§ 1. Алгебраические методы решения

В данном параграфе задачи (уравнения, неравенства, системы) классифицированы по их виду. Здесь рассмотрены следующие методы: метод сведения задачи к равносильной, перебор различных значений параметра, замена переменной, выявление необходимых и достаточных условий или необходимых условий.

1.1. Задачи вида $a \cdot x \vee b$

Рассмотрим задачи вида $a \cdot x \vee b$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=, >, <, \geqslant, \leqslant$, и системы линейных уравнений.

Уравнения

Уравнение вида $a \cdot x = b$ с переменной x имеет единственное решение при $a \neq 0$; имеет бесконечное множество решений при $a = 0$, $b = 0$; не имеет решений при $a = 0$, $b \neq 0$.

Пример 1 (МГУ, 2002). При каких значениях параметра b уравнение

$$9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4 x - b^2(b + \sqrt{3})$$

не имеет корней?

Решение. Данное уравнение является линейным относительно неизвестной x.

$$(b^4 - 9)x = b^3 + (1 + \sqrt{3})b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3}.$$

Последнее уравнение не имеет корней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} b^4 - 9 = 0, \\ b^3 + (1 + \sqrt{3})b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы имеет два корня: $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = -\sqrt{3}$.

Подстановка показывает, что второму условию удовлетворяет только $b_1 = \sqrt{3}$.

Ответ: $b = \sqrt{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $(a^2 - a)x = a - 1$ при всех значениях параметра a.

Решение. Так как $a^2 - a = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$, то рассмотрим три случая.

1.2. Задачи вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$

Рассмотрим задачи вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \vee 0$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков $=$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ и системы уравнений (неравенств).

• Функция $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ задаёт параболу с вершиной в точке $C(x_{\text{в}}; y_{\text{в}})$, где $x_{\text{в}} = -\dfrac{b}{2a}$, $y_{\text{в}} = y(x_{\text{в}})$.

• Функция $y = a(x - m)^2 + n\ (a \neq 0)$ задаёт параболу с вершиной в точке $C(m; n)$.

Уравнения

Уравнение вида $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ с переменной x при $a = 0$ приводится к уравнению степени не выше первой; при $a \neq 0$ является квадратным уравнением.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$.

1. Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0) \quad (1.4)$$

не имеет решений тогда и только тогда, когда $D < 0$, где $D = b^2 - 4ac$.

2. Квадратное уравнение (1.4) имеет

а) два различных корня тогда и только тогда, когда $D > 0$;

б) два корня (могут быть кратными) тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$;

в) два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} > 0; \end{cases}$$

г) два отрицательных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(0) > 0, \\ x_{\text{в}} < 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ (a - a_1)(a - a_2) > 0, \\ a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow a > 3 + \sqrt{20}.$$

Ответ: $a > 3 + 2\sqrt{5}$.

Задачи, содержащие иррациональные выражения

Пример 50. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x+1} = x + a$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x+1} = t$, где $t \geqslant 0$. Отсюда $x = t^2 - 1$. Уравнение $\sqrt{x+1} = t_0$ имеет один корень, если $t_0 \geqslant 0$. Получаем квадратное уравнение $t^2 - t + a - 1 = 0$, дискриминант которого $D = 5 - 4a$.

1) Если $D = 0$, т. е. $a = 1{,}25$, то квадратное уравнение $t^2 - t + 0{,}25 = 0$, или $(t - 0{,}5)^2 = 0$, имеет единственный корень $t = 0{,}5 > 0$. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень при $a = 1{,}25$.

2) Если $D > 0$, т. е. $a < 1{,}25$, то квадратное уравнение имеет два корня.

а) Корни будут иметь разные знаки при условии $t_1 \cdot t_2 = a - 1 < 0$, т. е. из них только один положительный корень. Решая систему неравенств $\begin{cases} a < 1{,}25, \\ a - 1 < 0, \end{cases}$ получим условие $a < 1$, при котором исходное уравнение имеет один корень.

б) Хотя бы один из корней равен нулю. В этом случае $a - 1 = 0$, $a = 1$. Квадратное уравнение имеет два неотрицательных корня $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$. Значит, исходное уравнение также имеет два корня.

Ответ: $a = 1{,}25$, $a < 1$.

Пример 51. При каких a уравнение

$$2x + 3\sqrt{x} + 2a^2 - 11a = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Пусть $\sqrt{x} = t$, где $t \geqslant 0$. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: при каких значениях a квадратное уравнение $2t^2 + 3t + 2a^2 - 11a = 0$ имеет один неотрицательный корень?

Пример 171 (тренировочная работа № 63 с сайта http://alexlarin.com). При каких значениях параметра a уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$$

имеет ровно одно решение?

Решение. Левая часть уравнения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}(x-3)(x+1)-3\sqrt{(x-3)(x+1)}\text{при } x\leqslant -1,\\ (x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)(x+1)}\text{при } x>3.\end{cases}$$

Сделаем замену $\sqrt{(x-3)(x+1)}=t$.

Квадратичная функция $(x-3)(x+1)$ убывает на промежутке $(-\infty;-1]$, принимая неотрицательные значения; возрастает на промежутке $(3;+\infty)$, принимая положительные значения. В силу возрастания функции $\sqrt{p}$ на промежутке $[0;+\infty)$ сложная функция $t(x)=\sqrt{(x-3)(x+1)}$ убывает на промежутке $(-\infty;-1]$, принимая неотрицательные значения; возрастает на промежутке $(3;+\infty)$, принимая положительные значения. Получаем две функции $f_1(t)=t^2+3t$, где $t>0$ и $f_2(t)=t^2-3t$, где $t\geqslant 0$.

Переформулируем задачу: при каких значениях параметра A, где $A=(a-1)(a+2)$, совокупность уравнений $t^2+3t=A$, где $t>0$, и $t^2-3t=A$, где $t\geqslant 0$, имеет ровно одно решение?

Прямые $A=const$ имеют с построенными графиками функций ровно одну общую точку при $A=-\frac{9}{4}$ (см. рис. 40).

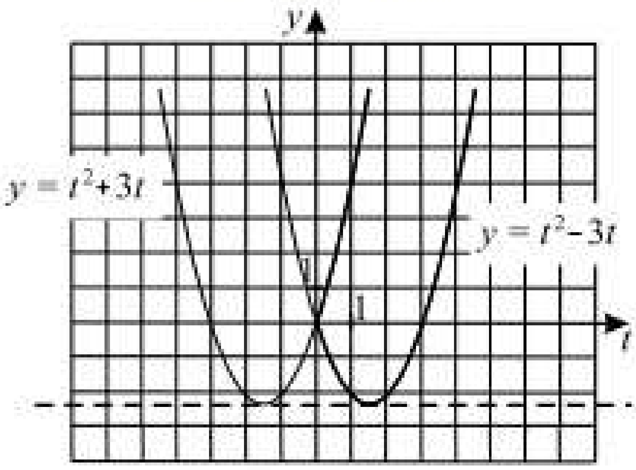

Рис. 40

Отсюда $(a-1)(a+2)=-\frac{9}{4}$, $4a^2+4a+1=0$, $a=-\frac{1}{2}$.

Задачи вида $f(x) \vee ag(x)$ и сжатие (растяжение) графика вдоль оси Oy

При решении задач данного вида используется семейство функций $g_a(x) = ag(x)$, графики которых отличаются от графика функции $y = g(x)$ сжатием (растяжением) вдоль оси Oy: растяжением, если $a > 1$; сжатием при $0 < a < 1$; преобразованием симметрии относительно оси x, если $a = -1$; сочетанием указанных преобразований для остальных значений $a \neq 0$.

Пример 185 (экзаменационная работа, 1994). При каких значениях параметра a уравнение

$$x + 2 = a|x - 1|$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Решение. Построим графики обеих частей исходного уравнения (см. рис. 54). График функции $f(x) = x + 2$ есть прямая (неподвижный график). Функция $g(x) = a|x-1|$ задаёт семейство «уголков» с вершиной в точке $(1;0)$. Если $a > 0$, то ветви «уголка» направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. При $a = 1$ или $a = -1$ одна из ветвей «уголка» параллельна прямой $y = x + 2$.

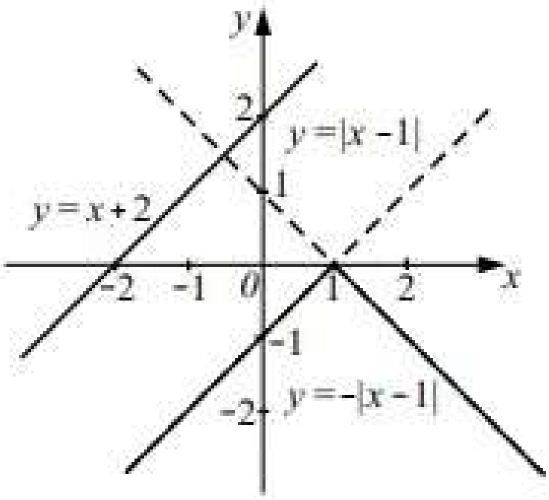

Рис. 54

Исследуем изменение параметра a от $-\infty$ до $+\infty$. Из рисунка видно, что при $a \leqslant -1$ графики обеих частей исходного уравнения не пересекаются, т. е. уравнение не имеет решений.

§ 5. Решение задач разными способами

В данном параграфе к решению каждой задачи предлагаются различные подходы.

Пример 241 (ЕГЭ, 2010). Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a+5)6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение.

1-й способ

Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение

$$t^2 - (8a+5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет один положительный корень?

Значит, другой корень должен быть неположительным. Используя теорему Виета, получаем два случая (t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения):

1) $t_1 t_2 < 0 \;\Leftrightarrow\; 16a^2 + 20a - 14 < 0 \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{7}{4} < a < \dfrac{1}{2}$;

2) $\begin{cases} t_1 t_2 = 0, \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 16a^2 + 20a - 14 = 0, \\ 8a + 5 > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; a = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда $-\dfrac{7}{4} < a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Замечание. В рассмотренных случаях нет необходимости в исследовании дискриминанта на наличие действительных корней уравнения. В первом случае свободный член $c = t_1 t_2$ отрицательный, а значит, дискриминант положительный. Во втором случае свободный член равен нулю, поэтому уравнение имеет корни.

2-й способ

Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a+5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Так как дискриминант D полученного уравнения положительный:

$$D = (8a+5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81,$$

то уравнение имеет два различных корня: $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$, причём при всех значениях a верно неравенство $4a - 2 < 4a + 7$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a - 2$ и $4a + 7$ будет положительным, а другое — неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases} 4a + 7 > 0, \\ 4a - 2 \leqslant 0, \end{cases} \quad -\frac{7}{4} < a \leqslant \frac{1}{2}.$$

3-й способ

Приведём функционально-графические решения уравнения.

Пусть $6^x = t$, где $t > 0$, тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - (8a + 5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения

$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$

и найдём его корни: $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$.

Возвратимся к переменной x: $6^x = 4a - 2$ или $6^x = 4a + 7$. Отсюда получаем $a = \dfrac{6^x + 2}{4}$ и $a = \dfrac{6^x - 7}{4}$ или $a = \dfrac{6^x}{4} + \dfrac{1}{2}$ и $a = \dfrac{6^x}{4} - \dfrac{7}{4}$. Построим схематично графики полученных функций (см. рис. 108). Рассмотрим прямые, параллельные оси x и пересекающие построенные графики. Единственная точка пересечения получается при условии $-\dfrac{7}{4} < a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

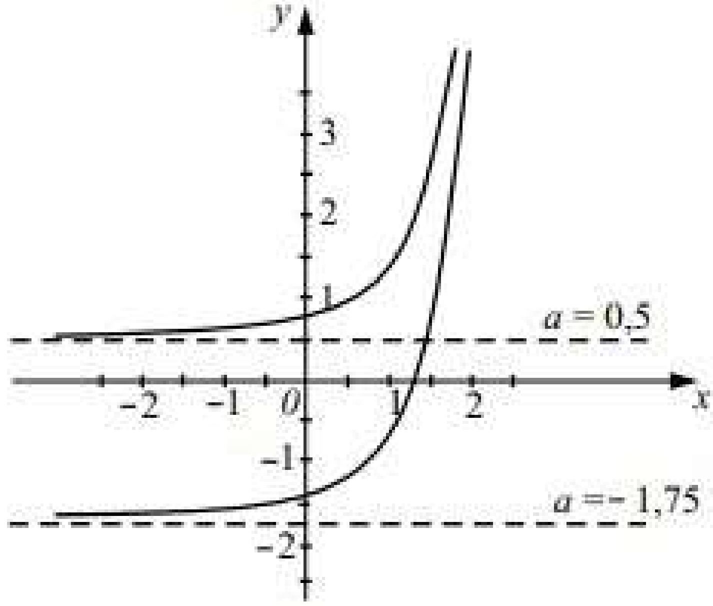

Рис. 108

4-й способ

Пусть $6^x = t$, где $t > 0$. Тогда исходное уравнение примет вид
$$t^2 - (8a + 5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0.$$

Тогда задачу можно переформулировать: при каких значениях a квадратное уравнение $t^2 - (8a + 5)t + 16a^2 + 20a - 14 = 0$ имеет один положительный корень?

Вычислим дискриминант квадратного уравнения
$$D = (8a + 5)^2 - 4(16a^2 + 20a - 14) = 81$$
и найдём его корни: $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$.

Построим графики функций $t = 4a - 2$ или $t = 4a + 7$ при $t > 0$, которые пересекают ось Oa при $a = \dfrac{1}{2}$ и $a = -\dfrac{7}{4}$ соответственно (см. рис. 109).

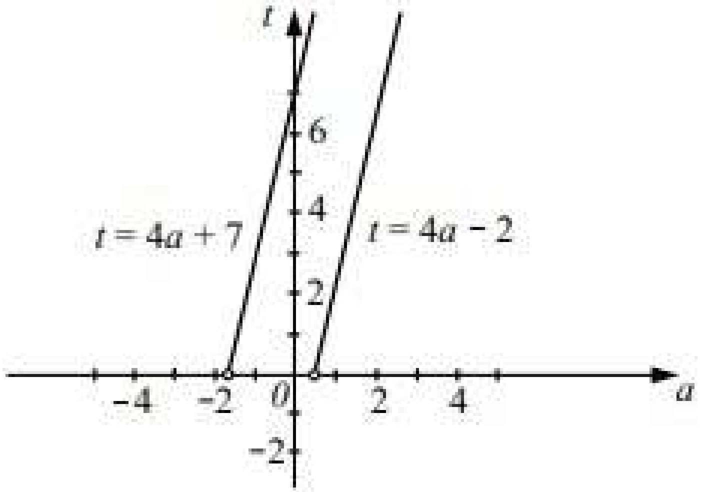

Рис. 109

Прямые $a = const$ пересекают полученный график ровно в одной точке при $-\dfrac{7}{4} < a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{7}{4} < a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Пример 242 (ЕГЭ, 2010). Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$ имеет более двух точек экстремума.

Упражнения

1. При каких значениях параметра b уравнение
$$9x + b^2 - (2-\sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4x - b^2(b+\sqrt{3})$$
имеет бесконечно много корней?

2. Для каких значений a решение уравнения
$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$$
больше 2?

3. Найдите наименьшее целое число a, при котором уравнение $3x^2 - 9x + a^2 = 0$ имеет хотя бы одно решение.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$ имеет единственное решение.

5. При каких значениях a уравнение $ax^2 - x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

6. При каких значениях a уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение?

7. При каких значениях a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

8. При каких значениях a уравнение $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)\cdot x + a = 5$$
имеет два различных положительных корня.

10. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.