Содержание

Предисловие

Настоящая книга является развитием и продолжением ранее изданных монографий [1, 2]. Книга состоит из двух частей. В первой части выводятся и исследуются объемные сингулярные интегральные уравнения, описывающие различные классы задач электродинамики. Во второй части книги описываются методы и алгоритмы решения рассматриваемых задач.

Первая часть написана более ясным и понятным языком по сравнению с упомянутыми книгами. Этому, в частности, способствует то, что при доказательстве теорем рассматриваются интегральные уравнения, описывающие задачи рассеяния на диэлектрических структурах. Тогда становятся более прозрачными основные идеи доказательств. В конце глав приводятся формулировки теорем, относящиеся к общим магнитодиэлектрическим структурам. В первую часть книги добавлены новые результаты по разрешимости задач рассеяния, по исследованию спектра интегральных операторов, а также рассмотрены нестационарные задачи в материальных средах.

Во второй части книги также много новых результатов. Это касается итерационных методов решения линейных уравнений, обоснования применимости метода коллокации для решения рассматриваемых интегральных уравнений, методов решения нестационарных задач, эффективных алгоритмов решения.

После каждой части книги даются приложения, в которых излагаются вспомогательные результаты, используемые в основных частях.

Книга носит оригинальный характер, потому что написана в основном по результатам, которые получены автором.

В заключение выражаю благодарность профессорам А. С. Ильинскому, А. Г. Свешникову, Ю. Г. Смирнову и Ю. В. Шестопалову за многочисленные дискуссии и обсуждения результатов работы. Особая благодарность моей жене, доктору технических наук Самохиной Анне Сергеевне, за любовь, всестороннюю помощь и поддержку.

Введение

Анализ и математическое исследование задач рассеяния электромагнитных волн в трехмерных неоднородных ограниченных средах чрезвычайно важны как с теоретической, так и с практической точек зрения и являются одной из ключевых проблем электродинамики. В классической постановке задачи рассеяния формулируются следующим образом: необходимо найти решение соответствующих уравнений Максвелла, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности и граничным условиям непрерывности тангенциальных компонент поля на поверхностях разрыва параметров среды. При этом корректность классической постановки, а также существование и единственность решения являются важнейшими вопросами при изучении задач рассеяния.

Первой изученной задачей было рассеяние электромагнитных волн на однородном диэлектрическом шаре. Однако это одна из немногих задач рассеяния, которая была решена аналитически. Теорема Пойнтинга, которая доказывается на основе анализа уравнений Максвелла и условий излучения, гарантирует единственность решения для задач рассеяния в средах с затуханием. Следует отметить, что строгое доказательство единственности решения в средах без потерь долгое время было неизвестно, хотя предполагалось, что единственность в этих случаях также имеет место. Впрочем, на самом деле, это не совсем так, и в четвертой и пятой главах книги будут в том числе рассмотрены задачи в средах без потерь. В прикладной электродинамике считалось, что если выполняются условия теоремы единственности, то решение соответствующей задачи рассеяния существует. Но это имеет место только в том случае, если оператор задачи фредгольмов в функциональном пространстве, где рассматривается решение. Попытки доказать фредгольмовость операторов задач, используя классическую дифференциальную постановку, не всегда были успешными.

К интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода сводятся следующие классы задач: рассеяние на однородном изотропном диэлектрическом теле с гладкой границей (можно рассматривать также несколько гладких непересекающихся поверхностей раздела сред внутри тела) [5, 12]; рассеяние в ограниченной изотропной среде, диэлектрическая проницаемость которой является всюду дифференцируемой функцией координат и нигде не обращается в ноль [12, 48]. С использованием теории интегральных уравнений Фредгольма были доказаны теоремы существования и единственности соответствующих задач. Между тем в общей постановке, тем более при наличии анизотропии среды, трехмерные задачи рассеяния электромагнитных волн не могут быть сведены к классическим интегральным уравнениям Фредгольма.

Объемные сингулярные интегральные уравнения относительно неизвестного электромагнитного поля по области неоднородности Q появились в электродинамике в 70-е годы прошлого века [49]. Эти уравнения описывают задачи электромагнитного рассеяния на трехмерных неоднородных и анизотропных магнитодиэлектрических структурах в самой общей постановке. Кроме того, уравнения могут использоваться при исследовании задач рассеяния, для которых классическая постановка либо невозможна, либо затруднена, например во фрактальных средах или диэлектрических телах с негладкой границей. Тем не менее эти уравнения относятся к многомерным сингулярным интегральным уравнениям, теория которых была построена значительно позже и в меньших деталях по сравнению с теорией интегральных уравнений Фредгольма.

Используя результаты С. Г. Михлина и его учеников по теории сингулярных уравнений [15, 16, 50], впервые были исследованы объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики [1, 2, 20, 22, 32, 39]: получены условия фредгольмовости уравнений, доказаны теоремы существования и единственности решения, исследованы классическая и обобщенная постановки задач. Математически строго получены условия существования резонансных анизотропных диэлектрических структур [41]. Исследован спектр интегральных операторов задач рассеяния [3, 47, 56]. Получены объемные сингулярные интегральные уравнения с запаздыванием по времени, которые описывают задачи взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с ограниченной материальной средой [27]. В первой части монографии детально описываются полученные результаты.

Отметим, что в работах Ю. Г. Смирнова и его учеников [42, 43, 57, 58] на основе интегро-дифференциальных уравнений были рассмотрены задачи рассеяния на трехмерных изотропных диэлектрических структурах и идеально проводящих поверхностях. Используя теорию псевдодифференциальных уравнений, были изучены корректные постановки задач, доказаны теоремы существования и единственности решения.

Для получения конкретных решений трехмерных задач рассеяния на сложных структурах возможно использование только численных методов, поскольку аналитические методы применимы только для идеализированных структур (шар, эллипсоид и т. д.). Когда длина волны значительно меньше характерных размеров объекта рассеивания, вне конкуренции оказываются асимптотические методы. Однако в квазистатическом и резонансном диапазонах длин волн для нахождения численного решения необходимо использовать строгие постановки задач.

Дифференциальные уравнения Максвелла кажутся наиболее подходящими для численного решения подобных задач, поскольку после дискретизации получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженной матрицей по сравнению с полной матрицей, которую имеем в случае интегральных уравнений. Однако для задач рассеяния решение должно удовлетворять условию излучения на бесконечности. Это приводит к тому, что для получения достаточной точности решения необходимо численно находить неизвестное поле в области, которая значительно больше рассеивающей области Q. Поэтому, принимая во внимание трехмерность исходной задачи, при использовании дифференциальных уравнений Максвелла получаем СЛАУ огромной размерности. Тем не менее алгоритмы решения задач рассеяния на основе уравнений Максвелла постоянно совершенствуются и в настоящее время широко используются многими исследователями.

Помимо уравнений Максвелла, для численного решения задач рассеяния на однородных и слоисто-однородных изотропных диэлектрических структурах используются поверхностные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, упомянутые выше. Объемные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, описывающие рассеяние в изотропной среде, диэлектрическая проницаемость которой — дифференцируемая функция координат, для численного решения используются редко. Это связано с тем, что в ядре интегральных уравнений присутствует член вида grad ε/ε, что затрудняет построение алгоритма численного решения.

В объемных сингулярных интегральных уравнениях параметры среды входят в ядра уравнений в простой форме, что делает возможным их численное решение. По-видимому, первое численное решение этих уравнений было приведено в работе [49]. Рассматривалась задача рассеяния плоской волны на неоднородном диэлектрическом параллелепипеде. Методом коллокации задача была аппроксимирована СЛАУ небольшой размерности, которая была решена прямым методом Гаусса. В дальнейшем уравнения использовались для численного решения рядом исследователей, однако широкого применения они пока не получили.

Опишем основные проблемы, которые возникают при численном решении этих уравнений. В силу трехмерности уравнений для большинства реальных задач после дискретизации уравнений возникают СЛАУ очень большой размерности N, $N >> 1000$. Очевидно, что использование прямых методов практически невозможно, поскольку в памяти компьютера необходимо хранить $M \sim N^2$ чисел, а для решения СЛАУ нужно выполнить $T \sim N^3$ арифметических операций. Поэтому возможно использование только итерационных методов. В этом случае параметры M и T оцениваются формулами

$$M \sim M_A,\ T \sim LT_A. \tag{В.1}$$

В (В.1) M_A — количество элементов массива чисел, которые необходимы для алгоритма умножения матрицы СЛАУ на вектор; L — количество итераций для получения решения с заданной точностью; T_A — число арифметических операций для умножения матрицы СЛАУ на вектор. Для плотных матриц произвольного вида $M_A \sim N^2$, $T_A \sim N^2$. Однако для плотных матриц, обладающих определенными свойствами, эти величины могут быть значительно меньше.

Во второй части монографии рассматриваются методы и эффективные алгоритмы численного решения объемных сингулярных интегральных уравнений, описывающих различные классы задач электродинамики. Излагаются итерационные методы для решения линейных уравнений [1, 2, 17, 19, 37, 56], математически строго обосновывается применение метода Галеркина и метода коллокации для решения интегральных уравнений, описывающих задачи рассеяния на трехмерных неоднородных и анизотропных структурах [36]. Используя свойства ядер интегральных уравнений и алгоритмы быстрого дискретного преобразования Фурье, конструируются алгоритмы со значениями M_A и T_A, практически пропорциональными N [29, 31, 40]. Излагаются методы и алгоритмы решения объемных сингулярных интегральных уравнений с запаздыванием по времени, описывающих задачи взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с ограниченной материальной средой [38].

Теперь кратко опишем содержание разделов книги. В первой главе рассматриваются задачи рассеяния электромагнитных волн на трехмерных магнитодиэлектрических структурах в свободном пространстве. Вводя токи поляризации в области неоднородности среды и применяя известные формулы для поля от тока в свободном пространстве, получаем интегро-дифференциальные уравнения относительно неизвестного электромагнитного поля в Q. Затем, используя формулы дифференцирования интегралов со слабой особенностью, приходим к объемным сингулярным интегральным уравнениям (СИУ).

Во второй главе рассматриваются СИУ для других классов задач электродинамики. Сначала приводится формальная запись уравнений для задач рассеяния на магнитодиэлектрических структурах, которые расположены в другой электромагнитной структуре, например, вне идеально проводящей поверхности или внутри волновода. Здесь надо отметить, что влияние электромагнитной структуры учитывается интегральными операторами, которые не имеют сингулярной особенности. Ясно, что в общем случае найти явный вид этих операторов невозможно. Только для задач рассеяния на структурах, находящихся над идеально проводящей плоскостью, это возможно. С использованием принципа зеркального отображения для этих задач в явном виде получены соответствующие СИУ. Далее рассматриваются задачи рассеяния на диэлектрических структурах, вне которых находится ограниченная идеально проводящая поверхность (система поверхностей) S. Относительно неизвестного электрического поля в Q и поверхностного электрического тока на S записывается система сингулярного и гиперсингулярного интегральных уравнений.

В третьей главе рассматриваются задачи взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с ограниченной материальной средой, находящейся в области Q. С использованием СИУ в частотной области и свойств преобразований Фурье получены объемные сингулярные интегральные уравнения в Q с запаздыванием по времени.

В четвертой главе приводятся утверждения эквивалентности СИУ и уравнений Максвелла, когда решения и параметры среды являются Гельдер-непрерывными функциями координат. В разделе 4.1 на основе теоремы Пойнтинга доказывается, что решение задачи рассеяния единственно, если среда в области неоднородности имеет потери. Показывается, что классическая система уравнений Максвелла не является эллиптической. Далее показывается, что уравнения Максвелла могут быть сведены к эллиптической системе дифференциальных уравнений, если параметры диэлектрической среды являются трижды дифференцируемыми функциями координат и выполняется условие

$$\sum_{n,m=1}^{3} \varepsilon_{nm}(x)\,\alpha_n\alpha_m \neq 0,\ x \in Q,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \tag{B.2}$$

где ε_{nm} — декартовы компоненты тензора диэлектрической проницаемости. С использованием теории эллиптических дифференциальных уравнений показывается, что при выполнении указанных условий имеет место единственность решения задач рассеяния для сред без потерь. В разделе 4.2 рассматриваются задачи рассеяния для сред с разрывами параметров в области Q. Доказывается, что при выполнении условия (В.2) решение однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющих условиям непрерывности тангенциальных компонент поля на поверхностях разрыва параметров среды и условию излучения, может быть только тривиальным, в том числе при отсутствии потерь в среде. В разделе 4.3 формулируются аналогичные утверждения для магнитодиэлектрических сред.

В пятой главе с использованием СИУ доказываются теоремы существования и единственности решения различных классов задач рассеяния. Для исследования задач используется гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций $\vec{L}_2$. В разделе 5.1 для всюду Гельдер-непрерывных диэлектрических сред в явном виде находится матричный символ сингулярных интегральных операторов. Затем доказываются необходимые и достаточные условия нетеровости операторов в пространстве $\vec{L}_2(Q)$, которые имеют вид (В.2). Отметим, что условия эллиптичности дифференциальных уравнений и нетеровости интегральных уравнений совпадают. Далее доказывается, что при выполнении условий нетеровости интегральные операторы будут фредгольмовыми для любых реальных сред. Затем доказывается теорема существования и единственности решения сингулярных интегральных уравнений, в том числе для сред без потерь. В разделе 5.2 доказывается теорема существования и единственности решения СИУ для ограниченных диэлектрических сред с разрывами параметров, в том числе для сред без потерь. Отметим, что в этих случаях также должны выполнятся условия (В.2). В разделе 5.3 доказывается, что при нарушении условия (В.2) в области Q существуют нетривиальные решения однородной задачи. При этом электромагнитное поле будет нулевым вне Q, то есть нет излучения в окружающее пространство. Кроме того, в этих случаях в анизотропной среде будет находиться электромагнитная энергия. Приведены примеры подобных сред. Полученный результат имеет принципиально важное значение. В том числе возникает принципиальная возможность создания открытых резонансных диэлектрических структур (аккумуляторов), в которых может храниться электромагнитная энергия.

Большой интерес представляют задачи рассеяния, для которых классическая постановка либо затруднена, либо невозможна. В разделе 5.4 рассмотрены СИУ при минимальных ограничениях на параметры среды в Q, а именно тензоры проницаемостей в области неоднородности, которые являются ограниченными функциями координат. Доказывается, что в этом случае решение СИУ существует и единственно в $\vec{L}_2(Q)$, если в области Q есть затухание, хотя, возможно, и сколь угодно малое. В разделе 5.5 приводятся утверждения, аналогичные вышеприведенным, для магнитодиэлектрических сред.

В разделе 5.6 рассматриваются задачи рассеяния на структурах, которые расположены в другой электромагнитной структуре, описанные во второй главе. Учитывая, что для этих классов задач сингулярные части интегральных операторов совпадают с сингулярными частями СИУ для свободного пространства, получаем утверждения, аналогичные утверждениям для задач рассеяния в свободном пространстве.

В шестой главе изучается спектр рассматриваемых интегральных операторов. Поскольку операторы являются сингулярными, то, помимо дискретной части, в спектре есть непрерывная часть. В разделе 6.1 с использованием условий нетеровости сингулярных операторов в явном виде найдена область расположения непрерывной части спектра операторов на комплексной плоскости. В разделе 6.2 рассмотрен квазистатический диапазон длин волн. Для задач рассеяния в диэлектрических средах, в том числе анизотропных, находящихся в свободном пространстве, достаточно точно описана область расположения всего спектра, включая дискретную часть, на комплексной плоскости. По-видимому, это первый пример аналитического определения области расположения спектра несамосопряженного оператора интегрального уравнения математической физики.

После шестой главы приведен краткий список нерешенных задач, которые, по мнению автора, желательно решить.

В конце первой части монографии даются три приложения, которые имеют самостоятельный интерес и используются в первой части. Первое приложение носит справочный характер. В нем излагаются используемые определения и понятия функционального анализа. Во втором приложении на основе классического математического анализа обосновывается существование некоторых классов сингулярных интегралов, которые используются в основной части. В третьем приложении приводятся необходимые сведения из теории объемных сингулярных интегральных уравнений. Здесь также рассматривается не общий случай сингулярных уравнений, а тот класс уравнений, который может использоваться в задачах математической физики. Поэтому необходимые понятия и утверждения оказываются более простыми и ясными.

Теперь перейдем к описанию разделов второй части монографии. В седьмой и восьмой главах излагаются итерационные методы решения линейных операторных уравнений с несамосопряженными операторами, к которым, в частности, относятся рассматриваемые СИУ задач рассеяния. Условия сходимости итераций к решению формулируются в виде свойств, которым должны удовлетворять операторы уравнений в банаховых или гильбертовых пространствах. Это позволяет обосновывать применимость итерационных методов для получения решения задач с использованием тех или иных характеристик операторов уравнений в функциональных пространствах. Для многих задач математической физики, в частности рассматриваемых СИУ, это могут быть интегральные неравенства, которые следуют из законов сохранения, или информация о спектре операторов. Изложение итерационных методов носит самостоятельный характер и не связано со спецификой рассматриваемых задач электродинамики. Это позволяет пользоваться этими разделами независимо от основной части книги.

В седьмой главе излагаются стационарные итерационные методы. Стационарными называются методы, в которых итерационные параметры определяются до начала итерационной процедуры и в дальнейшем не изменяются. В разделе 7.1 рассмотрен обобщенный метод простой итерации, который применим для решения линейных уравнений с несамосопряженным оператором, действующим в банаховом пространстве. Заметим, что классический метод простой итерации применим для решения уравнений только с самосопряженным оператором. Получены необходимые и достаточные условия сходимости итераций: выпуклая оболочка спектра оператора на комплексной плоскости должна находиться вне начала координат. Построен конечный алгоритм нахождения оптимального итерационного параметра. Отметим, что приведенное условие сходимости итераций выполняется для СИУ, описывающих задачи рассеяния квазистатического диапазона длин волн. В разделе 7.2 рассмотрен обобщенный чебышевский итерационный метод, который также применим для решения линейных уравнений с несамосопряженным оператором. Показано, что условия сходимости итераций для этого метода такие же, как и для обобщенного метода простой итерации.

В восьмой главе излагаются нестационарные итерационные методы. Нестационарными называются методы, в которых итерационные параметры определяются в процессе выполнения итерационной процедуры и зависят от номера итерации. В разделе 8.1 рассмотрен итерационный метод минимальных невязок, который применим для решения линейных уравнений с несамосопряженным оператором, действующим в гильбертовом пространстве. Заметим, что классический метод минимальных невязок применим для решения уравнений только с самосопряженным оператором. Получено условие сходимости итераций, которое имеет следующий вид:

$$\left|(Av,v)\right| \geq p_0(v,v),\ p_0 > 0, \tag{В.3}$$

где A — оператор уравнения. При выполнении условия (В.3) решение уравнения существует и единственно в рассматриваемом гильбертовом пространстве. Отметим, что приведенное условие сходимости итераций выполняется для СИУ, описывающих задачи рассеяния. В разделе 8.2 рассмотрен многошаговый метод минимальных невязок, который является обобщением метода минимальных невязок. Сходимость этого метода будет тем лучше, чем больше размерность подпространства Крылова, используемого для построения итерационной процедуры. Вместе с тем при увеличении размерности подпространства возрастает требуемый объем памяти при реализации алгоритма. В разделе 8.3 рассмотрены итерационные методы градиентного спуска, которые применимы для решения линейных уравнений, оператор которых действует в гильбертовом пространстве. Единственным условием для сходимости итераций к решению является то, что оператор уравнения должен иметь ограниченный обратный оператор.

Для численного решения линейных операторных уравнений, рассматриваемых в функциональных пространствах, например интегральных уравнений, вначале необходимо провести дискретизацию задачи, то есть свести ее к СЛАУ. При этом возникают две основные проблемы:

1) насколько решение, полученное с помощью СЛАУ, близко к решению исходной задачи;

2) сохраняются ли при переходе к конечномерному оператору свойства исходного оператора, которые позволяют использовать итерационные методы для решения СЛАУ.

Ответ на первый вопрос не зависит от метода решения СЛАУ, а определяется способом аппроксимации исходного оператора. В теоретическом плане здесь важно доказательство принципиальной возможности получения решения с любой заданной точностью. Ответ на второй вопрос зависит от свойств исходного оператора, способа дискретизации и используемого итерационного метода.

В девятой главе доказываются теоремы, при выполнении условий которых приближенные решения уравнений (СЛАУ) сходятся к решению исходного операторного уравнения. Для дискретизации операторных уравнений рассматривается метод Галеркина и метод коллокации. Обосновывается возможность применения изложенных итерационных методов для решения получающихся СЛАУ.

В десятой главе рассматриваются численные методы решения СИУ электродинамики. В разделах 10.1, 10.2 рассмотрены СИУ, описывающие задачи рассеяния на трехмерных неоднородных и анизотропных структурах, находящихся в свободном пространстве и над идеально проводящей плоскостью. С использованием результатов девятой главы показано, что для дискретизации этих уравнений можно использовать метод Галеркина или метод коллокации. При этом приближенные решения будут сходиться к решению исходных интегральных уравнений. Обоснована также возможность использования итерационных методов для решения получающихся СЛАУ. В разделе 10.3 рассмотрена система интегральных уравнений, описывающая задачи рассеяния на диэлектрических структурах, вне которых находится ограниченная идеально проводящая поверхность. Показана возможность использования метода Галеркина для дискретизации уравнений. При этом решение получающихся СЛАУ существует и единственно, а для их решения можно использовать итерационные методы минимальных невязок или итерационные методы градиентного спуска. В разделе 10.4 рассматриваются объемные сингулярные интегральные уравнения с запаздыванием по времени, которые описывают задачи взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с ограниченной материальной средой. Изучается возможность применения метода коллокации для дискретизации уравнений. Показана необходимость выполнения условия, связывающего шаги сетки по пространству и по времени. Это условие совпадает с критерием Куранта—Фридрихса, который является необходимым условием для устойчивости численного решения гиперболических уравнений, описывающих распространение волн. Далее на основе метода временных шагов предлагается численный метод решения уравнений.

В одиннадцатой главе излагаются эффективные алгоритмы численного решения СИУ электродинамики. В разделе 11.1 рассматриваются алгоритмы решения задач рассеяния на трехмерных неоднородных и анизотропных структурах, находящихся в свободном пространстве и над идеально проводящей плоскостью. Для дискретизации уравнений используется метод коллокации на равномерной сетке. Поскольку ядра интегральных уравнений зависят от разности декартовых координат (свободное пространство) или от разности и суммы координат (идеально проводящая плоскость), матрицы ЛАУ будут иметь аналогичные свойства. Далее с использованием свойств матриц и алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье строятся алгоритмы быстрого умножения матриц на вектор со значениями T_A и M_A, практически пропорциональными N, где N — размерность СЛАУ. Это делает возможным решение СЛАУ огромной размерности. Однако использование равномерной сетки приводит к чрезмерным вычислительным затратам для многих задач, например для задач рассеяния на диэлектрическом теле с сильно изрезанной границей. В этих случаях необходимо использование неравномерной сетки. В разделе 11.2 для указанного класса задач вводятся две сетки — неравномерную и равномерную. С использованием свойств ядер интегральных уравнений, интерполяции трехмерных функций и алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье строятся алгоритмы со значениями M_A и T_A, также практически пропорциональными N, хотя коэффициент пропорциональности существенно больше, чем для алгоритмов на равномерной сетке. В разделе 11.3 излагаются эффективные алгоритмы решения нестационарных интегральных уравнений с запаздыванием по времени для случая линейных сред без временной дисперсии. В разделе 11.4 дается сравнительный анализ итерационных алгоритмов, используемых для решения различных классов задач рассеяния.

После одиннадцатой главы приведен краткий список нерешенных задач, относящихся к вопросам, рассматриваемым во второй части книги, которые, по мнению автора, желательно решить.

В конце монографии даются два приложения, которые используются во второй части. В четвертом приложении на основе быстрого дискретного преобразования Фурье описываются быстрые алгоритмы умножения теплицевых и ганкелевых матриц на вектор. Эти алгоритмы используются в одиннадцатой главе. В пятом приложении излагаются алгоритмы вычисления параметров, используемых при построении матриц на равномерной и неравномерной сетке.

Часть I
Вывод и исследование сингулярных уравнений

ГЛАВА 1

СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Будем рассматривать следующий класс задач электродинамики. В конечной трехмерной области Q среда характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ (матрицы размерности 3×3), причем компоненты этих тензоров являются переменными функциями координат. Вне области Q параметры среды постоянны и изотропны т. е. $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$ и $\mu = \mu_0 = const$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, источником которого может быть как падающая плоская волна, так и сторонние токи $\vec{J}_E^0$, $\vec{J}_H^0$, рис. 1.1.

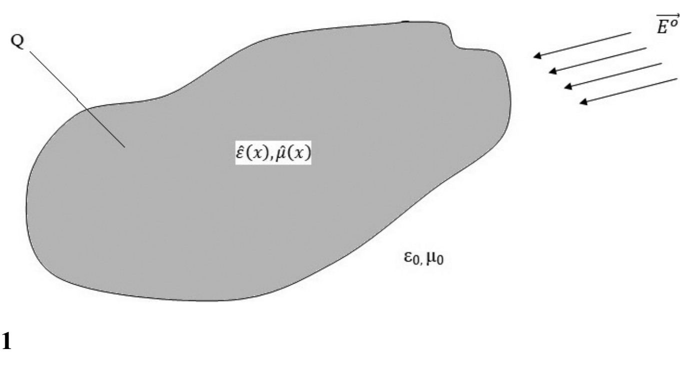

Рис. 1.1

В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные функции электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$, удовлетворяющие уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\vec{E} + \vec{J}_E^0, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\hat{\mu}\vec{H} - \vec{J}_H^0 \tag{1.1}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u\right)\right] = 0, \quad r = |x| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}, \tag{1.2}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, а $\vec{J}_E^0$ и $\vec{J}_H^0$ — заданные электрические и магнитные токи, создающие внешнее поле $\vec{E}^0$, $\vec{H}^0$. Кроме того, на поверхностях разрыва проницаемостей функции $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должны удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент полей. Согласно физическому смыслу задачи $\operatorname{Im}\varepsilon_0 \geq 0$, $\operatorname{Im}\mu_0 \geq 0$, $\operatorname{Re}\varepsilon_0, > 0$, $\operatorname{Re}\mu_0, > 0$, $\operatorname{Im}k_0 \geq 0$. Обычно в свободном пространстве полагается $\operatorname{Im}\varepsilon_0, \operatorname{Im}\mu_0, = 0$. Рассмотрим общий случай, поскольку практически без усложнений это позволяет исследовать задачи рассеяния в однородных средах с потерями, например в воде.

Перепишем уравнения (1.1) в эквивалентном виде:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\varepsilon_0\vec{E} + \vec{J}_E, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H} - \vec{J}_H. \tag{1.3}$$

Здесь

$$\vec{J}_E = \vec{J}_E^0 + \vec{J}_E^p, \quad \vec{J}_H = \vec{J}_H^0 + \vec{J}_H^p, \tag{1.4}$$

где

$$\vec{J}_E^p = -i\omega(\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0\hat{I})\vec{E}, \quad \vec{J}_H^p = -i\omega(\hat{\mu} - \mu_0\hat{I})\vec{H}. \tag{1.5}$$

В (1.4), (1.5) $\vec{J}_E^p$, $\vec{J}_H^p$ — электрические и магнитные токи поляризации, которые, очевидно, не равны нулю только в области Q.

Возможно формально рассматривать (1.3) как уравнения Максвелла в однородной среде, полагая, что электромагнитное поле создается электрическими и магнитными токами $\vec{J}_E$ и $\vec{J}_H$. Тогда решение (1.3), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, можно записать через векторные потенциалы $\vec{A}_E$ и $\vec{A}_H$ по известным формулам

$$\vec{A}_E(x) = \int \vec{J}_E(y)G(R)\,dy, \quad \vec{A}_H(x) = \int \vec{J}_H(y)G(R)\,dy,$$

$$\vec{E} = i\omega\mu_0\vec{A}_E - \frac{1}{i\omega\varepsilon_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}_E - \operatorname{rot}\vec{A}_H,$$

$$\vec{H} = i\omega\varepsilon_0\vec{A}_H - \frac{1}{i\omega\mu_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}_H + \operatorname{rot}\vec{A}_E. \tag{1.6}$$

В (1.6) G — функция Грина для уравнения Гельмгольца

$$G(R)=\frac{\exp(i\,k_0\,R)}{4\pi R}, \tag{1.7}$$

где $R=|x-y|$; $x=(x_1,x_2,x_3)$; $y=(y_1,y_2,y_3)$.

Из (1.3)–(1.6) получаем, что неизвестное электромагнитное поле может быть представлено в виде

$$\vec{E}(x)=\vec{E}^0(x)+k_0^2\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)dy+$$
$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)dy+$$
$$+i\omega\mu_0\operatorname{rot}\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\vec{H}(y)G(R)\,dy,\ x\in E_3, \tag{1.8}$$

$$\vec{H}(x)=\vec{H}^0(x)+k_0^2\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\vec{H}(y)G(R)dy+$$
$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\vec{H}(y)G(R)dy-$$
$$-i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy,\ x\in E_3, \tag{1.9}$$

где $\hat{\varepsilon}_r=\hat{\varepsilon}/\varepsilon_0$ и $\hat{\mu}_r=\hat{\mu}/\mu_0$ — относительные проницаемости.

В (1.8)–(1.9) $\vec{E}^0(x),\vec{H}^0(x)$ — электромагнитное поле, которое создается известными токами $\vec{J}_E^0$ и $\vec{J}_H^0$ в однородном пространстве с параметрами ε_0 и μ_0, т.е. вычисляется по формулам вида (1.6).

Поскольку $\hat{\varepsilon}_r=\hat{I}$ и $\hat{\mu}_r=\hat{I}$ ($\hat{I}$ — единичный тензор) вне области Q, то, используя (1.8), (1.9), можно свести исходную задачу к системе объемных интегродифференциальных уравнений относительно электромагнитного поля в области Q:

$$\vec{E}(x)-k_0^2\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)dy-\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)dy$$
$$-i\omega\mu_0\operatorname{rot}\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\vec{H}(y)G(R)\,dy=\vec{E}^0(x),\ x\in Q, \tag{1.10}$$

$$\vec{H}(x)-k_0^2\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\vec{H}(y)G(R)dy-\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\vec{H}(y)G(R)dy$$
$$+i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\vec{E}(y)G(R)\,dy=\vec{H}^0(x),\ x\in Q. \tag{1.11}$$

Если будет найдено решение системы (1.10), (1.11) в области Q, то можно вычислить электромагнитное поле вне области, используя интегральные представления (1.8), (1.9).

Отметим, что операцию grad div нельзя внести под знак интеграла в (1.10), (1.11), так как функция G в этом случае должна дважды дифференцироваться по координатам, и тогда в ядре интегрального уравнения появится член ~$1/R^3$ и соответствующие интегралы потеряют смысл. Однако операцию rot можно внести под знак интеграла, при этом ядро интегрального оператора будет иметь слабую интегрируемую особенность ~$1/R^2$.

Представим функцию $G(R)$ в виде

$$G(R) = G_0(R) + G_1(R), \quad G_0(R) = \frac{\exp(ik_0 R) - 1}{4\pi R}, \quad G_1 = \frac{1}{4\pi R}. \tag{1.12}$$

Очевидно, что функция $G_0(R)$ является гладкой функцией и ее можно дважды дифференцировать по декартовым координатам, причем $G_0(0) = (ik_0)/(4\pi)$.

Тогда, подставляя (1.12) в (1.10), (1.11) получим

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y) G(R)\,dy - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y) G_1(R)\,dy \\ - \int_Q \Big((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \operatorname{grad}\Big) \operatorname{grad} G_0(R)\,dy \\ - i\omega\mu_0 \int_Q [(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\vec{H}(y), \operatorname{grad} G(R)]\,dy = \vec{E}^0(x),\ x \in Q,\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(x) - k_0^2 \int_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\vec{H}(y) G(R)\,dy - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q (\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y) G_1(R)\,dy \\ - \int_Q \Big((\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\vec{H}(y), \operatorname{grad}\Big) \operatorname{grad} G_0(R)\,dy \\ + i\omega\varepsilon_0 \int_Q [(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\vec{E}(y), \operatorname{grad} G(R)]\,dy = \vec{H}^0(x),\ x \in Q.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь (*,*) и [*,*] обозначают соответственно скалярное и векторное произведение векторов.

Рассмотрим выражение вида

$$\vec{V}(x) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q \vec{U}(y) G_1(R)\,dy,\ x \in Q. \tag{1.15}$$

Выражение (1.15), учитывая (1.12), перепишем в декартовой системе координат:

$$V_n(x) = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \int_Q U_m(y) \frac{1}{4\pi|x-y|}\,dy,\ x \in Q,\ n = 1, 2, 3. \tag{1.16}$$

Рассмотрим выражения вида

$$V_{nm}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \int_Q U_m(y) \frac{1}{4\pi|x-y|}\,dy,\ n, m = 1, 2, 3. \tag{1.17}$$