому из семи печений можно дать любое из пяти пирожных, итого $7 \cdot 5 = 35$ вариантов;
- **пирожное с конфетой:** в пару к каждому из пяти пирожных можно дать любую из десяти конфет, итого $5 \cdot 10 = 50$ вариантов;
- **конфета с печеньем:** в пару к каждой из десяти конфет можно дать любое из семи печений, итого $10 \cdot 7 = 70$ вариантов.

Складывая все эти варианты, получаем, что всего $35 + 50 + 70 = 155$ различных вариантов.

Ответ. 155 вариантов.

При решении этих задач самое главное — не запутаться, когда нам нужно перемножать количества вариантов, а когда складывать. Чтобы лучше себе это уяснить, сформулируем два основных комбинаторных правила.

Правило произведения. Пусть объект A можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами. Тогда выбор пары (A, B) можно осуществить nm способами.

Например, в задаче 10 было два *«объекта»* — печенье и пирожное, один из *объектов* можно было выбрать пятью способами, второй — семью, поэтому существует $5 \cdot 7 = 35$ способов выбрать пару *объектов*.

Правило суммы. Пусть некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, и никакой из объектов A не совпадает ни с каким из объектов B. Тогда существует $n + m$ способов выбрать либо объект A, либо объект B.

Например, в задаче 12 такими *«объектами»* являются пары {печенье и пирожное}, {пирожное и конфета} и {конфета и печенье}.

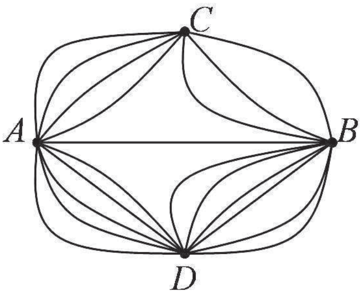
Чтобы убедиться, что вы разобрались в том, как работают эти правила, попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 13. Сколькими способами можно выбрать одну гласную и одну согласную буквы из слова «ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК»?

Задача 14. В школе есть один основной вход и три запасных. Сколько существует способов войти, а потом выйти из здания школы?

Задача 15. На почте продаются восемь видов конвертов, 25 различных открыток и 30 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт с открыткой и марку?

Задача 16. Из города A в город B ведёт одна дорога, в город C — четыре, в D — пять, из города C в город B — три дороги, а из D в B — шесть.



Сколько существует способов доехать из города A в город B, если считать, что по дорогам можно ехать лишь в одном направлении — слева направо?

Задача 17. В США дату принято записывать так: сначала месяц, потом день, а потом год. В Европе же сначала идёт число, потом месяц и год. Например, 24 февраля 2022 года в США запишут как 02.24.2022, а в Европе — 24.02.2022. Сколько есть дней в году, дату которых нельзя понять однозначно, не зная, каким способом она записана?

Повторяющиеся события

Задача 18. Монетку подбрасывают десять раз. Сколько различных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

Решение. Различных результатов после первого броска два — либо орёл, либо решка. Что бы ни выпало в первый раз, результатов второго броска также два. Это означает, что после второго броска могут получиться $2 \cdot 2 = 4$ различные последовательности.

Аналогично после третьего $4 \cdot 2 = 2^3 = 8$ различных последовательностей. Каждый следующий бросок удваивает количество последовательностей. В итоге после четвёртого броска будет 2^4, после пятого — 2^5, ..., после десятого — $2^{10} = 1024$ различные последовательности из орлов и решек.

Ответ. 1024 последовательности.

Задача 19. Сколькими способами можно прочитать слово

КОМБИНАТОРИКА,

если начать движение из левого верхнего угла таблицы и каждый раз идти либо вправо, либо вниз?

К	О	М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А
О	М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А	
М	Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А		
Б	И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А			
И	Н	А	Т	О	Р	И	К	А				
Н	А	Т	О	Р	И	К	А					
А	Т	О	Р	И	К	А						
Т	О	Р	И	К	А							
О	Р	И	К	А								
Р	И	К	А									
И	К	А										
К	А											
А												

Решение. У нас есть два способа добраться до буквы О:

К О
О

Какую бы из букв О мы ни выбрали, есть два способа добраться до буквы М:

О М
М

То есть каждым своим ходом мы передвигаемся на следующую диагональ — в начале были в букве К, потом оказались в одной из букв О, потом — в одной из букв М, и так далее. При этом перед очередным ходом мы можем выбрать — идти вправо или вниз. При каждой из этих двух возможностей мы вновь опускаемся на диагональ ниже и тем самым продолжаем чтение слова «КОМБИНАТОРИКА». Таким образом, способов прочитать слово «КОМБИНАТОРИКА» столько же, сколько способов 12 раз выбирать из двух вариантов — идти вправо или вниз.

$$\text{К} \to \text{О} \to \text{М} \to \text{Б} \to \text{И} \to \text{Н} \to$$
$$\to \text{А} \to \text{Т} \to \text{О} \to \text{Р} \to \text{И} \to \text{К} \to \text{А}$$

То есть всего $2^{12} = 4096$ способов.

Ответ. 4096 способов.

При решении этих задач получается ответ вида n^m, где n и m — некоторые натуральные числа. Такой ответ получается во всех задачах, в которых требуется посчитать количество способов на каждое из m *мест* поставить один из n различных *объектов*. В таких задачах главное — не перепутать, что в какую степень следует возводить!

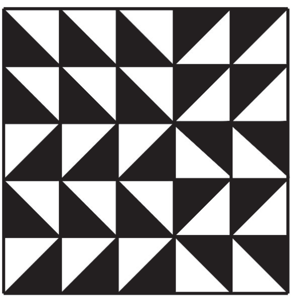
Например, в задаче 18 «местом» является номер броска, а «объектом» — сторона монеты — орёл или решка.

Заметим при этом, что в таких задачах вполне допустимо (и даже приветствуется) оставлять ответ в «степенном виде» — n^m, не доводя его до окончательной десятичной записи. Более того, так он выглядит более естественно — сразу становится ясно, каким образом он получен.

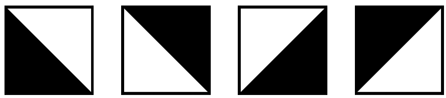
Разберём ещё одну задачу, для решения которой нужно не только знать, как считать, но сначала нужно понять, что именно считать.

Задача 20. Квадрат 5×5 разбит на единичные клетки. В каждой клетке проводят одну из диагоналей и красят один из получившихся треугольников в белый цвет, а другой — в чёрный. «Шахматной» будем называть такую раскраску, при которой любые два треугольника, имеющие общую сторону, оказываются разного цвета. Сколько существует различных «шахматных» раскрасок?

Такая «шахматная» раскраска может выглядеть, например, так:



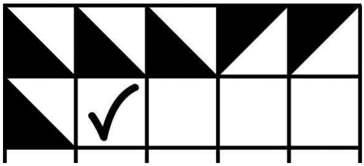
Решение. Очевидно, что одну клетку можно раскрасить четырьмя способами — есть два способа разрезать клетку на треугольники, а после этого есть два способа покрасить эти треугольники в белый и чёрный цвета:



Но после того, как мы покрасили одну клетку, у нас возникают ограничения на покраску соседних. И не очень понятно, как посчитать все возможные раскраски. Приведём два из возможных рассуждений.

Первое решение. Начнём раскраску с верхнего ряда. Как мы поняли, есть четыре способа покрасить клетку в верхнем левом углу. Пусть вы выбрали какую-то раскраску этой клетки, тогда мы знаем, в какой цвет должна быть покрашена левая сторона соседней клетки. Значит, для соседней клетки остаётся лишь два варианта раскраски. Например, если угловая клетка покрашена так , то соседняя с ней может быть либо такой , либо такой . После того как мы покрасим вторую клетку, у нас снова будет два варианта на покраску третьей, и так далее. В итоге получаем, что существует $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ способа покрасить первую строку.

Начинаем красить вторую строку. Так как угловая клетка уже покрашена, то мы знаем, в какой цвет должна быть покрашена верхняя сторона клетки, которая находится под ней. Значит, для неё остаётся лишь два варианта раскраски. Например, если угловая клетка покрашена так ◣, то клетка под ней может быть либо такой ◣, либо такой ◢. Посмотрим теперь на вторую клетку в этом ряду:

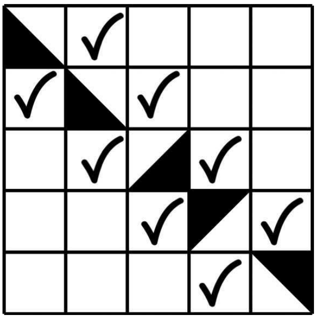


Для неё мы знаем, как раскрашена клетка над ней и как слева от неё. Поэтому мы знаем, в какой цвет покрашены верхняя и левая стороны этой клетки. А значит, мы точно знаем, как она должна быть раскрашена. Например, для приведённой картинки подходит только клетка ◣.

Продолжая так же рассуждать, мы получаем, что и остальные клетки второго ряда однозначно раскрашиваются. Поэтому выбор у нас был только при раскраске первой клетки этого ряда. Значит, если первый ряд покрашен полностью, то есть только два способа покрасить второй ряд.

Рассуждая аналогично, получаем, что есть лишь два способа раскрасить третий ряд. И точно так же для четвёртого и пятого рядов. Итого получаем $64 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$ способа раскрасить весь квадрат.

Второе решение. Но можно рассуждать и по-другому. Давайте сначала как угодно раскрасим клетки на диагонали. Для каждой клетки есть четыре варианта раскраски, поэтому всего есть $4^5 = 1024$ способа раскрасить клетки на диагонали. Посмотрим на клетки, соседние с клетками на диагонали:



У каждой из них уже покрашено две соседние клетки, поэтому для каждой из них мы знаем, в какой цвет покрашены две стороны. А значит, про каждую из них мы точно знаем, как она должна быть раскрашена. Рассуждая аналогично, получится, что мы уже про все оставшиеся клетки понимаем, как они должны быть раскрашены.

Другими словами, раскраска клеток на диагонали однозначно определяет раскраску в остальных клетках. А значит, существует 1024 различных «шахматных» раскрасок.

Ответ. 1024 раскраски.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 21. Дана квадратная таблица 3×3, каждую клетку которой можно покрасить в один из трёх цветов. Сколько различных раскрасок таблицы можно получить?

Задача 22. Сколько существует семизначных чисел, все цифры которых нечётны?

Задача 23. Сколькими способами можно разложить пять монет разного достоинства по трём карманам?

Задача 24. В некотором алфавите всего четыре буквы, а словом считается любая последовательность, состоящая не более чем из пяти букв. Сколько слов можно составить из букв этого алфавита?

Задача 25. У Ивана есть пять друзей — Аня, Боря, Вася, Гоша и Даша. Он решил каждый день приглашать в гости одного или нескольких из них в гости так, чтобы группа приглашённых ни разу не повторилась. Сколько дней он сможет это делать?

Выбор иногда уменьшает варианты

При решении комбинаторных задач важно понимать, что иногда выбор одного объекта ограничивает возможные варианты для другого. Мы про это уже немного говорили, когда решали задачу 20, где мы заметили, что несмотря на то, что для каждой конкретной клетки есть четыре варианта раскраски, количество вариантов становится меньше, если мы знаем, как раскрашены соседние клетки. Давайте разовьём эту тему в нескольких следующих задачах.

Задача 26. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

В начале кажется, что так как и старостой, и помощником старосты может стать любой из учащихся класса, то есть $25 \cdot 25$ возможностей выбрать пару. Но давайте рассуждать аккуратнее.

Решение. Старосту класса можно выбрать 25 различными способами. Но после этого для каждого такого выбора старосты существует 24 способа выбрать помощника (староста же не может быть сам себе помощником). Итого получаем $25 \cdot 24 = 600$ способов выбрать старосту класса и его помощника.

Ответ. 600 способов.

Задача 27. Есть стандартная колода из 36 игральных карт. Сколько существует способов выбрать четыре карты из колоды так, чтобы они все были разных мастей и разных достоинств?

Решение. Давайте сначала определимся, в каком порядке будут идти масти выбираемых карт. Например, пики, крести, бубны, червы. *Пики* можно выбрать девятью разными способами — это может быть 6, 7, 8, 9, 10, валет, дама, король или туз. После этого *крести* можно выбрать лишь восемью способами (можно взять карту любого достоинства, кроме того, которое было выбрано, когда мы брали *пики*). На *бубны* остаётся лишь семь вариантов, а на *червы* — только шесть. Итого имеем $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ способа выбрать из колоды четыре карты разных мастей и разного достоинства.

Ответ. 3024 способа.

Попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 28. Сколько существует способов сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материал шести различных цветов?

Задача 29. В русском алфавите 33 буквы. Сколько различных пятибуквенных «слов» можно составить, если не допускать «слов», где две одинаковые буквы идут подряд?

«Слово» не обязательно должно быть осмысленным. Например, *абвгд* или *ъыййы* являются допустимыми «словами», а вот *класс*, *ссора* и *пресс* таковыми не являются, так как в них есть две одинаковые подряд идущие буквы.

Задача 30. Сколько существует восьмизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

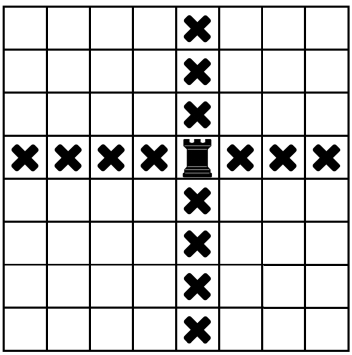
Задача 31. Сколько существует десятизначных чисел с нечётной суммой цифр?

Задача 32. На полке стоят пять книг. Сколько существует способов выбрать несколько из них и сложить в стопку, если в стопке должно быть от двух до четырёх книг и нам важен порядок, в котором лежат книги в стопке?

Отметим ещё раз, что при решении этих задач надо не забывать, что выбор первого объекта может сузить множество вариантов для выбора следующего объекта. Так, например, в задаче 26 выбор старосты ограничивает число людей, претендующих на роль его помощника до 24 человек, то есть выборы старосты и помощника не являются независимыми, в отличии, например, от задачи 10, где выбор пирожного никак не влиял на последующий выбор печенья.

Рассмотрим ещё несколько задач на ту же идею, объединённых общей тематикой, — это *задачи на шахматных досках*. Заметим, что для решения этих задач про шахматы, по сути, ничего знать не надо, кроме того, как ходят фигуры.

Задача 33. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга?



Решение. Чёрную ладью можно поставить на любое поле доски, то есть существует 64 способа это сделать. После того как мы поставим чёрную ладью на какое-то поле, для белой ладьи останется лишь $64 - 15 = 49$ допустимых полей, на которые её можно поставить, так как где бы ни стояла чёрная ладья, она бьёт 15 полей (считая то поле, на котором она стоит).

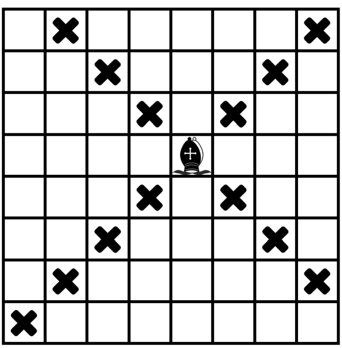
Действительно, кроме того поля, на котором стоит чёрная ладья, она бьёт ещё семь полей, находящихся с ней в той же строке и семь полей, находящихся с ней в том же столбце.

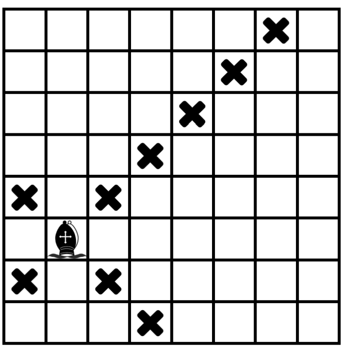
Значит, всего существует $64 \cdot 49 = 3136$ способов поставить на шахматную доску чёрную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга.

Ответ. 3136 способов.

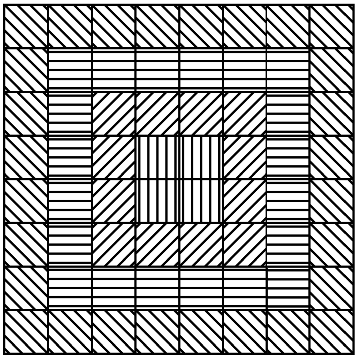
Задача 34. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого слона так, чтобы они не били друг друга?

Решение. На первый взгляд кажется, что эта задача ничем не отличается от предыдущей. Вроде бы опять достаточно понять, сколько полей бьёт слон, когда он стоит на шахматной доске. Но, попробовав поставить его в разные места, мы замечаем, что в отличие от ладьи количество полей, которые бьёт слон, зависит от того, где он стоит:





Поэкспериментировав с положением слона, мы замечаем, что чем ближе к центру доски он располагается, тем больше клеток он бьёт. Давайте заштрихуем все поля шахматной доски четырьмя разными способами, как показано на рисунке:



Тогда

- если чёрный слон стоит на поле ▧, то он бьёт восемь полей (включая то, на котором он стоит);
- если чёрный слон стоит на поле ▤, то он бьёт десять полей;
- если он стоил на поле ▨, то бьёт 12 полей;
- если на поле ▥ — 14 полей.

Таким образом, если чёрный слон стоит на одном из 28 полей ▧, то для белого слона остаётся $64 - 8 = 56$ полей, куда его можно поставить. Если чёрный слон на одном из 20 полей ▤, то у белого слона остаётся $64 - 10 = 54$ поля. Если он стоит на одном из 12 полей ▨, то для белого слона остаётся $64 - 12 = 52$ поля. Если на одном из четырёх полей ▥, то у белого есть $64 - 14 = 50$ возможных полей.

Значит, если мы выберем поставить чёрного слона на одно из полей ▧, то у нас будет $28 \cdot 56 = 1568$ вариантов расстановки двух слонов. Если выберем поставить чёрного слона на поле ▤, то будет $20 \cdot 54 = 1080$ вариантов расстановки. Если решим поставить на поле ▨, то будет $12 \cdot 52 = 624$ варианта. А если на поле ▥, то $4 \cdot 50 = 200$ вариантов.

Таким образом, получается, что всего существует

$$1568 + 1080 + 624 + 200 = 3472$$

способа поставить на шахматную доску чёрного и белого слона так, чтобы они не били друг друга.

Ответ. 3472 способа.

В последней задаче мы увидели, как правила произведения и суммы могут работать в связке. Мы разделяем все возможные способы на группы, в которых мы можем легко посчитать их количество, а потом суммируем эти количества для всех групп.

Чтобы проверить, что вы поняли, как это работает, попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 35. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого ферзя так, чтобы они не били друг друга?

Задача 36. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого короля так, чтобы полученная ситуация не противоречила правилам игры в шахматы? (В шахматах короли не могут стоять в соседних по стороне или по вершине клетках.)

Задача 37. Сколько существует способов поставить на шахматную доску чёрного и белого коня так, чтобы они не били друг друга?