

Оглавление

Вместо предисловия	5
Глава 1. ЯЗЫКИ ЭМОЦИОНАЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ	10
Глава 2. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ.....	14
Глава 3. МАТЕМАТИКА: КОНСТРУКТИВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ... ..	21
Глава 4. Г. КАНТОР, Д. ГИЛЬБЕРТ, Г. ВЕЙЛЬ.....	25
Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАРКАС.....	35
Глава 6. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ. МИРЫ ИЗ НИЧЕГО	41
Глава 7. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ	51
Глава 8. ОБ АКСИОМАТИКЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.....	64
Глава 9. ОТНОШЕНИЯ И СООТВЕТСТВИЯ.....	68
Глава 10. ФУНКЦИИ. ОТОБРАЖЕНИЯ. ВИДЫ ОТОБРАЖЕНИЙ.....	78
Глава 11. РЕНЕ ДЕКАРТ И ВИЗУАЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ... ..	85
Глава 12. ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ И ДЕКАРТОВА ПЛОСКОСТЬ	93
Глава 13. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.....	95
Глава 14. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ.....	102
Глава 15. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА.....	112
Глава 16. СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА	121
Глава 17. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ	126

Глава 18. ДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА	137
Глава 19. ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА	139
Глава 20. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ	144
Глава 21. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ	147
Глава 22. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА	173
Глава 23. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА	176
Глава 24. О СРАВНЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ	185
Глава 25. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА	190
Глава 26. КРИВЫЕ (ЛИНИИ) НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ	208
Глава 27. СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМИ	236
Глава 28. АЗБУКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ	240
Глава 29. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ЧИСЛО e	267
Глава 30. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ПЛОСКИЕ КРИВЫЕ	287
Глава 31. МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАЦИЯ	310
Глава 32. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕКСТА И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ	329

Вместо предисловия

Это случилось 21 мая 1972 года. В Соборе Святого Петра в Риме состоялась праздничная литургия по случаю Дня Святой Троицы. Как всегда в таких ситуациях, на богослужении присутствовало большое число служителей церкви, прихожан и туристов, которым посчастливилось оказаться на столь значимом событии. Часть посетителей пыталась задержаться, чтобы сделать кино- или фотосъемку. Сейчас изобилие совершенной техники не позволяет уследить за туристами, и внутрицерковные службы практически махнули рукой на запреты съемки. Но в то время с этим было строго. Тем не менее многие посетители старались украдкой запечатлеть внутреннее убранство собора: скульптуры, барельефы и, конечно, главный алтарь, служить мессу за которым может только Папа Римский. Для съемки в центральной части собора день был не слишком удачный. Но подготовленный турист знал, что среди всего этого великолепия, в первой капелле бокового нефа хранится великое творение гениального Микеланджело — скульптурная группа «Пьетá» (милосердие, скорбь, оплакивание).

Микеланджело было лишь 24 года, когда он получил от кардинала де Лагрола (Jean Bilheres de Lagrulas), который служил послом французского короля при дворе Папы Римского, заказ на скульптурную композицию: Мария и Хри-



Микеланджело. Пьета.
Собор Святого Петра, Ватикан

стос. В это творение молодой скульптор вложил столько любви и труда, что только на нем написал свое имя вдоль пояса, стягивающего грудь Богоматери: «MICHAEL. ANGELUS. BONAROTUS. FLORENT. FACIEBAT» (Микеланджело Буонаротти из Флоренции создал это). Трудно поверить, но работа над этим произведением длилась меньше двух лет! В договоре сохранились слова поручителя молодого скульптора (римского банкира Якопо Галли), который гарантировал, *«что это будет наилучшее произведение из мрамора, существующее в наши дни, и что ни один мастер в наши дни не сделает его лучше»*. И результат превзошел все ожидания! «Пьетá» не только прославила Микеланджело на весь Рим, но вскоре о его работе заговорила вся Италия и вся Франция...

В тот воскресный день, пораженные красотой скульптуры великого мастера, люди невольно задерживались перед чудом, что открывалось по левую руку от них. Нежнейшее лицо Марии, движение ее левой руки — отражение скорби и какого-то недоумения... Тщательная проработка деталей... Композиция «Пьеты́» безупречна, несмотря на сложность соединения в одном изваянии двух столь круп-

ных фигур. Все это приковывало внимание посетителей и заставляло их останавливаться.

«Пьета» — одна из наиболее гениальных работ в истории мирового искусства. Но, к сожалению, известны случаи, когда подобные шедевры вызывают не только благоговение, но и ненависть безумцев. Именно такого рода событие и случилось в тот день.

Когда высокий молодой человек неожиданно стал выкрикивать слова о восставшем из мертвых Христе, не все поняли, что происходит. У большинства возникла естественная мысль, что его неуравновешенность и экзальтация — это реакция психически нездорового человека на литургию и проповедь. Но дальше произошло совершенно неожиданное. Безумец, взобравшись на основание статуи, нанес ей пятнадцать ударов скальным молотком, отбив статуе Девы Марии левую руку на уровне локтя, выщербив нос и левое веко и причинив множество других мелких повреждений. Свидетелями преступления стали сотни людей. Понадобилось несколько секунд, чтобы среагировать на происходящее, оттащить от статуи и скрутить сумасшедшего.

Большинство отбитых кусков мрамора было найдено и использовано для реставрации скульптурного шедевра. Для восстановления недостающих элементов использовали мрамор с тыльной стороны скульптуры. Профессиональный подход реставраторов позволил полностью восстановить скульптуру, сделать максимально незаметными мраморные включения из заднего плана скульптуры. Восстановительные работы продолжались более 9 месяцев, и только в конце 1973 года паломники вновь смогли наслаждаться мировым шедевром.

С тех пор скульптура Микеланджело уже много лет находится под надежной защитой в главной церкви Ватикана. Но после трагических событий, произошедших в 1972 году, рассмотреть ее можно только через пуленепробиваемое стекло...

У читателя естественным образом возникает вопрос: ту ли книгу я раскрыл? На обложке — заголовок про ма-

тематику, а из предисловия следует, что она по искусству. Хочу успокоить (или разочаровать) читателя: это книга по математике.

На следующих страницах мы нередко будем обращаться к архитектуре, скульптуре, живописи, которые являются источником математических идей. Но сейчас скажем о том, как математика (причем **самым практическим образом**) может помочь искусству.

Реставрация скульптурной композиции мирового уровня — сложное, ответственное дело, и занимаются этим «крутые» профессионалы, получившие специальное образование. Но многих технических средств, облегчающих процесс реставрации тогда (50 лет назад) не было. Не было ни планшетов, ни цифровой фотоаппаратуры, ни, естественно, необходимого программного обеспечения.

Сейчас для оцифровки скульптур, элементов архитектуры, археологических находок применяют 3D-сканирование, и можно получить 3D-изображения объектов. Полученные данные используются для реставрации, восстановления утраченных фрагментов. Сканирование осуществляется дистанционно. Тем самым устраняется опасность повреждения предмета исследования.

Появилась возможность переноса физических объектов в виртуальную реальность. Благодаря этому можно прямо на уроке рассмотреть творения гениальных скульпторов во всех деталях.

С помощью 3D-сканера создается облако точек геометрических образов на поверхности объекта. Но процесс сканирования — только первый этап работы, это просто сбор «сырой» информации. Чтобы получить конечный результат, мы должны математически (с помощью формул) по специально разработанным алгоритмам обработать данные сканирования, чтобы воссоздать форму предмета во всей ее полноте (процесс, называемый реконструкцией). Если были получены данные и о цвете, то цвет реконструированной поверхности также можно определить.

Уже сегодня отсканированы десятки тысяч произведений искусства, а полученные данные сохранены и доступны для загрузки и экспорта с последующей 3D печатью.

Искусство и математика всегда были неразрывно связаны друг с другом. Но, по всей видимости, первичным в этом союзе является искусство. Ведь искусство — это неисчерпаемый источник человеческой фантазии, без которой работа математика невозможна.

Но также невозможно отрицать влияние математических идей и конструкций на искусство: золотое сечение, законы перспективы в живописи, соотношения звуковых частот, управляющих созвучиями в музыке, ритмический порядок в поэзии... Про архитектуру я уже и не упоминаю: здесь роль математики очевидна.

Без математики невозможно изучение законов природы и не возможен технологический прогресс человечества (телефоны, компьютеры, космические аппараты, современная медицинская аппаратура...).

В этой книге я попытаюсь рассказать, как «устроена» математическая наука, какие методы рассуждений она использует, что такое «математическое моделирование». И это поможет Вам сформировать правильный взгляд на математику.

«Правильный взгляд на математику приводит не просто к истине, а к совершенной красоте — холодной и строгой, как скульптура; отстраненной от человеческих слабостей; лишенной вычурных уловок живописи и музыки — величественной кристальности, являющей совершенство высочайшего из искусств. Прикосновение к ней — неописуемый восторг; экстаз, освобождающий от брэнной человеческой оболочки и сравнимый только с поэзией».

Бёртран Рáссел,
английский математик,
философ и общественный деятель,
лауреат Нобелевской премии
по литературе за 1950 год

Языки эмоционального восприятия

Глава 1

Каждая сфера творческой деятельности человека вырабатывает свой специфический язык общения.

На языке **зрительных образов** «разговаривают» графика, живописные полотна, скульптурные изображения, архитектура.

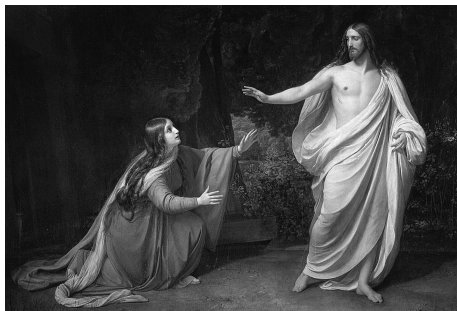
Термин **«графика»** первоначально употреблялся применительно только к письму и искусству каллиграфии. Новое значение и понимание она получила в конце XIX — начале XX вв., когда графика определилась как самостоятельный вид искусства. Язык графики, основные его «буквы», — это линии, штрихи, контуры, пятна, точки.

Основой языка **живописи** является цвет. И «букв» столько, сколько цветов и оттенков. Глаз обычного человека (по оценке специалистов) способен различить примерно 150 основных цветов. Глаз профессионального художника — до 10–15 тысяч цветов и оттенков. Некоторые исследователи утверждают,



А. Дюрер.
Руки молящегося
(около 1508)

что, теоретически, человеческий глаз способен (при определенных условиях) различить до 10 миллионов оттенков. Точную оценку никто дать не может, тем более что способности цветового восприятия различных людей могут многократно отличаться.



А. Иванов. Явление воскресшего Христа Марии Магдалине (1835)

Искусствоведы утверждают, что **скульптура** «говорит» на языке пластики и объемов. Скульптура реальна и предметна. Можно выбрать любое освещение и любую точку для ее обозрения. К дополнительным языковым средствам скульптуры можно отнести материал, из которого она сделана. Это может быть дерево, глина, гранит, мрамор, бронза. Некоторые специалисты считают, что понимать язык скульптуры труднее, чем язык живописи, к которой мы больше привыкли и которая более красочно отражает окружающий нас мир. При этом они ссылаются на авторитет философа XVIII века Д. Дидро, который сказал, что скульптура — *«это сильная муза, но молчаливая и скрытная»*.



Джованни Страцца.
Дева Мария,
мрамор, (1850-е)

Основными элементами («буквами») **архитектуры** являются: геометрические формы, линия, план, объем. Такие дополнительные детали, как свет, тень, цвет, текстура, обогащают и дополняют язык архитектуры. Архитектурное сооружение складывается из кусочков, как мозаика. И компоновку, последовательность, в которой соединяются отдельные элементы, можно рассматривать как грамматику языка архитектуры.



А. Гауди. Саграда Фамилия
(1882, начало строительства).
Барселона

В отличие от любого иностранного, **музыкальный** язык понятен всем людям, знающим и понимающим музыку. Музыкальными «буквами» являются звуки, каждый из которых имеет свое собственное (нотное) написание. Музыкальные мысли — это мелодии. Писатель записывает мысли на страницах своего рассказа, повести или романа. Музыкант записывает последова-

Sonate

Op. 57

Dem Grafen Franz von Brunswick gewidmet.

L. van Beethoven

(1770-1827)



Фрагмент нотной записи.

Л. ван Бетховен. Соната, Оп. 57

тельность нот (звуков). Могут использоваться «сложные буквы»: созвучия (аккорды) из двух, трех и более звуков. У нотной записи — сложная грамматика: кроме нот указываются темп исполнения и ритмический рисунок. Здесь перечислены далеко не все музыкально-языковые средства, и профессиональные музыканты могут прочитать не одну лекцию по грамматике и синтаксису музыкального языка.

Кроме искусств, связанных с созданием зрительных и музыкальных образов, существует и творчество писателей, которые обращаются непосредственно к сознанию и мыслям на языке художественной литературы. Это не тот язык, на котором говорят люди «в жизни». Язык, на котором написаны «Илиада» и «Одиссея», не является разговорным ни в одной греческой области. Поэтический язык вообще полярен по отношению к разговорному. Но, при необходимости, художник слова свободно пользуется формами бытового языка.

Мы выяснили, что у каждого из представителей гуманитарных профессий (архитекторов, правда, к ним можно отнести весьма условно) есть свои выразительные средства, свой язык.

А как обстоит дело у представителей естественных наук? На каком языке им выражать свои мысли и идеи? Все школьники знают ответ на этот вопрос: таким языком является язык математический.

О математическом языке

Глава 2

Когда мы читаем роман, повесть или рассказ, то наше сознание создает череду связанных с текстом образов. Но авторский текст не предполагает однозначного его отображения в создаваемые в нашем мозге образы. Разные читатели видят героев художественного произведения по-разному. Чтобы в этом убедиться достаточно посмотреть иллюстрации разных художников к одному и тому же произведению. Тем более, мы ничего не можем утверждать об эмоциональном восприятии: одним нравится «Гарри Поттер», а другим больше нравится читать «Три мушкетера».

Это означает, что существует проблема однозначной трансформации литературного текста в зрительный образ.

Более того, известна проблема идентичного перевода прозаического текста с одного языка на другой, не говоря уже о стихотворном. Существуют, например, разные переводы того же «Гарри Поттера». Читатель может выбирать тот перевод, который ему нравится больше.

Аналогично обстоит дело с нотами (музыкальным текстом). Не только профессионалы, но и «продвину-

тые» любители музыки легко чувствуют разницу в исполнении одного и того же произведения различными музыкантами.

У каждого из представителей гуманитарных профессий свои выразительные средства, свой язык. Но результат восприятия «текста» — различный.

Математический текст принципиально отличается от текста художественного произведения. Он требует абсолютно однозначного его понимания разными читателями. «Буквы» этого текста — математические знаки, которые могут объединяться в математические «слова» (формулы) и математические «предложения» (связанные между собой группы формул). Понимается этот текст совершенно одинаково всеми математиками в мире вне зависимости от места проживания и родного языка. «Грамматика» этого языка вырабатывалась их совместными усилиями в течение длительного времени (нескольких сотен лет). Язык математики — живой. Он периодически дополняется новыми символами и конструкциями, которые согласовываются всеми участниками математического сообщества.

Например, строку:

$$\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = A := \forall V_R(A) \quad \exists \mathring{U}_E(a) \quad (f(\mathring{U}_E(a)) \subset V_R(A))$$

все математики в мире поймут одинаково!

Лингвисты выделяют две категории языков: **естественные** и **формальные**. Естественные языки позволяют людям общаться между собой. Формальные языки требуют точности, однозначности и должны быть безупречно логичны. К формальным языкам относится математический, а также языки написания химических формул и программирования. Формулы и обозначения, применяемые в этих науках, одинаково трактуются во всем мире.

Еще одно важное отличие заключается в том, что формальные языки, в отличие от естественных, существуют только в письменном виде.