

Содержание

Предисловие ко второму изданию.....	11
Предисловие к первому изданию.....	13
Часть I. Методы векторных измерений.....	14
Глава 1. Введение.....	14
1.1. Исторический обзор.....	14
1.2. Представление синусоид в виде комплексной амплитуды.....	16
1.3. Ряды Фурье и преобразование Фурье.....	18
1.3.1. Ряды Фурье.....	18
1.3.2. Преобразование Фурье.....	19
1.4. Дискретные данные и наложение спектров.....	25
1.5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).....	27
1.5.1. ДПФ и ряды Фурье.....	30
1.5.2. ДПФ и представление в виде комплексного вектора.....	32
1.6. Эффект утечки.....	34
Литература.....	37
Глава 2. Оценивание комплексных векторов сигналов с номинальной частотой.....	39
2.1. Комплексные векторы сигналов с номинальной частотой.....	39
2.2. Формулы обновления комплексных векторов.....	40
2.2.1. Нерекурсивные обновления.....	40
2.2.2. Рекурсивные обновления.....	42
2.3. Влияние сигнала, шума и ширины окна.....	44
2.3.1. Ошибки дискретизации во времени.....	47
2.4. Оценка комплексного вектора с использованием окна данных дробного периода.....	49
2.5. Качественная оценка комплексных векторов и индикатор (монитор) переходных процессов.....	50
2.6. Смещение постоянного тока во входных сигналах.....	54
2.7. Оценивание без ДПФ.....	57
Литература.....	57
Глава 3. Оценка комплексной величины вектора при частоте сигнала, отличающейся от номинального значения.....	58
3.1. Виды колебаний частоты в энергосистемах.....	58
3.2. Оценка ДПФ на частоте, отличающейся от номинального значения.....	59
3.2.1. Входной сигнал с частотой, отклоняющейся от номинального значения.....	59
3.3. Постобработка оценок частоты, отклоняющейся от номинальной.....	68
3.3.1. Простой усредняющий цифровой фильтр для $2f_0$	68
3.3.2. Фильтр передискретизации сигнала.....	69
3.4. Оценка комплексных векторов чистых сигналов прямой последовательности.....	71
3.4.1. Симметричные составляющие.....	71
3.5. Оценки несимметричных входных сигналов.....	74

3.5.1. Несимметричные входные сигналы с частотой, отличающейся от номинальной величины.....	74
3.5.2. Номограмма.....	79
3.6. Частота отсчетов, синхронизированная по частоте энергосистемы.....	82
3.7. Оценивание комплексного вектора без ДПФ.....	84
Литература.....	84
Глава 4. Оценка частот.....	86
4.1. Обзор способов измерения частоты.....	86
4.2. Оценки частоты на основе симметричных трехфазных входных сигналов.....	87
4.3. Оценки частоты на основе несимметричных входных сигналов.....	91
4.4. Нелинейное оценивание частоты.....	92
4.5. Другие методы измерения частоты.....	94
Литература.....	95
Глава 5. Устройства синхронизированных векторных измерений и концентраторы синхронизированных векторных данных.....	96
5.1. Введение.....	96
5.2. Типовое УСВИ.....	97
5.3. Система глобального позиционирования.....	99
5.4. Иерархия систем векторных измерений.....	100
5.5. Средства связи для УСВИ.....	102
5.6. Стандарты.....	105
5.6.1. История.....	105
5.6.2. Синхронизированные векторные измерения.....	108
5.6.3. Передача данных синхронизированных векторных измерений.....	120
5.6.4. Файлы КСВД.....	127
Литература.....	128
Глава 6. Переходная характеристика устройств векторных измерений.....	129
6.1. Введение.....	129
6.2. Природа переходных процессов в энергосистемах.....	130
6.2.1. Электромагнитные переходные процессы.....	130
6.2.2. Электромеханические переходные процессы.....	132
6.3. Переходная характеристика измерительных трансформаторов.....	135
6.3.1. Трансформаторы напряжения.....	135
6.3.2. Трансформаторы тока.....	137
6.4. Переходная характеристика фильтров.....	138
6.4.1. Фильтры для защиты от перенапряжений.....	138
6.4.2. Сглаживающие фильтры.....	138
6.5. Переходная характеристика во время электромагнитных переходных процессов.....	140
6.6. Переходная характеристика во время качаний мощности.....	141
6.6.1. Амплитудная модуляция.....	142
6.6.2. Частотная модуляция.....	144
6.6.3. Одновременная модуляция по амплитуде и по частоте.....	146

6.6.4. Соображения относительно наложения спектров при разных частотах передачи комплексных векторов.....	147
Литература.....	150
Часть II. Области применения векторных измерений.....	151
Глава 7. Оценка состояния.....	151
7.1. Из истории распределения диспетчером нагрузки.....	151
7.2. Метод взвешенных наименьших квадратов.....	152
7.2.1. Наименьшие квадраты.....	152
7.2.2. Линейный метод взвешенных наименьших квадратов.....	153
7.2.3. Числа обусловленности, точки влияния и наименьшие абсолютные значения при использовании линейного метода наименьших квадратов.....	155
7.2.4. Нелинейный метод взвешенных наименьших квадратов.....	158
7.3. Оценивание состояния энергосистемы.....	159
7.4. Обнаружение недостоверных данных.....	164
7.5. Оценка состояния с помощью векторных измерений.....	167
7.5.1. Линейная оценка состояния.....	168
7.5.2. Альтернативный вариант учета результатов векторных измерений.....	171
7.5.3. Оценка при неполной наблюдаемости.....	172
7.5.4. Раздельная оценка состояния.....	180
7.6. Калибровка.....	184
7.6.1. Калибровка по измерениям прямой последовательности.....	185
7.6.2. Калибровка по измерениям фазы.....	189
7.6.3. Одновременная калибровка параметров линий и преобразователей.....	195
7.7. Динамические алгоритмы оценки.....	203
Литература.....	204
Глава 8. Управление с обратной связью и векторными измерениями.....	206
8.1. Введение.....	206
8.2. Оптимальное линейное управление.....	207
8.3. Оптимальное линейное управление применительно к нелинейным задачам.....	208
8.4. Согласованное управление колебаниями.....	215
8.5. Политопное управление с использованием линейных матричных неравенств.....	220
8.5.1. Адаптивное управление на основе векторных измерений.....	227
8.5.2. Перспективные исследования управления с использованием векторных измерений.....	230
Литература.....	231
Глава 9. Принятие решений с использованием векторных измерений.....	234
9.1. Управление событиями в дискретном времени.....	234
9.2. Деревья решений.....	236
9.2.1. Дерево классификации и регрессии (CART).....	238

9.2.2. Метод линейного дискриминанта Фишера применительно к синхронизированным векторным данным.....	239
9.2.3. Применение ЛДФСВД в энергосистемах.....	242
9.3. Нормализация и проверка правильности синхронизированных векторных данных.....	248
9.3.1. Алгоритм квадратичного упреждения по трем отсчетам.....	248
9.3.2. Методология для нормализации и проверки правильности синхронизированных векторных данных.....	252
9.3.3. Альтернативные подходы к решению проблем качества данных, используемых линейным оценщиком состояния.....	266
Литература.....	268
Глава 10. Системы защиты с комплексными векторами на входе.....	272
10.1. Введение.....	272
10.2. Дифференциальная защита линий электропередачи.....	273
10.3. Дистанционная защита многоконцевых линий электропередачи.....	275
10.4. Адаптивная защита.....	277
10.4.1. Адаптивная защита от асинхронного хода.....	278
10.4.2. Баланс надежности несрабатывания и устойчивости срабатывания.....	282
10.4.3. Трансформатор.....	284
10.4.4. Адаптивное восстановление системы.....	285
10.5. Управление эффективностью резервной защиты.....	287
10.5.1. Неявные отказы.....	288
10.6. Интеллектуальное разделение энергосистемы на части.....	291
10.7. Диспетчерская аварийная разгрузка.....	292
Литература.....	294
Глава 11. Распространение электромеханических волн.....	297
11.1. Введение.....	297
11.2. Модель.....	299
11.3. Электромеханическое телеграфное уравнение.....	304
11.4. Непрерывная величина напряжения.....	306
11.5. Воздействие на системы защиты.....	308
11.5.1. Реле максимальной токовой защиты.....	308
11.5.2. Реле полного сопротивления.....	308
11.5.3. Реле защиты от асинхронного хода.....	309
11.5.4. Автоматическая разгрузка.....	310
11.6. Дисперсия.....	311
11.7. Распределение параметров.....	311
Литература.....	313
Предметный указатель.....	315

Предисловие ко второму изданию

Первая редакция этой книги вышла в начале 2008 года. За прошедшее с тех пор время во всем мире неуклонно совершенствовались технологии для улучшения мониторинга, защиты и контроля энергосистем. Во многих странах в сетях активно устанавливаются устройства синхронизированных векторных измерений (УСВИ) и системы мониторинга переходных режимов (СМПР). В США различные электроэнергетические компании, правительственные учреждения, в частности Министерство энергетики США, и многие другие отраслевые группы по-прежнему поддерживают деятельность, связанную с этой технологией. Хотя в масштабах электросети США количество подстанций, оснащенных УСВИ и СМПР, остается небольшим, было положено отличное начало, а отдельные электроэнергетические компании в большинстве случаев продолжают прилагать усилия для увеличения охвата СМПР.

На наш взгляд, новым рубежом в этой области является разработка новых направлений применения УСВИ и СМПР. Работа над новыми способами применения продолжается во многих организациях по всему миру. Очень полезной областью применения является анализ аварийных происшествий после серьезных возмущений в энергосистеме, он помогает при определении причин и хронологии событий, которые способствовали возникновению возмущений. В связи с этим важное значение имеет регистрация и получение сведений о таких событиях, что требует отбора важных данных СМПР для проверки моделей системы, используемых при моделировании в рамках анализа аварийных происшествий. В настоящее время нет удобного инструмента, который будет проверять все сохраненные данные и определять, какие сегменты данных представляют наибольший интерес. Мы ожидаем, что одним из результатов данного исследования станут применения для решения задачи отбора данных.

Во многих организациях разрабатывается оценка состояния исключительно на основании результатов измерений УСВИ или в сочетании с системой диспетчерского управления и сбора данных (SCADA). Новым путем развития в этом направлении является оценка состояния в фазовых координатах, а не с помощью оценки напряжения прямой последовательности. Также многими организациями разрабатываются защита и управление с использованием СМПР, некоторые результаты таких исследований представлены здесь.

Мы уточнили многие разделы этой книги и надеемся, что это сделает наши идеи яснее.

Чрезвычайно полезная особенность этой редакции заключается в возможности опираться на последние работы наших коллег. Вместо того чтобы самим пересказывать чужие работы, мы пригласили принять непосредственное участие в создании этой книги их авторов. Свой вклад внесли трое наших коллег

и друзей, которые написали соответствующие части. Несколько разделов этой книги принадлежат перу д-ра Анамитры Пала, бывшего студента магистратуры Политехнического университета Виргинии; кроме того, он участвовал в написании главы 9, посвященной передовым разработкам в области управления с использованием систем мониторинга переходных режимов. Кеннет Э. Мартин сыграл ведущую роль в создании стандартов для УСВИ и СМПП в Комитете Энергетического общества по релейной защите энергосистем, а также параллельно работал в МЭК, чтобы стандарты стали более точными и шли в ногу с развитием технологий. Он участвовал в написании раздела 5.6, посвященного нынешнему состоянию этих стандартов. Мы признаем подвижность стандартов; они, безусловно, будут изменены в ближайшие годы с появлением новых разработок в данной области технологии. Тему калибровки измерительных трансформаторов и оценки параметров передающих сетей первоначально разрабатывала д-р Чжунъюй У, будучи аспиранткой Политехнического университета Виргинии. Она продолжила работу в этой сфере и участвовала в написании раздела 7.6, в котором объединены новейшие разработки в этой области.

Мы благодарны д-ру Палу, г-ну Мартину и д-ру У за их вклад в создание нашей книги. Мы считаем, что это значительно увеличило общий охват темы.

Наконец, мы хотели бы поблагодарить многих коллег по всему миру, которые использовали нашу книгу и переписывались с нами по вопросам, представляющим взаимный интерес. Мы надеемся, что новое издание нашей книги будет по-прежнему интересно для студентов, исследователей и специалистов отрасли.

г. Уилсонвилл, штат Орегон, США
г. Блэксберг, штат Вирджиния, США
Январь 2017 года

Арун Г. Фадке
Джеймс С. Торп

Предисловие к первому изданию

Синхронизированные векторные измерения стали предпочтительным методом измерений электрических энергосистем. Они обеспечивают синхронизацию измерений напряжения и силы тока прямой последовательности с точностью до микросекунды. Это стало возможным благодаря наличию системы глобального позиционирования и методам обработки дискретных данных, разработанным для применения в компьютерной релейной защите. Помимо значений напряжения и силы тока прямой последовательности, эти системы измеряют локальную частоту и скорость изменения частоты и могут настраиваться для измерения гармоник, величин обратных и нулевых последовательностей, а также отдельных значений фазового напряжения и тока. В настоящее время существует около двух десятков коммерческих производителей устройств векторных измерений (УСВИ), разработанные Комитетом IEEE по релейной защите энергосистем отраслевые стандарты сделали возможной оперативную совместимость устройств разных производителей.

Недавний всплеск масштабных веерных отключений энергосистем по всему миру придал дополнительный импульс широкомасштабному развертыванию УСВИ. Измерение параметров прямой последовательности обеспечивает кратчайший прямой доступ к получению сведений о состоянии энергосистемы в любой момент времени. Многие направления применения результатов этих измерений описаны в технической литературе, и, несомненно, в ближайшие годы их будет разработано еще больше.

Авторы этой книги стояли у истоков данной технологии, они вместе со своими коллегами и учениками подготовили обширный массив литературы, посвященной технологии векторных измерений и ее применению. Также значительный вклад в эту область внесли другие исследователи по всему миру. Наша цель при написании этой книги заключается в предоставлении заинтересованным читателям связного отчета о развитии технологии и о новых способах применения результатов этих измерений. Мы надеемся, что эта книга поможет инженерам энергосистем понять азы организации и работы систем синхронизированных векторных измерений. Эта технология должна начать эру совершенствования мониторинга, защиты и контроля энергосистем.

г. Блэксберг, штат Вирджиния, США
Январь 2008 года

Арун Г. Фадке
Джеймс С. Торп

Часть I

Методы векторных измерений

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

I.1. Исторический обзор

Фазовые углы комплексных значений напряжения на шинах электрической сети всегда представляли особый интерес инженеров энергетических систем. Общеизвестно, что переток активной (действительной) мощности в линии электропередачи практически пропорционален косинусу¹ сдвига фаз напряжений на двух зажимах линии. Поскольку многие аспекты планирования и эксплуатации энергосистемы непосредственно связаны с перетоком активной мощности, задача измерения сдвигов фаз при передаче электроэнергии возникла достаточно давно. Первое современное техническое решение, предполагающее непосредственное измерение сдвига фаз, описано в трех статьях начала 1980-х годов [1–3]. Речь шла о синхронизации опорного времени в разных точках энергосистемы с использованием спутниковых систем LORAN-C, GOES и радиопередачи HBG (в Европе). Момент перехода фазового напряжения через нуль в положительном направлении использовался для оценки фазового угла в данном месте относительно опорного времени. На основе разницы углов, измеренных в двух местах относительно общей точки отсчета, устанавливался сдвиг фаз между напряжениями на двух концах. Точность измерений, достигнутая в этих системах, составляла порядка 40 мкс. Измерялись углы однофазного напряжения, но попытки измерить модуль комплексного вектора преобладающего напряжения, разумеется, не предпринимались. Также не принимались во внимание гармоники сигнала напряжения. Эти способы измерения сдвигов фаз не могут быть распространены на системы векторных измерений широкого охвата и остаются единственными в своем роде системами, которые больше не используются.

Началом современной эры технологий векторных измерений стали исследования, проводившиеся в области компьютерной релейной защиты линий электропередачи. Первые опыты по релейной защите линий

¹ В авторском тексте «пропорционален синусу». — *Прим. ред.*

электропередачи с помощью микропроцессоров показали, что имеющихся в те времена (1970-е годы) вычислительных мощностей едва ли было достаточно для проведения расчетов, необходимых для выполнения всех функций релейной защиты линии электропередачи.

Значительная часть этих расчетов была направлена на решение шести уравнений тока короткого замыкания для каждого отсчета, чтобы определить наличие какого-либо из десяти типов замыканий, возможных в трехфазной линии электропередачи. Поиск способов, которые устранили бы необходимость решения шести уравнений, привел к появлению нового метода релейной защиты, основанного на анализе симметричных составляющих напряжений и токов в линии. Применение симметричных составляющих и некоторых величин, полученных с их помощью, сделало возможным выполнение всех расчетов короткого замыкания с помощью одного уравнения. Этот новый алгоритм защиты линий электропередачи, основанный на симметричных составляющих, был описан в статье, опубликованной в 1977 году [4]. В рамках данной теории были описаны эффективные алгоритмы вычисления симметричных составляющих трехфазных напряжений и токов, а расчет напряжений и токов прямой последовательности с использованием алгоритмов, предложенных в этой статье, дал толчок развитию современных систем векторных измерений. Вскоре стало ясно, что измерение параметров прямой последовательности (в рамках вычисления симметричных составляющих) представляет большую ценность само по себе. Напряжения прямой последовательности в сети формируют вектор состояния энергосистемы, а это дает основополагающие сведения для анализа всей энергетической системы в целом. Первая работа, в которой показана важность векторных измерений напряжений и токов прямой последовательности и описаны некоторые варианты применения этих измерений, была опубликована в 1983 году [5] и может считаться отправной точкой современной технологии синхронизированных векторных измерений. Примерно к этому же времени относится начало развертывания Глобальной навигационной системы (GPS) [6]. Стало ясно, что эта система обеспечивает наиболее эффективный способ синхронизации измерений параметров энергосистем на больших расстояниях. Первые прототипы современных устройств векторных измерений (УСВИ), использующих GPS, были созданы в Политехническом университете Виргинии в начале 1980-х годов, два образца таких устройств представлены на рис. 1.1. УСВИ, разработанные в Политехническом университете Виргинии, были установлены на нескольких подстанциях Бонневильского управления энергетики, Американской электроэнергетической компании и Энергетического управления Нью-Йорка. Впервые коммерческим производством УСВИ в сотрудничестве с Политехническим университетом Виргинии занялась компания Macrodyne в 1991 году [7]. В настоящее время целый ряд производителей предлагает УСВИ в качестве серийно выпускаемых изделий, а развертыванием УСВИ в энергосистемах серьезно занимаются во многих странах по всему миру. В 1991 году [8, 9]

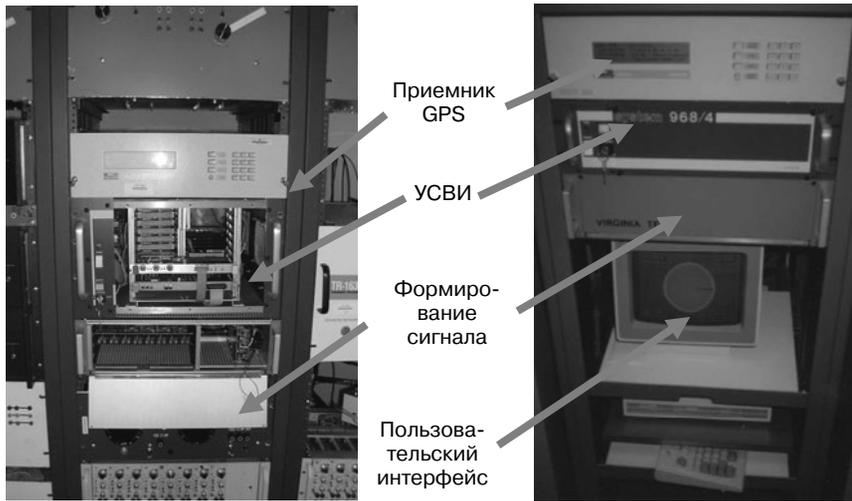


Рис. 1.1. Первые устройства синхронизированных векторных измерений, созданные в научно-исследовательской лаборатории энергосистем в Политехническом университете Виргинии. Тогда вместе с УСВИ устанавливался приемник GPS, но тактовый генератор приемника GPS не входил в состав УСВИ; из-за малого количества спутников GPS, развернутых в это время, устройство синхронизации пришлось оснастить прецизионным внутренним генератором, который обеспечивал необходимую точность во времени при отсутствии видимых спутников

был опубликован стандарт IEEE, устанавливающий формат файлов данных, формируемых и передаваемых посредством УСВИ. В 2005 году вышла пересмотренная редакция этого стандарта.

Параллельно с разработкой УСВИ как средств измерений продолжались исследования возможностей применения измерений, осуществляемых с помощью УСВИ. Эти области применения будут более подробно рассмотрены в последующих главах книги. На сегодняшний день можно сказать, что технология синхронизированных векторных измерений достигла зрелости, большинство современных энергосистем по всему миру находятся в процессе развертывания мониторинга переходных режимов векторных измерений.

1.2. Представление синусоид в виде комплексной амплитуды

Рассмотрим чисто синусоидальную величину, имеющую вид

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1)$$

где ω — частота сигнала в радианах в секунду, ϕ — фазовый угол в радианах, X_m — амплитуда сигнала. Среднеквадратичное значение входного сигнала равно

$(X_m/\sqrt{2})$. Напомним, что среднеквадратичные значения особенно полезны при расчете активной и реактивной мощностей в цепи переменного тока.

Уравнение (1.1) также можно записать в виде

$$x(t) = \operatorname{Re}\{X_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = \operatorname{Re}\left[\{e^{j(\omega t)}\} X_m e^{j\phi}\right].$$

В вышеприведенном выражении принято опускать член $e^{j(\omega t)}$, поскольку понятно, что частота — это ω . Синусоида, описываемая уравнением (1.1), представляет собой комплексное число \mathbf{X} , известное как комплексный вектор:

$$x(t) \leftrightarrow \mathbf{X} = (X_m/\sqrt{2})e^{j\phi} = (X_m/\sqrt{2})[\cos\phi + j\sin\phi]. \quad (1.2)$$

Синусоида и ее представление в виде комплексного вектора изображены на рис. 1.2.

Ранее было сказано, что представление в виде комплексного вектора возможно только для чистой синусоиды. На практике форма сигнала часто искажается другими сигналами с различными частотами. Поэтому необходимо выделить одночастотную составляющую сигнала (обычно для анализа представляет интерес основная частота), а затем представить ее в виде комплексного вектора. Выделение одночастотной составляющей сигнала часто выполняется с помощью преобразования Фурье. В дискретных системах с отсчетами данных оно принимает вид дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или быстрого преобразования Фурье (БПФ). Эти преобразования разбираются в следующем разделе. Определение комплексного вектора также предполагает, что сигнал не меняется на протяжении всего времени. Однако на практике можно принимать во внимание лишь часть промежутка времени, в течение которого рассматривается представление в виде комплексного вектора. Этот промежуток времени, также известный как

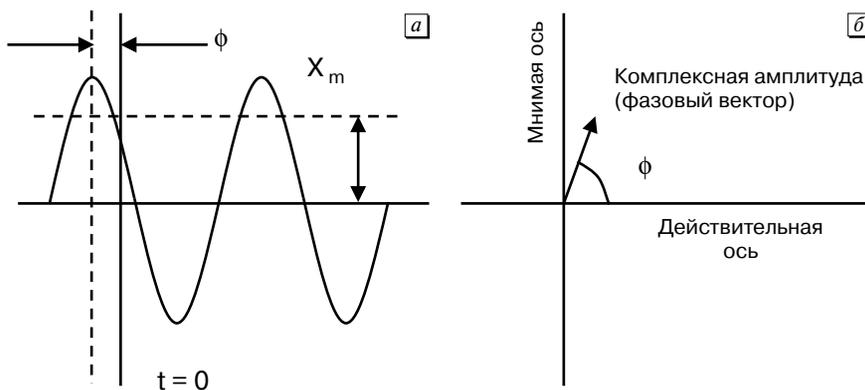


Рис. 1.2. Синусоида (а) и ее представление (б) в виде комплексного вектора. Фазовый угол комплексного вектора является произвольным, поскольку он зависит от выбора оси $t = 0$. Отметим, что длина вектора равна эффективному, среднеквадратичному значению синусоиды

«окно данных», очень важен при оценке комплексного вектора реальных сигналов. В последующих разделах он будет рассмотрен более подробно.

1.3. Ряды Фурье и преобразование Фурье

1.3.1. Ряды Фурье

Пусть $x(t)$ — периодическая функция времени t с периодом, равным T . Тогда $x(t + kT) = x(t)$ для всех целочисленных значений k . Периодическая функция может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \quad (1.3)$$

где постоянные a_k и b_k имеют вид

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$
(1.4)

Ряд Фурье также можно записать в экспоненциальной форме:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}}, \quad (1.5)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{\frac{j2\pi kt}{T}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
(1.6)

Отметим, что суммирование в уравнении (1.5) выполняется от $-\infty$ до $+\infty$, а в уравнении (1.3) — от 1 до $+\infty$. Изменение пределов суммирования объясняется тем, что косинус и синус представляют четную и нечетную функцию k соответственно. В результате расширение пределов суммирования до (от $-\infty$ до $+\infty$) и устранение коэффициента 2 перед интегралами в выражениях для a_k и b_k дают требуемую экспоненциальную форму ряда Фурье.

Пример 1.1. Рассмотрим периодический прямоугольный сигнал с периодом T , изображенный на рис. 1.3. Это четная функция времени. Коэффициенты Фурье (в экспоненциальной форме) имеют вид

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} e^{\frac{j2\pi kt}{T}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$= \frac{1}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

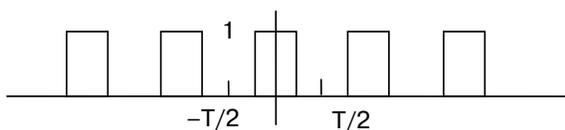


Рис. 1.3. Прямоугольный сигнал с периодом T , коэффициентом заполнения 0,5 и осью $t = 0$, выбранной таким образом, что функция является четной

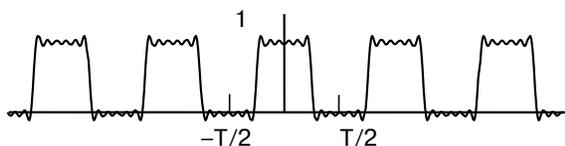


Рис. 1.4. Прямоугольный сигнал, аппроксимированный семью членами ряда Фурье. Чем больше членов будет использоваться, тем более прямоугольной будет форма сигнала. Колебания, известные как явление Гиббса, неизбежны при аппроксимации ступенчатых функций рядами Фурье

Следовательно,

$$\alpha_0 = 1/2,$$

$$\alpha_1 = 1/\pi, \alpha_{-1} = 1/\pi,$$

$$\alpha_3 = -1/3\pi, \alpha_{-3} = -1/3\pi,$$

$$\alpha_5 = 1/5\pi, \alpha_{-5} = 1/5\pi \text{ и т. д., а все четные коэффициенты равны нулю.}$$

Таким образом, ряд Фурье прямоугольного сигнала имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(\frac{10\pi t}{T}\right) - \dots \right].$$

Сумма первых семи членов ряда представлена на рис. 1.4.

1.3.2. Преобразование Фурье

Есть несколько прекрасных учебников, посвященных преобразованиям Фурье [10, 11]. Для более полного понимания теории преобразований Фурье читателю следует обратиться к этим книгам. Здесь рассмотрены только вопросы, представляющие непосредственный интерес при оценке комплексного вектора в энергосистемах.

Преобразование Фурье непрерывной функции времени $x(t)$, удовлетворяющей определенным условиям интегрируемости [10], имеет вид

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (1.7)$$

Обратное преобразование Фурье восстанавливает функцию времени из преобразования Фурье:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (1.8)$$

Важной функцией, часто применяемой в вычислениях с использованием дискретных данных, является импульсная функция $\delta(t)$, определяемая как

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt. \quad (1.9)$$

Импульсная функция (также известная как функция распределения или дельта-функция Дирака) представляет собой функцию дискретизации в том смысле, что результатом интегрирования в уравнении (1.9) будет отсчет функции $x(t)$ при $t = t_0$. Интегралы такого типа, как в (1.9), называют интегралами свертки. Таким образом, процесс дискретизации с одинаковыми интервалами ΔT можно рассматривать как свертку входного сигнала и последовательности импульсных функций $\delta(t - k\Delta T)$, где k изменяется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Свертки двух функций времени и их преобразования Фурье имеют удобные соотношения. Рассмотрим свертку $z(t)$ двух функций времени $x(t)$ и $y(t)$:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(\tau - t) d\tau \equiv x(t) * y(t). \quad (1.10)$$

Важным результатом в отношении сверток является следующее свойство.

Свойство 1. Преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье подвергающихся свертке функций, т. е.:

$$\text{Если } s(t) = x(t) * y(t), \text{ то } S(f) = X(f) \cdot Y(f).$$

Аналогично обратное преобразование Фурье свертки двух преобразований Фурье равно произведению соответствующих обратных преобразований Фурье:

$$\text{Если } S(f) = X(f) * Y(f) \text{ то } s(t) = x(t) * y(t), \text{ то } z(t) = x(t) \cdot y(t).$$

Далее иллюстрируется второе из двух приведенных утверждений. Рассмотрим функции $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ и $y(t) = \sin(\omega_0 t)$ при $\omega_0 = 2\pi f_0$. Преобразования Фурье функций $x(t)$ и $y(t)$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi(f-f_0)t} + e^{-j2\pi(f+f_0)t}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \end{aligned}$$

и аналогично

$$Y(f) = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)].$$

Преобразования Фурье чисто косинусоидального сигнала единичной амплитуды представляют собой пару действительных импульсных функций на частотах $\pm f_0$, а преобразования Фурье чисто синусоидального сигнала единичной амплитуды — пару мнимых импульсных функций с противоположными знаками на частотах $\pm f_0$.

Свертка двух определенных выше преобразований Фурье в частотной области имеет вид

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} [\delta(\phi - f_0) + \delta(\phi + f_0)] \frac{j}{2} [\delta(f + f_0 - \phi) - \delta(f - f_0 - \phi)] d\phi \\ &= \frac{j}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\phi - f_0) \delta(f + f_0 - \phi) + \delta(\phi + f_0) \delta(f - f_0 - \phi) d\phi \\ &\quad - \delta(\phi - f_0) \delta(f - f_0 - \phi) - \delta(\phi + f_0) \delta(f + f_0 - \phi)] d\phi. \end{aligned}$$

Использование избирательных свойств, присущих интегралам, содержащим импульсные функции, дает:

$$S(f) = \frac{j}{4} [\delta(f - 2f_0) - \delta(f + 2f_0)].$$

Очевидно, что обратное преобразование Фурье $S(f)$ имеет вид

$$S(t) = \frac{1}{2} \sin(4\pi ft) = \sin(2\pi ft) \cos(2\pi ft) = x(t) \cdot y(t).$$

Это свойство сверток будет использоваться при разборе процесса дискретизации и ДПФ. Некоторые другие свойства преобразования Фурье, которые особенно полезны для дальнейшего понимания, изложены далее и сопровождаются примерами.

Свойство 2. Преобразование Фурье четной функции дает четную функцию частоты. Если четная функция действительная, то результат преобразования Фурье также будет действительной и четной функцией.

Рассмотрим такую четную функцию времени $x(t)$, что $x(-t) = x(t)$. Пусть $x(t)$ будет комплексной: $x(t) = r(t) + js(t)$. Преобразование Фурье $X(f)$ данной функции имеет вид

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-j2\pi ft} dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &\quad + j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю, так как подынтегральные выражения являются нечетными функциями времени. Таким образом,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt.$$

Поскольку $\cos(2\pi ft) = \cos(-2\pi ft)$, то, соответственно: $X(f) = X(-f)$.

Кроме того, если $x(t)$ — действительная функция, равная $r(t)$, то преобразование Фурье функции $x(t)$ представляет собой функцию $R(f)$, которая тоже является действительной и четной.

Свойство 3. Преобразование Фурье нечетной функции дает нечетную функцию частоты. Если нечетная функция мнимая, то результат преобразования Фурье также будет мнимой и нечетной функцией.

Рассмотрим такую нечетную функцию времени $x(t)$, что $x(-t) = -x(t)$. Пусть $x(t)$ будет комплексной: $x(t) = r(t) + js(t)$. Преобразование Фурье $X(f)$ данной функции имеет вид

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-j2\pi ft} dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \sin(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Первый и третий интегралы равны нулю, так как подынтегральные выражения являются нечетными функциями времени. Таким образом,

$$X(f) = j \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \sin(2\pi ft) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt.$$

Поскольку $\sin(2\pi ft) = -\sin(-2\pi ft)$, то, соответственно: $X(f) = -X(-f)$.

Кроме того, если $x(t)$ — действительная функция, равная $r(t)$, то преобразование Фурье функции $x(t)$ представляет собой функцию $jR(f)$, которая является мнимой и нечетной.

Свойство 4. Преобразование Фурье действительной функции имеет четную действительную часть и нечетную мнимую часть.

Рассмотрим действительную функцию времени $x(t) = r(t) + j0$. Преобразование Фурье имеет вид

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \sin(2\pi ft) dt = R_1(f) + jR_2(f).$$

Поскольку функции косинуса и синуса представляют четную и нечетную функции частоты соответственно, очевидно, что $R_1(f)$ — четная функция частоты, а $R_2(f)$ — нечетная.

Свойство 5. Преобразование Фурье периодической функции представляет собой последовательность импульсных функций частоты.

Если $x(t)$ — периодическая функция времени t с периодом, равным T , ее можно представить в виде экспоненциального ряда Фурье, описываемого уравнениями (1.5) и (1.6):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}},$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Преобразование Фурье функции $x(t)$, выраженное в экспоненциальной форме, имеет вид

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \right] e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{-j2\pi t \left\{ \frac{k}{T} - f \right\}} dt, \end{aligned}$$

где используется обратный порядок суммирования и интегрирования (предполагается, что это допустимо). Для основной частоты периодического сигнала $f_0 = 1/T$ интеграл экспоненциального члена в последней форме представляет импульсную функцию $\delta(kf_0 - f)$, и, таким образом, преобразование Фурье периодической функции $x(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \quad \text{при} \\ \alpha_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Это последовательность импульсов с частотами, кратными основной частоте периодического сигнала f_0 , и амплитудами, равными амплитудам каждой частотной составляющей во входном сигнале.

Свойство 6. Преобразование Фурье последовательности импульсов дает последовательность импульсных функций в частотной области.

Рассмотрим функцию

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Это периодическая функция с периодом T , следовательно, ее преобразование Фурье (с учетом вышеуказанного свойства 5) имеет вид

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-\frac{j2\pi kt}{T}} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку дельта-функция в подынтегральном выражении дает значение экспоненты при $t = 0$, α_k равно $1/T$ для всех k , и преобразование Фурье функции $x(t)$ приобретает вид

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right),$$

т.е. представляет собой последовательность импульсов в частотной области с периодами kf_0 и амплитудой $1/T$.

Пример 1.2. Рассмотрим прямоугольный входной сигнал, изображенный на рис. 1.5. Это четная функция времени.

Преобразование Фурье данной функции имеет вид

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{-j2\pi ft} dt = e^{j2\pi f\left(t_1 + \frac{T_0}{2}\right)} T_0 \frac{\sin\left(2\pi f \frac{T_0}{2}\right)}{\left(2\pi f \frac{T_0}{2}\right)}.$$

Первый член преобразования Фурье — это коэффициент сдвига фаз, опущенный на графике (рис. 1.5б) для удобства. Если прямоугольный сигнал имеет центр в начале координат, то $t_1 = -T_0/2$, и коэффициент сдвига фаз обращается в нуль. Это также соответствует вышеуказанному свойству 2 преобразования Фурье, согласно которому преобразование Фурье четной действительной функции должно быть четной действительной функцией частоты.

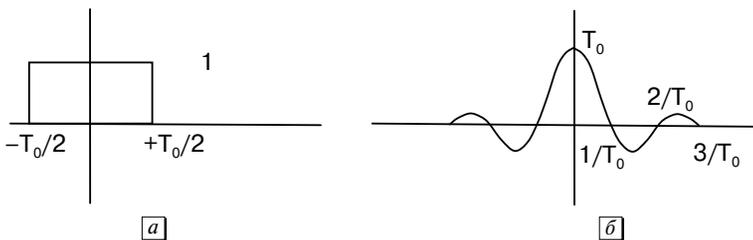


Рис. 1.5. а) Прямоугольная функция времени с осью $t = 0$, выбранной таким образом, что функция является четной. Длительность сигнала равна $2T_0$. б) Преобразование Фурье функции

1.4. Дискретные данные и наложение спектров

Дискретные отсчеты входных сигналов являются начальной точкой цифровой обработки сигналов. Вычисление комплексных амплитуд напряжений и токов начинается с взятия равномерных отсчетов сигнала в моменты времени $k\Delta T$ $\{k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$. Пусть при дискретизации входного сигнала $x(t)$ получена последовательность дискретных отсчетов $x(k\Delta T)$. Эти данные можно представить в виде функции времени $x'(t)$, состоящей из равномерно следующих импульсов, каждый из которых имеет амплитуду $x(k\Delta T)$:

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta T)\delta(t - k\Delta T). \quad (1.11)$$

Представляет интерес определение преобразования Фурье дискретной функции, представленной уравнением (1.11). Отметим, что эта функция представляет произведение функции $x(t)$ и функции отсчетов $\delta(t - k\Delta T)$, при этом произведение интерпретируется в смысле уравнения (1.9). Следовательно, преобразование Фурье $X'(f)$ функции $x'(t)$ является сверткой преобразований Фурье функции $x(t)$ и одиночных импульсов. С учетом свойства 6, приведенного в разделе 1.3, преобразование Фурье последовательности импульсов имеет вид

$$\Delta(f) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{\Delta T}\right). \quad (1.12)$$

Следовательно, преобразование Фурье функции отсчетов представляет свертку $\Delta(f)$ и $X(f)$:

$$\begin{aligned} X'(f) &= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\phi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{\Delta T} - \phi\right) d\phi \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\phi) \delta\left(f - \frac{k}{\Delta T} - \phi\right) d\phi \\ &= \frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{\Delta T}\right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Еще раз отметим, что используется обратный порядок суммирования и интегрирования (предполагается, что это допустимо) и что интеграл вычисляется с помощью избирательного свойства функции Дирака.

Соотношение между преобразованиями Фурье функций $x(t)$ и $x'(t)$ показано на рис. 1.6. Преобразование Фурье функции $x(t)$ изображено с ограниченной шириной спектра; это означает, что оно не имеет составляющих, находящихся за пределами частоты среза f_c . Для дискретных данных используется преобразование Фурье, состоящее из бесконечной последовательности преобразований Фурье функции $x(t)$, сосредоточенных на частотных интервалах $(k/\Delta T)$ для

всех k . Напомним, что интервал дискретизации равен ΔT , так что частота дискретизации $f_s = (1/\Delta T)$.

Если частота отсечки f_c больше половины частоты дискретизации f_s , то преобразование Фурье отсчетов данных будет иметь вид, показанный на рис. 1.7. В этом случае спектр отсчетов на выходе отличается от спектра входного сигнала и спектры соседних отсчетов накладываются друг на друга, что показано на рис. 1.7 штриховкой. Это означает, что из-за явления, известного как *наложение спектров*, частотные составляющие, которые оцениваются в этой области по данным отсчетам, будут ошибочными.

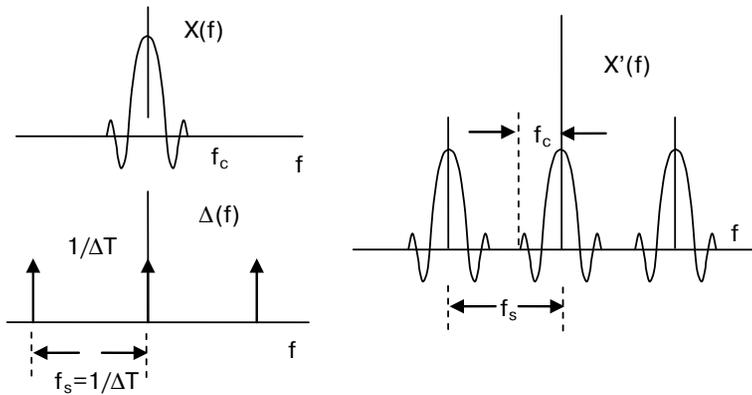


Рис. 1.6. Преобразование Фурье функции отсчетов в виде свертки преобразований $X(f)$ и $\Delta(f)$. Частота дискретизации равна f_s , а спектр $X(f)$ ограничен значениями $\pm f_c$

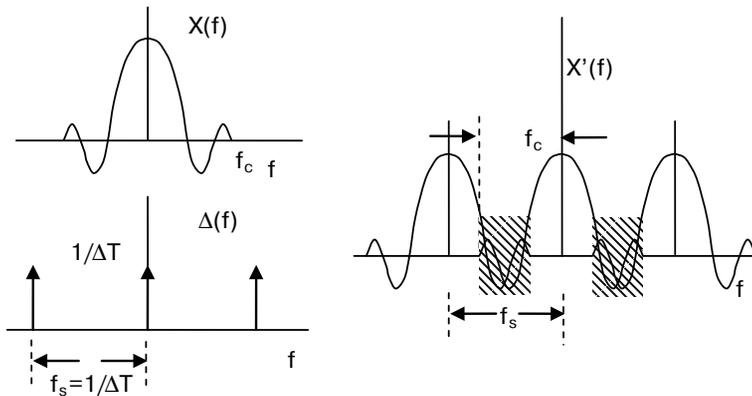


Рис. 1.7. Преобразование Фурье функции отсчетов в случае, когда спектр входного сигнала ограничен частотой, превышающей половину частоты дискретизации. Оценка частотных составляющих по дискретным отсчетам данных в заштрихованной области будет ошибочной из-за наложения спектров

Из вышеприведенного обсуждения ясно, что во избежание ошибок из-за наложения спектров ширина спектра входного сигнала должна быть меньше половины частоты дискретизации, используемой при взятии отсчетов данных. Это требование известно как *критерий Найквиста*¹.

Во избежание ошибок из-за наложения спектров во всех системах с взятием отсчетов данных для оценки комплексного вектора принято применять сглаживающие фильтры, которые ограничивают входные сигналы по частоте значением, меньшим половины выбранной частоты дискретизации. Отметим, что частота отсечки входного сигнала должна быть *меньше* половины частоты дискретизации. На практике спектр сигнала, как правило, ограничен значением, которое значительно меньше требуемого для выполнения критерия Найквиста. Сглаживающие фильтры обычно представляют собой пассивные низкочастотные RC-фильтры [12], хотя для получения прямоугольной характеристики могут использоваться и активные фильтры. В дополнение к пассивным сглаживающим фильтрам в особых случаях (например, при избыточной дискретизации и прореживании) также могут использоваться цифровые фильтры. Все сглаживающие фильтры вносят во входной сигнал частотно-зависимый сдвиг фаз, который необходимо компенсировать, чтобы представить входной сигнал в виде комплексной амплитуды. Этот вопрос будет рассматриваться далее в главе 5, где представлены стандартные синхронизированные векторные измерения.

1.5. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — это способ вычисления преобразования Фурье с использованием небольшого количества отсчетов входного сигнала $x(t)$. Преобразование Фурье вычисляется дискретными шагами в частотной области так же, как входной сигнал дискретизируется во временной области. Рассмотрим процесс выбора N отсчетов $x(k\Delta T)$ при $\{k = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ и интервале дискретизации ΔT . Это эквивалентно умножению последовательности дискретных отсчетов на *оконую функцию* $w(t)$, которая представляет собой прямоугольную функцию времени с единичной амплитудой и шириной окна $N\Delta T$. Очевидно, что при выборе отсчетов от 0 до $N - 1$ оконная функция может рассматриваться в диапазоне от $-\Delta T/2$ до $(N - 1/2)\Delta T$. Функция $x(t)$, функция дискретизации $\delta(t)$ и оконная функция $w(t)$ вместе с их преобразованиями Фурье представлены на рис. 1.8.

Рассмотрим множество отсчетов сигнала, попадающих в окно данных: $x(k\Delta T)$ при $\{k = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$. Эти отсчеты можно рассматривать как результат умножения сигнала $x(t)$, функции дискретизации $\delta(t)$ и оконной функции $w(t)$:

¹ В отечественной литературе известна как теорема В. А. Котельникова. — Прим. ред.

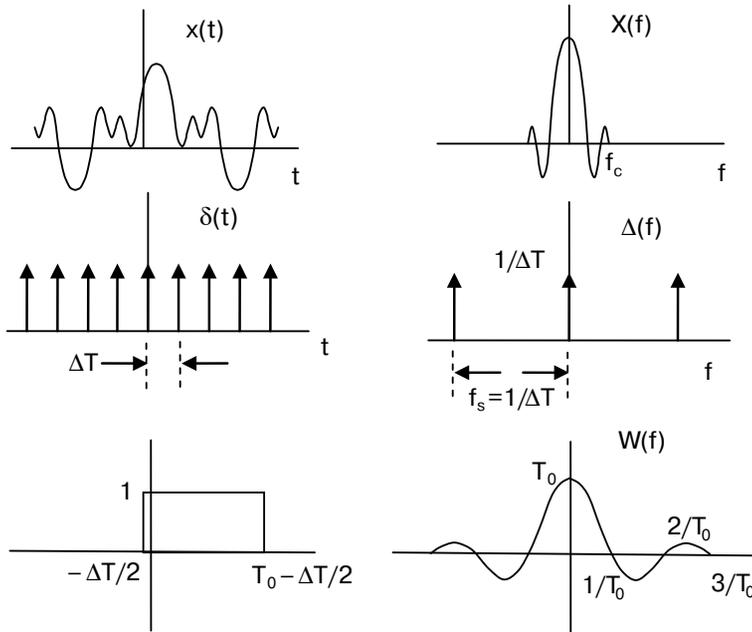


Рис. 1.8. Функции времени $x(t)$, $\delta(t)$ и $w(t)$ и их преобразования Фурье. Еще раз отметим, что сдвиг фаз $\Omega(f)$ опущен

$$y(t) = x(t)\delta(t)w(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T)\delta(t - k\Delta T), \quad (1.14)$$

где умножение на дельта-функцию вновь следует понимать в смысле интеграла в уравнении (1.9). Тогда преобразование Фурье функции $y(t)$ представляет собой свертку преобразований Фурье трех вышеназванных функций.

Для получения ДПФ функции $y(t)$ ее преобразование Фурье необходимо дискретизировать в частотной области. Дискретный интервал в частотной области кратен $1/T_0$, где T_0 — ширина оконной функции. Функция дискретизации по частоте $\Phi(f)$ определяется выражением

$$\Phi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right), \quad (1.15)$$

а ее обратное преобразование Фурье (с учетом свойства 6 преобразования Фурье) имеет вид

$$\phi(t) = T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0). \quad (1.16)$$

Для получения отсчетов в частотной области необходимо умножить преобразование Фурье $Y(f)$ на $\Phi(f)$. Для получения соответствующей функции во временной области $x'(t)$ нам потребуется свертка функций $y(t)$ и $\phi(t)$ во временной области:

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= y(t) \cdot \phi(t) \\
 x'(t) &= y(t) \cdot \phi(t) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) \delta(t - k\Delta T) \right] \cdot \left[T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \right] \\
 &= T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) \delta(t - k\Delta T - nT_0) \right].
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Это периодическая функция с периодом T_0 . Функции $x(t)$, $y(t)$ и $x'(t)$ представлены на рис. 1.9. Оконная функция ограничивает данные отсчетами от 0 до $N - 1$, а дискретизация в частотной области преобразует исходные N отсчетов во временной области в бесконечную последовательность из N отсчетов с периодом T_0 , как показано на рис. 1.9в. Отметим, что исходная функция $x(t)$ не периодическая, в отличие от функции $x'(t)$, и можно считать функцию $x'(t)$ приближенным представлением $x(t)$.

Преобразование Фурье периодической функции $x'(t)$ с учетом свойства 5 преобразования Фурье представляет собой последовательность импульсных функций в частотной области. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 X'(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right), \text{ при} \\
 \alpha_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0-T_0/2} x'(t) e^{-\frac{j2\pi n t}{T_0}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Подставив значение $x'(t)$ в вышеприведенное выражение для α_n , получаем:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0-T_0/2} \left\{ T_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) \delta(t - k\Delta T - mT_0) \right] \right\} e^{-\frac{j2\pi n t}{T_0}} dt, \\
 n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

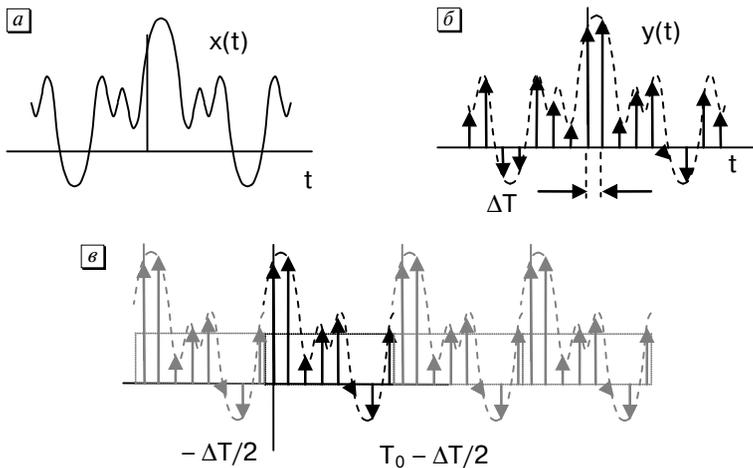


Рис. 1.9. а) Функция входного сигнала $x(t)$; б) ее отсчеты; в) преобразование Фурье оконной функции $x'(t)$

Индекс m обозначает последовательность периодов, показанных на рис. 1.9в. Поскольку пределы интегрирования включают только один период, можно избавиться от суммирования по m и принять $m = 0$, используя только отсчеты за период, выделенный жирным на рис. 1.9в. Тогда уравнение (1.15) приобретает вид

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \int_{-T_0/2}^{T_0-T_0/2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) \delta(t - k\Delta T) \right] e^{-\frac{j2\pi nt}{T_0}} dt, \\ \alpha_n &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{-T_0/2}^{T_0-T_0/2} x(k\Delta T) \delta(t - k\Delta T) e^{-\frac{j2\pi nt}{T_0}} dt, \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) e^{-\frac{j2\pi nk\Delta T}{T_0}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}\quad (1.20)$$

Поскольку в окне данных T_0 есть N отсчетов, $N\Delta T = T_0$. Таким образом,

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad \text{при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.21)$$

Хотя индекс n принимает все положительные и отрицательные целочисленные значения, необходимо отметить, что есть только N отдельных коэффициентов α_n . Следовательно, α_{N+1} совпадает с α_1 , а преобразование Фурье $X'(f)$ имеет только N отдельных значений, соответствующих частотам $f = n/T_0$ при изменении n в диапазоне от 0 до $N - 1$:

$$X'\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) представляет собой определение ДПФ N отсчетов входного сигнала, взятых с интервалом ΔT . ДПФ симметрично относительно $N/2$, а все составляющие, кроме $N/2$, просто находятся в области отрицательных частот. Таким образом, с помощью ДПФ не вычисляются частотные составляющие, находящиеся за пределами $N/(2T_0)$, это формирует границу Найквиста, что позволяет избежать ошибок из-за наложения спектров.

Также отметим, что любая действительная функция времени может быть записана в виде суммы действительной и нечетной функций. Следовательно, с учетом вышеуказанных свойств 2 и 3 любая действительная функция времени будет иметь действительные части ДПФ, которые будут четными функциями частоты, и мнимые части ДПФ, которые будут нечетными функциями частоты.

1.5.1. ДПФ и ряды Фурье

Коэффициенты ряда Фурье периодического сигнала можно получить с помощью ДПФ функции отсчетов, разделив ДПФ на N — количество отсчетов

в окне данных. Таким образом, ряд Фурье для функции $x(t)$ можно представить формулой

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(k\Delta T) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \right] e^{\frac{j2\pi kt}{T}}. \quad (1.23)$$

Поскольку в ДПФ есть только N составляющих, суммирование по k в уравнении (1.23) выполняется с учетом $\{k = 0, \dots, N-1\}$.

Пример 1.3. Рассмотрим периодическую функцию $x(t) = 1 + \cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi f_0 t$. Эта функция уже представлена рядом Фурье при $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$. Отсчеты берутся 16 раз за один период основной частоты. Дискретные отсчеты, ДПФ, а также ДПФ, разделенное на 16 (N — количество отсчетов), представлены в табл. 1.1.

Последний столбец содержит коэффициенты ряда Фурье. Отметим, что в нулевой позиции появляется составляющая постоянного тока a_0 , а в 1-й (2-й строчке) и 15-й позициях появляется составляющая основной частоты. Член, содержащий косинус, будучи четной функцией, дает действительные части, которые являются четными функциями частоты ($0,5$ на частотах $\pm f_0$), а член, содержащий синус, будучи нечетной функцией времени, дает нечетные функции частоты ($\pm j0,5$ на частотах $\pm f_0$). Коэффициент a_1 получен сложением действительных частей, соответствующих f_0 и $-f_0$ в столбце ДПФ/16, а коэффициент

Таблица 1.1. Дискретные отсчеты и преобразование Фурье для периодической функции $x(t) = 1 + \cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi f_0 t$

Номер отсчета	$x(t)$	Частота	ДПФ	$X = \text{ДПФ}/16$
0	2,0000	0	16,0000	1,000
1	2,3066	f_0	$8,0000 + j8,0000$	$0,5000 + j0,5000$
2	2,4142	$2f_0$	$0,0000 - j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
3	2,3066	$3f_0$	$0,0000 - j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
4	2,0000	$4f_0$	$0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
5	1,5412	$5f_0$	$-0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
6	1,0000	$6f_0$	$0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
7	0,4588	$7f_0$	$0,0000 - j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
8	0,0000	—	$-0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
9	$-0,3066$	$-7f_0$	$0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
10	$-0,4142$	$-6f_0$	$0,0000 - j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
11	$-0,3066$	$-5f_0$	$-0,0000 - j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
12	$-0,0000$	$-4f_0$	$0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
13	0,4588	$-3f_0$	$0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
14	1,0000	$-2f_0$	$0,0000 + j0,0000$	$0,0000 + j0,0000$
15	1,5412	$-f_0$	$8,0000 - j8,0000$	$0,5000 - j0,5000$

b_1 — вычитанием мнимой части члена на частоте $-f_0$ из мнимой части члена на частоте f_0 :

$$a_0 = 2X_0 = 2,$$

$$a_1 = \text{действительная часть } (X_1 + X_{N-1}) = 1,$$

$$b_1 = \text{мнимая часть } (X_1 - X_{N-1}) = 1.$$

Из приведенного выше примера ясно, что коэффициенты ряда Фурье периодической функции $x(t)$ можно получить ДПФ отсчетов по следующим формулам:

$$a_0 = 2 \cdot X_0,$$

$$a_k = 2 \cdot \text{действительная часть } (X_k),$$

$$b_k = 2 \cdot \text{мнимая часть } (X_k) \text{ для } k = 1, 2, \dots, N/2 - 1.$$

1.5.2. ДПФ и представление в виде комплексного вектора

Синусоида $x(t)$ с частотой kf_0 и рядом Фурье

$$\begin{aligned} x(t) &= a_k \cos(2\pi kf_0 t) + b_k \sin(2\pi kf_0 t) \\ &= \left\{ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right\} \cos(2\pi kf_0 t + \phi), \quad \text{где } \phi = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

представляется в виде комплексного вектора (см. раздел 1.2)

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right\} e^{j\phi}, \quad (1.25)$$

где квадратный корень из двух в знаменателе нужен для получения среднеквадратичного значения синусоиды. Вектор в комплексной форме приобретает вид

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_k - jb_k). \quad (1.26)$$

Используя соотношение коэффициентов ряда Фурье с ДПФ, представим k -ю гармоническую составляющую в виде комплексного вектора

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta T) \left\{ \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Введя обозначения $x(n\Delta T) = x_n$ и $2\pi/N = \theta$ (θ — угол отсчета, взятого в качестве периода основной составляющей частоты), получаем:

$$X_k = \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \{ \cos(kn\theta) - j \sin(kn\theta) \}. \quad (1.28)$$