ВВЕДЕНИЕ

Пособие, которое вы держите в руках, — краткий справочник теоретического материала для сдачи ЕГЭ, позволяющий в экспресс-режиме подготовиться к экзамену по математике профильного уровня в 11 классе. Книга включает 6 разделов — «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». Для удобства восприятия и запоминания материал в основном приведён в таблицах и схемах. Структура и содержание пособия позволяют ученику актуализировать, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Авторы надеются, что данное пособие поможет любому ученику подготовиться к ЕГЭ по математике и успешно сдать его.

Раздел 1. **АЛГЕБРА**

1. Числа, корни и степени

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел.**

Множество натуральных (лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — Z.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

a — основание степени

n — показатель степени

Свойства степеней

$a^1 = a$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

При чётной степени

$a,\ b > 0$

$(-a)^n = b$ $\qquad -a^n = -b$

$(-3)^4 = 81$ $\qquad -3^4 = -81$

Если в основании отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$(-3)^4 = 81.$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$(-2)^5 = -32.$

ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью.**

$\frac{m}{n}$ $\begin{matrix} \leftarrow \text{числитель} \\ \leftarrow \text{знаменатель} \end{matrix}$

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби.**

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}, \text{ где } c\neq 0.$$

Действия с обыкновенными дробями

$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,17 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 3 & \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8}=2{,}125;$$

$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{12}{100}=0{,}12;$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{375}{1000}=0{,}375.$$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 8 \\ \underline{16} & 2{,}125 \\ -10 & \\ \underline{8} & \\ -20 & \\ \underline{16} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9}=\frac{3\cdot 9+5}{9}=\frac{32}{9}.$$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных.

   • Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

   • Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) делимое умножить на число, обратное делителю.

Действия с десятичными дробями

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби,** надо:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой.

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:
1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:
1) выполнить деление целой части на натуральное число;
2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части;
3) продолжить деление дробной части, добавляя (по необходимости) ноль к остатку.

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) после этого выполнить деление на натуральное число.

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$1\% = \dfrac{1}{100}$	$100\% = 1$	$3\% = 0{,}03$ $(3 : 100)$	$0{,}2 = 20\%$ $(0{,}2 \cdot 100)$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел.**

Множество рациональных (лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Действия с отрицательными и положительными числами

Чтобы **сложить два отрицательных числа,** надо:

1) сложить их модули;
2) поставить перед полученным числом знак «–».

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:
1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными** знаками, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0 \qquad a^0=1,\ a\neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n},\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n>1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем n-й степени $(n\in N,\ n>1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

$\sqrt[m]{a}$ не существует, если $a<0$ и m — чётное число.

Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n}=|x|$.

Свойства корней n-й степени

Для любых $a\ge 0$, $b\ge 0$, $n\ge 2$, $m\ge 2$:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k} \qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b\ne 0 \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$$

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a>0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число $(n\ge 2,\ m\in Z,\ n\in N)$, тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$a > 1$, r — рациональное число

Если $r > 0$, то $a^r > 1$. **Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$.**

$a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r > a^t$.

$0 < a < 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r < a^t$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R$, $a > 0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

$$\frac{2^{2\sqrt{3}}}{0,25^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}} =$$

$$= 2^{2\sqrt{3}-\left(-4+2\sqrt{3}\right)} = 2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = 2^4 = 16.$$

2. Основы тригонометрии

Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мерам угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

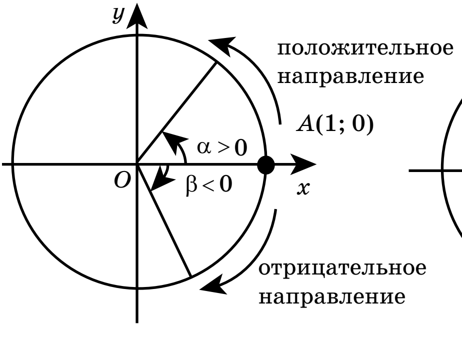
Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy.

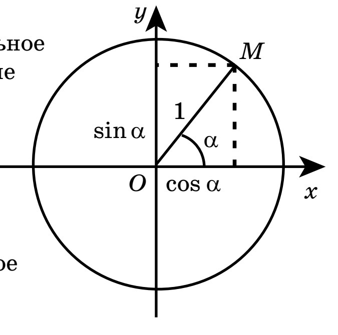
Синусом угла α ($\sin\alpha$) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α ($\cos\alpha$) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Тангенсом угла α ($\mathrm{tg}\,\alpha$) называется отношение синуса угла к его косинусу.

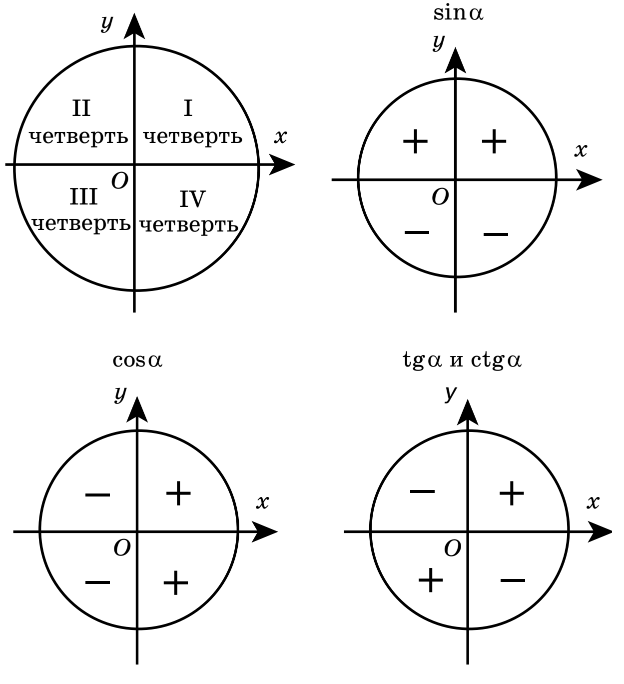
Котангенсом угла α ($\mathrm{ctg}\,\alpha$) называется отношение косинуса угла к его синусу.





$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса

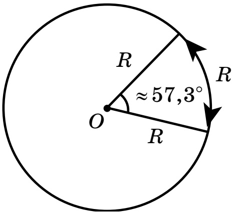


РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан.**

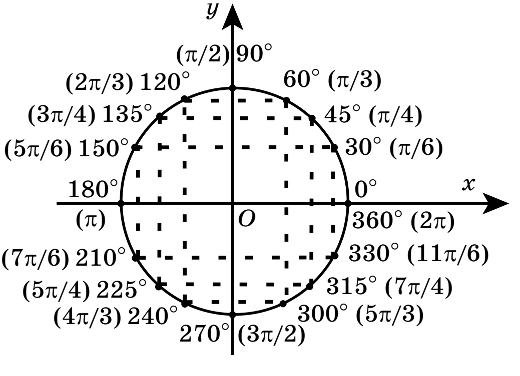
$$1\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{рад}$$

$$\alpha\ \text{рад} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ \qquad \alpha^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha\ \text{рад}$$



Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Градусы	180°	270°	360°
Радианы	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ЧИСЛА

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \qquad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

Знак выражения определяется по четверти (см. с. 15).

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, где $n \in Z$, то такое тригонометрическое выражение можно привести к более простому виду, используя формулы приведения.

Для того чтобы **записать любую формулу приведения**, необходимо руководствоваться следующими правилами.

1. В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии, что $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
2. Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.
3. Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

СИНУС И КОСИНУС ДВОЙНОГО УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \qquad 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

3. Логарифмы

Раздел содержит основные сведения о логарифмической функции, её свойствах и об их использовании при упрощении логарифмических выражений.

ЛОГАРИФМ ЧИСЛА

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a>0,\ a\neq 1$) называют число c, такое, что $b=a^c$.

$$c=\log_a b$$

$$\log_a a=1 \qquad \log_a 1=0 \qquad \log_a a^c=c \qquad a^{\log_a b}=b$$

ЛОГАРИФМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО, СТЕПЕНИ

Пусть $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ c>0,\ r$ — любое действительное число.

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

$$\log_a b^r=r\log_a b \qquad \log_{a^r} b=\frac{1}{r}\log_a b$$

ДЕСЯТИЧНЫЙ И НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМЫ, ЧИСЛО e

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. Обозначают $\lg a$ вместо $\log_{10} a$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближённо равное 2,7. Обозначают $\ln a$ вместо $\log_e a$.

Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

4. Преобразование выражений

Данный раздел содержит основные сведения о преобразованиях выражений, включающих арифметические операции. Рассматриваются преобразования иррациональных, тригонометрических и логарифмических выражений и выражений, содержащих знак абсолютной величины.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Подобные слагаемые

Слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть, называются **подобными слагаемыми.**

Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

Раскрытие скобок

Если перед скобками стоит знак «+», то можно опустить скобки и знак «+», сохранив знаки слагаемых, стоящих в скобках. Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «+».

Если перед скобками стоит знак «–», надо заменить этот знак на «+», поменяв знаки всех слагаемых в скобках на противоположные, а затем раскрыть скобки.

Распределительное свойство

$$\boldsymbol{a(b \pm c) = ab \pm ac}$$

Чтобы умножить одну сумму на другую, надо каждое слагаемое первой суммы умножить на каждое слагаемое второй суммы и сложить полученные произведения.

Способы разложения на множители

Вынесение общего множителя за скобки можно продемонстрировать на примере:

$$879 \cdot 147 - 147 \cdot 679 = 147 \cdot (879 - 679) =$$
$$= 147 \cdot 200 = 29\,400.$$

Способ группировки

Найдите значение выражения:

$x^2 + 9x - ax - 9a$ при $x = 2{,}59$ и $a = 1{,}59$.

>>>

>>>

$$x^2+9x-ax-9a=\left(x^2+9x\right)+\left(-ax-9a\right)=x\left(x+9\right)-$$

$$-a\left(x+9\right)=\left(x+9\right)\left(x-a\right)=\left(2{,}59+9\right)\left(2{,}59-1{,}59\right)=$$

$$=11{,}59.$$

Ответ: $11{,}59$.

Использование формул сокращённого умножения

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$

Выделение полного квадрата

Суть данного метода состоит в выделении полного квадрата и последующем применении формулы разности квадратов.

>>>

>>>

Разложите на множители.

$$4x^4+1=4x^4+4x^2+1-4x^2=\left(2x^2+1\right)^2-(2x)^2=$$
$$=\left(2x^2+1-2x\right)\left(2x^2+1+2x\right)=$$
$$=\left(2x^2-2x+1\right)\left(2x^2+2x+1\right).$$

Сокращение дробей

$$\frac{ab}{cb}=\frac{a}{c}$$

Сложение и вычитание рациональных дробей

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого данные дроби приводят к общему знаменателю.

Умножение и деление рациональных дробей

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ОПЕРАЦИЮ ВОЗВЕДЕНИЯ В СТЕПЕНЬ

Чтобы **произведение возвести в степень,** необходимо каждый множитель возвести в эту степень.

Чтобы **дробь возвести в степень**, необходимо числитель и знаменатель возвести в эту степень.

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=a^n \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Преобразование показательных выражений

$$y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in R,\ y>0$$

При преобразовании показательных выражений используются свойства степеней с действительным показателем.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ КОРНИ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Чётная натуральная степень: $\sqrt[2n]{x},\ x\geq 0$

Нечётная натуральная степень: $\sqrt[2n+1]{x},\ x\in R$

Вынесение множителя за знак корня

а) $\sqrt{125}=\sqrt{25\cdot 5}=5\sqrt{5}$; б) $\sqrt{1\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$;

в) $\sqrt[3]{0{,}0081}=\sqrt[3]{0{,}027\cdot 0{,}3}=0{,}3\sqrt[3]{0{,}3}$;

г) $\sqrt[5]{-96}=\sqrt[5]{-32\cdot 3}=-2\sqrt[5]{3}$.

Внесение множителя под знак корня

а) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$;

б) $2\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{2^5\cdot 4}=\sqrt[5]{32\cdot 4}=\sqrt[5]{128}$;

в) $-3\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{3^4\cdot 2}=-\sqrt[4]{81\cdot 2}=-\sqrt[4]{162}$;

г) $-4\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(-4)^3\cdot 5}=\sqrt[3]{-64\cdot 5}=\sqrt[3]{-320}$.

Освобождение от иррациональности в знаменателе

При преобразовании дробного выражения, в знаменателе которого содержится иррациональное выражение, необходимо записать дробь так, **чтобы в знаменателе не было радикалов.**

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{y}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}{b\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{y^{n-1}}}{by}$$

Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое иррациональное выражение:

$$\frac{a}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}=\frac{a\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)}=\frac{a\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)}{x-y}$$

Используя свойства корней n-й степени, можно осуществить преобразование выражений, содержащих корни натуральной степени. Такие выражения называются **иррациональными.**

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для преобразования тригонометрических выражений используются тригонометрические формулы, формулы сокращённого умножения, табличные значения тригонометрических функций.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ОПЕРАЦИЮ ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ

Для преобразования выражений, содержащих логарифмы, используются определение и свойства логарифмов, основное логарифмическое тождество, формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию, свойства степеней.

$$\log_{v^{2n}} t = \frac{1}{2n}\log_{|v|} t \qquad \log_v t^{2n} = 2n\log_v |t|$$

$$\log_{\sqrt{t}} \sqrt{x} = \log_t x \qquad \log_{\frac{1}{x}} y = -\log_x y$$

МОДУЛЬ ЧИСЛА

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число –а, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$.

$$|3| = 3; \quad |-5| = 5; \quad |0| = 0.$$

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Свойства модулей

$|a| \geq 0$

$|a| = |-a|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

$|a|^2 = a^2$

$|ab| = |a| \cdot |b|$

Если $a > b$, то $|a - b| = a - b$.

Если $a < b$, то $|a - b| = b - a$.

Модуль любого действительного числа — число неотрицательное. Модули противоположных чисел равны.

Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел

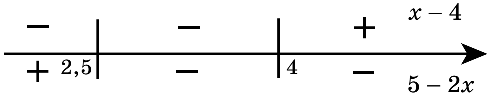
Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел.

Если числовое выражение, стоящее под знаком модуля, неотрицательно (отрицательно), то можно опустить знак модуля, сохранив знак каждого слагаемого (изменив знак каждого слагаемого на противоположный).

Квадрат модуля числа равен квадрату данного числа.

Упростите выражение:

$|x-4|-|5-2x|$.



1) Определим промежутки знакопостоянства каждого выражения, стоящего под знаком модуля.
2) Рассмотрим три случая:

а) $x \in (-\infty;\ 2{,}5]$: $-(x-4)-(5-2x)=-x+4-$
$-5+2x=x-1$;

б) $x \in (2{,}5;\ 4)$: $-(x-4)+(5-2x)=-x+4+5-$
$-2x=-3x+9$;

в) $x \in [4;\ +\infty)$: $(x-4)+(5-2x)=x-4+5-$
$-2x=-x+1$.

Ответ: $x-1$, если $x \le 2{,}5$;
$-3x+9$, если $2{,}5 < x < 4$;
$-x+1$, если $x \ge 4$.

Раздел 2. **УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА**

1. Уравнения

Раздел знакомит с основными методами решений линейных, дробно-рациональных, квадратных, показательных и логарифмических уравнений и их систем. Рассмотрены равносильные преобразования, которые используются при решении уравнений и систем уравнений.

Уравнение — это равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Неизвестные числа в уравнениях принято обозначать строчными латинскими буквами, например p, t, u и т. п., но наиболее часто используются x, y и z.

Уравнение имеет вид

$$f(x)=g(x).$$

Корнем уравнения называется число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

При решении уравнений

Если перенести слагаемое из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному:

$$4x-3=x+5 \Leftrightarrow 4x-x=5+3.$$

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет. При отсутствии корней в ответе используют знак $\varnothing$ (пустое множество).

При решении уравнений

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному:

$$\frac{1}{3}x-1=x \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{1}{3}x-1\right)=3\cdot x.$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Алгебраическое уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — коэффициенты, $a \neq 0$, называется **квадратным уравнением.**

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

$$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$$

1) Если $D>0$, то $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$;

2) если $D=0$, то $x=\dfrac{-b}{2a}$;

3) если $D<0$, то корней нет.

$$ax^2+bx+c=0,\ b$$ **— чётное число**

$$b_1=b:2$$

$$D_1={b_1}^2-ac$$

1) Если $D_1>0$, **то** $x_1=\dfrac{-b_1-\sqrt{D_1}}{a}$, $x_2=\dfrac{-b_1+\sqrt{D_1}}{a}$;

2) если $D_1=0$, **то** $x=\dfrac{-b_1}{a}$;

3) если $D_1<0$, **то корней нет.**

Теорема Виета

Если x_1 **и** x_2 **— корни уравнения** $ax^2+bx+c=0$, **то** $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, **то** x_1 **и** x_2 **являются корнями уравнения** $x^2+px+q=0$.

Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение называется **неполным**, если хотя бы один из его коэффициентов b и c равен нулю. Неполные квадратные уравнения можно решить, используя формулу корней квадратного уравнения с дискриминантом (см. с. 31), но возможно и более простое решение.

Если $c=0$:

$4x^2+x=0,$

$x(4x+1)=0,$

$x=0$ **или** $4x+1=0,$

$4x=-1,$

$x=-0{,}25.$

Ответ: $-0{,}25;\ 0.$

Если $b=0,\ c=0$:

$2x^2=0,$

$x^2=0,$

$x=0.$

Ответ: $0.$

Если $b=0$:

а) $2x^2-6=0,\ 2x^2=6,\ x^2=3,$

$x_1=\sqrt{3},\ x_2=-\sqrt{3}.$

Ответ: $-\sqrt{3};\ \sqrt{3}.$

б) $x^2+9=0,\ x^2=-9.$

Уравнение корней не имеет, так как квадрат — число неотрицательное.

Ответ: $\varnothing.$

Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ называется **биквадратным.** Биквадратное уравнение приводится к квадратному уравнению с помощью замены $x^2=t,\ \ t\ge 0.$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $f(x)=g(x)$ называется **рациональным,** если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения.

Линейные уравнения

Уравнение вида $ax=b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называется

линейным уравнением с одной переменной. Количество корней линейного уравнения может быть различным.

Один корень: $ax = b$, где $a \neq 0$, $x = \frac{b}{a}$.

Нет корней: $ax = b$, где $a = 0$, $b \neq 0$.

Бесконечное множество корней: $ax = b$, где $a = 0$, $b = 0$.

Целые уравнения

Уравнение с одной переменной называют **целым** уравнением, если обе его части являются целыми выражениями.

Если $f^{2n}(x) = g^{2n}(x)$, то $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$.

Если $f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x)$, то $f(x) = g(x)$.

Одним из основных подходов к решению целых уравнений является их сведение к равносильным алгебраическим уравнениям. Так, в наиболее простых случаях решение сводится к решению линейных или квадратных уравнений, а в общем случае — к решению алгебраического уравнения степени n.