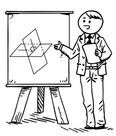
СОДЕРЖАНИЕ

QR-коды

ВВЕДЕНИЕ

Перед вами необычный справочник, который поможет систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы. Главное отличие данного пособия от множества других — обучающие анимационные видео, которые наглядно помогут разобраться со сложными темами. В обучении важен принцип наглядности. Когда работают все каналы восприятия, ученик быстрее и легче усваивает сложный материал. Информация, представленная в словесном и образном виде, задействует одновременно оба полушария головного мозга. В таком случае её проще обработать и запомнить.

В данной книге 20 QR-кодов. Для их активации следует навести камеру устройства (смартфона, планшета и др.) на QR-код. На экране появится обучающее видео, в котором содержится развёрнутый поясняющий материал с элементами анимации по одной из тем, актуальных для сдачи экзамена по математике.



Угол между плоскостями

Полный перечень ссылок для скачивания и просмотра обучающих видеороликов представлен в приложении 2.

Теоретические блоки информации в пособии чередуются с тематическими рисунками, схемами и таблицами, что помогает систематизировать и закрепить изученный материал.

В книге рассмотрены традиционные разделы математики: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», которые соответствуют объёму учебного материала, включённого в единый государственный экзамен по математике.

Справочник предназначен для школьников, студентов и учителей школ, а также для всех, кто интересуется математикой.

Пособие поможет учащимся и выпускникам при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также к сдаче основного и единого государственных экзаменов.

Желаем успехов!

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Числовые множества

Числовыми называются множества, элементами которых являются числа.

Множество **натуральных чисел** образуют числа, которые используются при счёте предметов.

$$N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\ldots\}$$

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

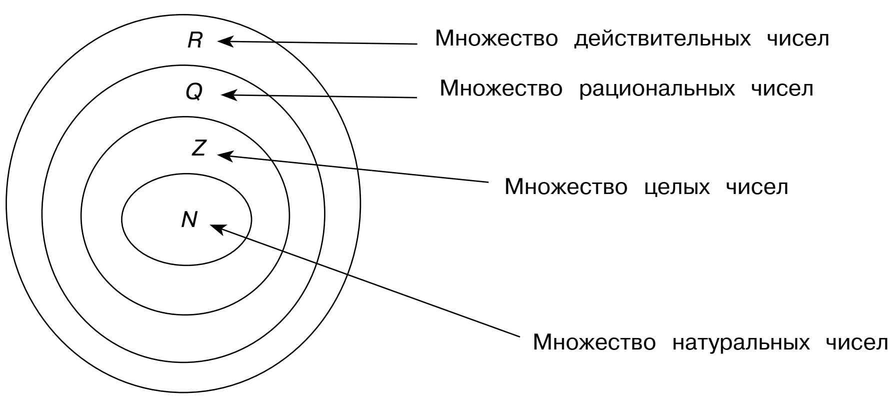
$$Z = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\ldots\}$$

Множество **рациональных чисел** составляют числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (конечные или бесконечные периодические десятичные дроби). Обозначение: Q.

Множество **иррациональных чисел** составляют числа, которые не могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (бесконечные десятичные непериодические дроби). Обозначение: I.

Рациональные и иррациональные числа составляют множество **действительных чисел**. Обозначение: R.

$$R = Q \cup I$$



Связь между числовыми множествами

Натуральные числа

Множество натуральных чисел является бесконечным, так как для любого натурального числа n найдётся натуральное число, большее, чем n.

ДЕЙСТВИЯ С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение

$$a+b=c$$

слагаемые сумма

$$\boldsymbol{a+b=b+a}$$
$$\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c}$$
$$\boldsymbol{a+0=a}$$

Вычитание (действие, обратное сложению)

$$a-b=c$$

уменьшаемое разность

вычитаемое

$$\boldsymbol{a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b}$$
$$\boldsymbol{(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)}$$
$$\boldsymbol{a-(b-c)=(a-b)+c}$$
$$\boldsymbol{a-0=a}$$
$$\boldsymbol{a-a=0}$$

Умножение

$$a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ слагаемых}}$$

$$a\cdot b=c$$

множители

произведение

Вариант обозначения: $a\times b$.

$$\boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$$
$$\boldsymbol{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$$
$$\boldsymbol{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c}$$
$$\boldsymbol{(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c}$$
$$\boldsymbol{a\cdot 1=a}$$
$$\boldsymbol{a\cdot 0=0}$$

Деление (действие, обратное умножению)

$$a:b=c$$

делимое частное

делитель

$$\boldsymbol{(a:b):c=a:(b\cdot c)}$$
$$\boldsymbol{a:(b:c)=(a:b)\cdot c}$$
$$\boldsymbol{(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b}$$
$$\boldsymbol{(a\cdot b):c=a\cdot(b:c)}$$
$$\boldsymbol{a:a=1}$$
$$\boldsymbol{a:1=a}$$
$$\boldsymbol{0:a=0\ (a\neq 0)}$$

Варианты обозначений: $\dfrac{a}{b}$ или a/b.

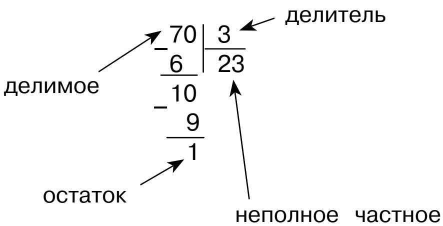
★ Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b.

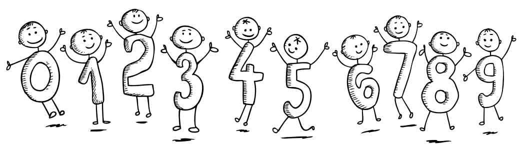
★ Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b.

Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r, что $a=b\cdot q+r$ и $r<b$.

ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя.

✓ Деление с остатком:





Проверка: $70=3\cdot 23+1$.

Возведение в степень с натуральным показателем

Выражение a^n называется **степенью числа** $\boldsymbol{a}$.

Вторая степень числа называется **квадратом** числа, третья степень — **кубом** числа.

показатель степени

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}$$

основание степени

Свойства степеней

$$a^1=a$$

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\ \text{где } a\neq 0$$

$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$$

$$a^x\cdot b^x=(ab)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x,\ \text{где } b\neq 0$$

Сложение и вычитание, умножение и деление, а также возведение в степень и извлечение корня попарно представляют собой обратные действия.

Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

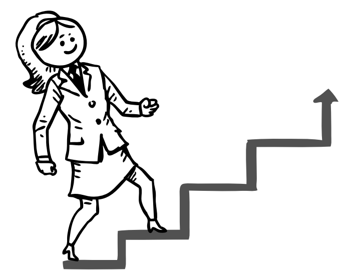
Только в результате сложения и умножения натуральных чисел также получаются натуральные числа.

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Таблица степеней

a^n	**Значения *n***									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2*n*	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3*n*	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4*n*	4	16	64	256	1024	4096				
5*n*	5	25	125	625	3125	15 625				
6*n*	6	36	216	1296	7776	46 656				
7*n*	7	49	343	2401	16 807					
8*n*	8	64	512	4096	32 768					
9*n*	9	81	729	6561	59 049					



ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ

★ Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
★ Действия 2-й ступени: умножение и деление.
★ Действия 3-й ступени: возведение в степень.

В выражении без скобок сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо.

Возведение в степень
⇩
умножение/деление
⇩
сложение/вычитание

✓ Запись решения в строчку:

$$\boxed{\overset{4}{17-}\overset{1}{5\cdot}\overset{2}{6:}\overset{5}{3-}\overset{6}{2+}\overset{3}{4:}2}=17-30:3-2+2=17-10-$$
$$-2+2=7-2+2=7$$

В выражении со скобками сначала выполняют все действия в скобках, а затем действия большей ступени.

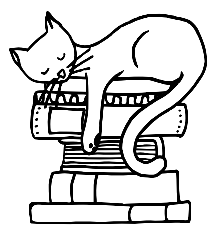
Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий.

Действия в скобках
⇩
возведение в степень
⇩
умножение/деление
⇩
сложение/вычитание

✓ Запись решения по действиям:

$$\boxed{(3\overset{1}{+}1)\overset{3}{\cdot}2\overset{5}{+}6^{\overset{2}{2}}\overset{4}{:}3\overset{6}{-}7}=13$$

1) $3+1=4$;
2) $6^2=36$;
3) $4\cdot 2=8$;
4) $36:3=12$;
5) $8+12=20$;
6) $20-7=13$.



Дроби

Дробь — форма представления числа в математике. Существует два вида дробей: обыкновенные и десятичные.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью**.

m ← числитель
n ← знаменатель

Правильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя, то есть $m<n$.

Любая правильная дробь меньше единицы: $\frac{m}{n}<1$, если $m<n$.

✓ Правильные дроби: $\frac{3}{8}$ $(3<8)$; $\frac{1}{5}$ $(1<5)$.

Неправильная дробь — это обыкновенная дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, то есть $m \geq n$.

Любая неправильная дробь больше единицы или равна ей: $\frac{m}{n} \geq 1$, если $m \geq n$.

Любое натуральное число можно представить в виде неправильной дроби.

✓ Неправильные дроби: $\frac{8}{3}$ $(8>3)$; $\frac{5}{5}$ $(5=5)$.

✓ Представление натурального числа в виде неправильной дроби: $4=\frac{4}{1}$ или $4=\frac{8}{2}$.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной.

$$\frac{a}{b}=\frac{a \cdot c}{b \cdot c}; \ \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}, \ c \neq 0$$

ВАЖНО! При использовании основного свойства изменяется только внешний вид дроби, её значение при этом остаётся неизменным.

Сокращение дроби — действие перехода к новой дроби, равной заданной, но с меньшими числителем и знаменателем.

✓ $\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$ (числитель и знаменатель дроби разделили на 2).

Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на их общий делитель, больший 1.

Несократимой называется дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа.

Сокращать дробь можно сразу на наибольший общий делитель числителя и знаменателя либо несколько раз на общий делитель.

✓ Сократим дробь $\frac{140}{175}$.

▷ $140=2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$; $175=5 \cdot 5 \cdot 7$; НОД$(140; 175)=5 \cdot 7=35$. Тогда $\frac{140}{175}=\frac{140:35}{175:35}=\frac{4}{5}$.

▷ $\frac{140}{175}=\frac{140:5}{175:5}=\frac{28:7}{35:7}=\frac{4}{5}$.

Приведение дроби к новому знаменателю — действие замены заданной дроби равной ей дробью, но с бóльшими числителем и знаменателем.

Приведение к новому знаменателю используется при сложении, вычитании, сравнении обыкновенных дробей, а также при представлении обыкновенной дроби в виде десятичной.

✓ $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$ (числитель и знаменатель дроби умножили на 25).

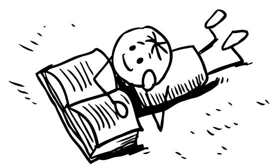
СМЕШАННЫЕ ЧИСЛА

Число, содержащее целую и дробную части, называется **смешанным**.

Представление неправильной дроби в виде смешанного числа

1) Разделить числитель на знаменатель с остатком.
2) Неполное частное — это целая часть, остаток от деления — числитель, знаменатель остаётся прежним.

✓ $\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$, так как $17:7=2$ (ост. 3).



Представление смешанного числа в виде неправильной дроби

1) Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель — получим числитель неправильной дроби.
2) Знаменатель остаётся прежним.

✓ $3\frac{5}{11}=\frac{3\cdot 11+5}{11}=\frac{38}{11}$.

Смешанное число — это сумма натурального числа и обыкновенной дроби, записанная без знака «+».

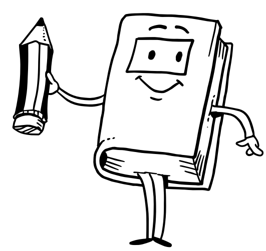
✓ $8\frac{1}{3}=8+\frac{1}{3}$.

СРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ И СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Сравнение обыкновенных дробей

1) Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та дробь, у которой числитель больше.

✓ $\frac{5}{12}>\frac{3}{12}$, так как $5>3$.



2) Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та дробь, у которой знаменатель меньше.

✓ $\frac{5}{9}>\frac{5}{11}$, так как $9<11$.

Сравнение смешанных чисел

1) Из двух смешанных чисел с разными целыми частями больше то число, у которого целая часть больше.

✓ $7\frac{3}{8}>6\frac{9}{13}$, так как $7>6$.

2) Если целые части смешанных чисел равны, надо сравнить их дробные части по правилам сравнения обыкновенных дробей.

✓ $2\frac{3}{20} > 2\frac{1}{20}$, так как $\frac{3}{20} > \frac{1}{20}$.

Если у дробей разные знаменатели (числители), необходимо сначала с помощью основного свойства дроби привести их к одному знаменателю (числителю).

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ И СМЕШАННЫМИ ЧИСЛАМИ

Сложение

Чтобы **сложить обыкновенные дроби**, надо:

1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные;

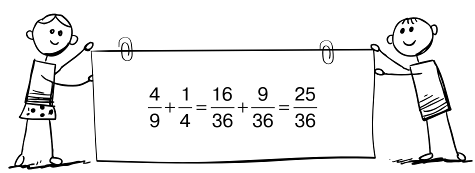
2) сложить числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить; если дробь неправильная, нужно представить её в виде смешанного числа.

✓ $\frac{3}{10}+\frac{7}{15}=\frac{9}{30}+\frac{14}{30}=\frac{23}{30}$.

✓ $\frac{2}{7}+\frac{3}{14}=\frac{4}{14}+\frac{3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$.

✓ $\frac{11}{15}+\frac{3}{10}=\frac{22}{30}+\frac{9}{30}=\frac{31}{30}=1\frac{1}{30}$.



Чтобы **сложить смешанные числа**, надо:

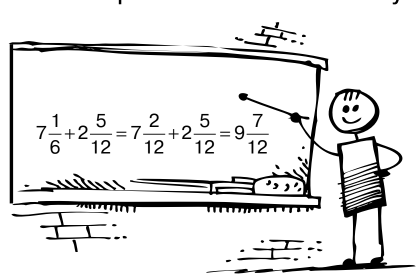
1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;

2) отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно — дробных.

Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, нужно выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

✓ $2\frac{3}{8}+5\frac{5}{12}=2\frac{9}{24}+5\frac{10}{24}=7\frac{19}{24}$.

✓ $2\frac{7^{\backslash 2}}{9}+3\frac{5^{\backslash 3}}{6}=2\frac{14}{18}+3\frac{15}{18}=5\frac{29}{18}=6\frac{11}{18}$.



Вычитание

Чтобы **вычесть обыкновенные дроби**, надо:

1) привести дроби к общему знаменателю, если знаменатели разные;

2) вычесть числители полученных дробей, знаменатель оставить прежним: $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.

Если получилась сократимая дробь, её надо сократить.

✓ $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{15}.$

✓ $\frac{5}{7}-\frac{3}{14}=\frac{10}{14}-\frac{3}{14}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$

Чтобы **вычесть смешанные числа**, надо:

1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;

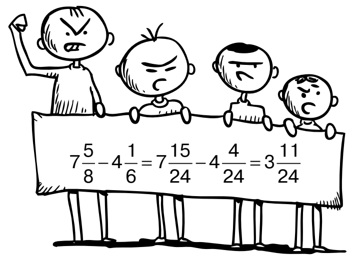
2) отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно — дробных.

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, нужно превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

✓ $3\frac{11}{12}-2\frac{5}{6}=3\frac{11}{12}-2\frac{10}{12}=1\frac{1}{12}.$

✓ $9\frac{2}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{7+2}{7}-3\frac{5}{7}=8\frac{9}{7}-3\frac{5}{7}=5\frac{4}{7}.$

✓ $9\frac{7^{\backslash 2}}{15}-2\frac{5^{\backslash 5}}{6}=9\frac{14}{30}-2\frac{25}{30}=8\frac{44}{30}-2\frac{25}{30}=6\frac{19}{30}.$



Умножение

Чтобы **умножить обыкновенные дроби**, надо:

1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей (произвести сокращение, если возможно): $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d};$

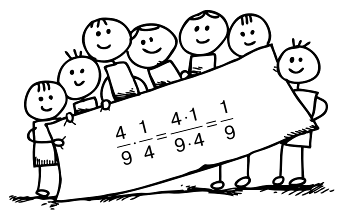
2) первое произведение записать числителем, второе — знаменателем.

Если получилась неправильная дробь, нужно представить её в виде смешанного числа.

✓ $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}.$

✓ $\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 5}{15\cdot 8}=\frac{1\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{1}{6}.$

✓ $\frac{4}{5}\cdot\frac{35}{6}=\frac{4\cdot 35}{5\cdot 6}=\frac{2\cdot 7}{1\cdot 3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}.$



Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:

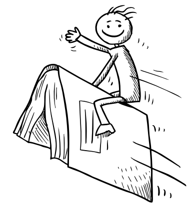
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;

2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;

3) первое произведение записать числителем, второе — знаменателем.

✓ $2\frac{1}{3}\cdot4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{7\cdot30}{3\cdot7}=10.$ ✓ $5\frac{1}{3}\cdot4\frac{1}{20}=\frac{16\cdot81}{3\cdot20}=\frac{4\cdot27}{1\cdot5}=\frac{108}{5}=21\frac{3}{5}.$

✓ $1\frac{2}{5}\cdot4\frac{4}{7}=\frac{7\cdot32}{5\cdot7}=\frac{32}{5}=6\frac{2}{5}.$



Деление

Чтобы **разделить одну обыкновенную дробь на другую**, надо делимое умножить на число, обратное делителю: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$

✓ $\frac{8}{35}:\frac{4}{5}=\frac{8}{35}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2}{7}.$ ✓ $\frac{4}{7}:\frac{8}{21}=\frac{4\cdot21}{7\cdot8}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}.$

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) делимое умножить на число, обратное делителю.

✓ $7\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}=\frac{15}{2}:\frac{5}{2}=\frac{15\cdot2}{2\cdot5}=3.$

✓ $2\frac{3}{5}:1\frac{6}{7}=\frac{13}{5}:\frac{13}{7}=\frac{13}{5}\cdot\frac{7}{13}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}.$

Чтобы выполнить умножение (деление) на натуральное число, это число можно представить в виде неправильной дроби со знаменателем 1: $n=\frac{n}{1}.$

✓ $\frac{3}{7}\cdot14=\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{1}=\frac{3\cdot14}{7\cdot1}=\frac{3\cdot2}{1}=6.$

✓ $2:1\frac{3}{5}=2:\frac{8}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}=1{,}25.$

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби**.

$$a,bcde\ldots=a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\frac{e}{10\,000}+\ldots$$

целая часть

дробная часть

Приведение десятичной дроби к обыкновенной

1) В числителе записать число, стоящее после запятой.

2) В знаменателе записать разрядную единицу (10, 100, 1000 и т. д.), которая содержит столько же нулей, сколько знаков после запятой в десятичной дроби.

✓ $0{,}3=\frac{3}{10}.$ ✓ $0{,}019=\frac{19}{1000}.$

Если десятичная дробь содержит целую часть, то дробь переводят в смешанное число, в котором целую часть записывают перед дробной.

При необходимости получившуюся обыкновенную дробь надо сократить.

✓ $17{,}11 = 17\frac{11}{100}$. ✓ $8{,}2 = 8\frac{2}{10} = 8\frac{1}{5}$.

Приведение обыкновенной дроби к десятичной

★ **Способ 1.**

Домножить числитель и знаменатель дроби так, чтобы в знаменателе получилась разрядная единица.

В случае смешанного числа домножают только дробную часть, а целая часть не меняется.

✓ $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$.

✓ $9\frac{2}{125} = 9\frac{2 \cdot 8}{125 \cdot 8} = 9\frac{16}{1000} = 9{,}016$.

✓ $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$.

★ **Способ 2.**

Разделить числитель на знаменатель «уголком».

✓
$$\begin{array}{r|l} -1{,}0 & 5 \\ \underline{0} & \overline{0{,}2} \\ -10 & \\ \underline{10} & \\ 0 & \end{array}$$

Не каждую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби. **Несократимую обыкновенную дробь** можно перевести в конечную десятичную дробь, если в разложении её знаменателя на простые множители есть только 2 и (или) 5.

СРАВНЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

★ **Способ 1.**

Чтобы сравнить две десятичные дроби, надо сначала уравнять в них число десятичных знаков, приписав к одной из них справа нули, а затем, отбросив запятую, сравнить получившиеся натуральные числа.

✓ Сравним 12,16 и 12,051.

$12{,}16 = 12{,}160$; $12\,160 > 12\,051$.

Тогда $12{,}16 > 12{,}051$.

★ **Способ 2.**

Десятичные дроби сравнивают поразрядно, начиная слева направо.

Целая часть сравнивается с целой, десятые — с десятыми, сотые — с сотыми и т. д.

✓ $1{,}78 < 4{,}1$ $(1 < 4)$.

★ Если дробная часть десятичной дроби оканчивается нулями, то их можно не писать — значение дроби не изменится.
★ Если к дробной части приписать любое число нулей, то значение десятичной дроби не изменится.

✓ $36{,}74 > 36{,}29$ $(7 > 2)$.

✓ $0{,}416 < 0{,}4163$ $(0{,}416 = 0{,}4160$ и $0 < 3)$.

Чтобы сравнить десятичную дробь с обыкновенной, надо обыкновенную дробь представить в виде десятичной, а затем выполнить сравнение. Можно также преобразовать десятичную дробь в обыкновенную и далее уже сравнивать две обыкновенные дроби.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой.

✓ $2{,}35 + 11{,}7 = 14{,}05$

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 11{,}70 \\ 2{,}35 \end{array} \\ \hline 14{,}05 \end{array}$$

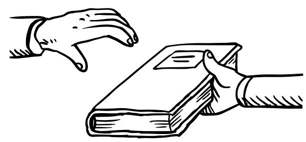
✓ $12 - 10{,}346 = 1{,}654$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 12{,}000 \\ 10{,}346 \end{array} \\ \hline 1{,}654 \end{array}$$

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:
1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

✓ $3{,}25 \cdot 2{,}8 = 9{,}100 = 9{,}1$

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 3{,}25 \\ 2{,}8 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 2600 \\ 650 \end{array} \\ \hline 9{,}100 \end{array}$$



Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:
1) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую;
2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

✓ $70{,}15 : 23 = 3{,}05$

$$\begin{array}{r|l} -70{,}15 & 23 \\ \cline{2-2} 69 & 3{,}05 \\ \cline{1-1} -115 & \\ 115 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) выполнить деление на натуральное число.

✓ $25{,}6 : 0{,}08 = 2560 : 8 = 320$.

✓ $12{,}35 : 2{,}5 = 123{,}5 : 25 = 4{,}94$.

ОКРУГЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Десятичную дробь можно округлить:
★ до определённого разряда дробной части: десятых, сотых, тысячных, десятитысячных и т. д.;
★ до целого числа с точностью до единиц, десятков, сотен и т. д.

Правила округления

1) Найти цифру округляемого разряда.
2) Отделить вертикальной чертой все цифры, стоящие справа от округляемого разряда.
3) Если первая отбрасываемая цифра — 0, 1, 2, 3 или 4, то последняя оставшаяся цифра записывается без изменений, а все цифры после вертикальной черты отбрасываются.

Если первая отбрасываемая цифра — 5, 6, 7, 8 или 9, то к последней оставшейся цифре надо добавить 1, а все цифры после вертикальной черты отбросить.

✓ Округлить до десятых: $37{,}4|\underline{4}9 \approx 37{,}4$.

✓ Округлить до сотых: $0{,}64|\underline{5}1 \approx 0{,}65$.

✓ Округлить до единиц (до целых): $957{,}|\underline{8}02 \approx 958$.

Если при округлении десятичной дроби последняя из оставшихся цифр в дробной части — 0, то отбрасывать этот нуль нельзя. В таком случае нуль в дробной части показывает, до какого разряда округлено число.

✓ Округлить до тысячных: $2{,}849|\underline{6}13 \approx 2{,}850$.

Если десятичную дробь нужно округлить до разряда выше единиц (десятков, сотен и т. д.), то дробная часть отбрасывается, а целая часть округляется по правилам округления натуральных чисел.

✓ Округлить до десятков: $96|\underline{3}{,}806 \approx 960$.

✓ Округлить до сотен: $54|\underline{7}1{,}83 \approx 5500$.

ЗАДАЧИ НА ЧАСТИ И ПРОЦЕНТЫ

Процент — это сотая часть числа. Обозначается знаком «%», используется для выражения доли чего-либо по отношению к целому.

Чтобы выразить целое или дробное число в процентах, надо умножить его на 100 и к полученному результату приписать знак процента (%).

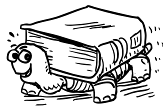
$$\mathbf{1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01}$$

Нахождение части (процента) от числа

★ Чтобы **найти дробь (часть) от числа**, нужно это число умножить на данную дробь.

✓ Найти $\frac{3}{7}$ от 28.

$28\cdot\frac{3}{7}=12.$



✓ Найти $\frac{2}{5}$ от 45.

$45\cdot\frac{2}{5}=18.$

★ Чтобы **найти процент от числа**, нужно данное число умножить на дробь, выражающую указанный процент.

✓ Найти 30 % от 54.

$30\,\%=0{,}3;\ 54\cdot 0{,}3=16{,}2.$

Нахождение числа по его части (проценту)

★ Чтобы **найти число по его части**, выраженной дробью, нужно данное число разделить на эту дробь.

✓ Найти число, если 0,4 его равно 10.

$10:0{,}4=100:4=25.$

★ Чтобы **найти число по его проценту**, нужно данное число разделить на дробь, выражающую указанный процент.

✓ Найти число, 25 % которого составляют 18.

$25\,\%=\frac{1}{4};\ 18:\frac{1}{4}=18\cdot 4=72.$

Нахождение того, какую часть (какой процент) одно число составляет от другого

★ Чтобы найти, **какую часть первое число составляет от второго**, надо первое число разделить на второе (то есть найти отношение чисел).

✓ Какую часть 30 составляет от 25?

$\frac{30}{25}=\frac{6}{5}=1{,}2.$

✓ Какую часть 8 составляет от 12?

$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$

★ Чтобы найти, **сколько процентов первое число составляет от второго**, надо первое число разделить на второе и умножить на 100 % (то есть найти отношение чисел, умноженное на 100 %).

✓ Сколько процентов 12 составляет от числа 60?

$\frac{12}{60}\cdot 100\,\%=\frac{1\cdot 100\,\%}{5}=20.$

ПРОПОРЦИИ

Пропорция — это равенство двух отношений, то есть равенство вида:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \text{или}\ \ a:b=c:d,$$

где *a, d* — крайние члены пропорции; *b, c* — средние члены пропорции.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, то есть $a\cdot d=b\cdot c$.

Неизвестный член пропорции можно найти, пользуясь основным свойством.

★ Крайний член равен произведению средних членов, разделённому на другой крайний член:

$$a=\frac{b\cdot c}{d};\ d=\frac{b\cdot c}{a}.$$

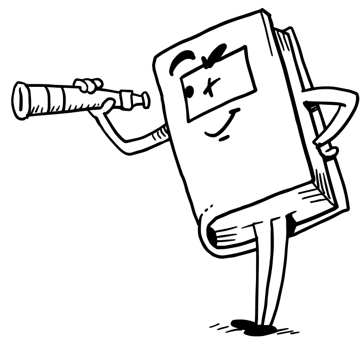
★ Средний член равен произведению крайних членов, разделённому на другой средний член:

$$b=\frac{a\cdot d}{c};\ c=\frac{a\cdot d}{b}.$$

Нахождение процента от числа

Найти $a\,\%$ от числа b.

$$\left.\begin{array}{l} b-100\,\% \\ x-a\,\% \end{array}\right| \Rightarrow \frac{b}{x}=\frac{100}{a} \Rightarrow x=\frac{a\cdot b}{100}.$$



Нахождение числа по его проценту

Найти число, $a\,\%$ которого составляют c.

$$\left.\begin{array}{l} c-a\,\% \\ x-100\,\% \end{array}\right| \Rightarrow \frac{c}{x}=\frac{a}{100} \Rightarrow x=\frac{c\cdot 100}{a}.$$

Целые и рациональные числа

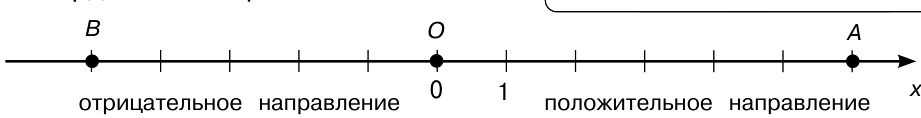
Числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются **противоположными**.

✓ $-a$ — число, противоположное a.

КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

Координатной называется прямая, на которой выбраны начало отсчёта, направление и единичный отрезок. **Координата точки** — число, которое отображает положение точки на координатной прямой.

Противоположные числа изображаются на координатной прямой с разных сторон от начала отсчёта, но на одинаковом расстоянии от него. Число 0 противоположно самому себе.



Отрицательные числа

★ Изображаются точками на отрицательном луче OB.
★ Записываются со знаком «–».

✓ –5 — координата точки *B*.

Записывается: $B(-5)$.

Число нуль (0)

★ Изображается точкой *O*.
★ Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным.

✓ Число 0 — координата точки *O*.

Записывается: $O(0)$.

Положительные числа

★ Изображаются точками на положительном луче *OA*.
★ Записываются без знака или со знаком «+».

✓ 6 — координата точки *A*.

Записывается: $A(6)$.

МОДУЛЬ ЧИСЛА. СВОЙСТВА МОДУЛЯ

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа *a* называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа *a* обозначается $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

★ Модуль любого числа — неотрицательное число: $|a| \geq 0$.

★ Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

★ Величина числа не превышает величину его модуля: $a \leq |a|$.

★ Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

★ Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

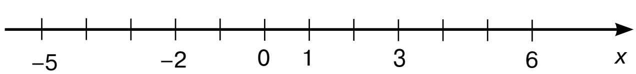
★ Модуль квадрата числа равен квадрату его модуля: $|a^2| = |a|^2$.

★ Модуль суммы не превышает сумму модулей слагаемых: $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Геометрический смысл: модуль числа — это расстояние от начала отсчёта до данного числа.

СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

★ Из двух чисел больше то число, которое на координатной прямой изображается правее.

✓ 

$-5 < -2$; $-2 < 0$; $0 < 3$; $1 > -5$; $3 < 6$.

★ Из двух положительных чисел больше то число, модуль которого больше.

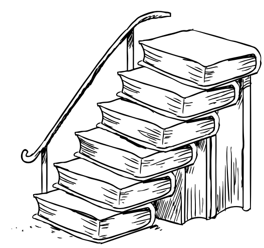
✓ $36\,105 < 63\,105$. ✓ $4{,}058 < 4{,}1$.

✓ $\frac{4}{7} < \frac{7}{4}$. ✓ $7\frac{1}{3} < 8\frac{1}{4}$.

★ Из двух отрицательных чисел больше то число, модуль которого меньше.

✓ $-36\,105 > -63\,105$. ✓ $-4{,}058 > -4{,}1$.

✓ $-\frac{4}{7} > -\frac{7}{4}$. ✓ $-7\frac{1}{3} > -8\frac{1}{4}$.



★ Любое положительное число больше 0.

✓ $24\frac{3}{11} > 0$. ✓ $0{,}000086 > 0$.

★ Любое отрицательное число меньше 0.

✓ $-\frac{4}{19} < 0$. ✓ $-35{,}6 < 0$.

★ Любое положительное число больше любого отрицательного.

✓ $2{,}3 > -2{,}9$. ✓ $-\frac{7}{30} < \frac{11}{67}$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Чтобы определить операции над целыми числами, надо указать модуль и знак числа, полученного в результате выполнения операции.

Сложение

Чтобы **сложить два отрицательных числа**, надо:
1) сложить их модули;
2) поставить перед полученным числом знак «–».

✓ $-2+(-7) = -(2+7) = -9$.

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:
1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

✓ $-5+15 = +(15-5) = 10$. ✓ $-17+11 = -(17-11) = -6$.

Вычитание

Чтобы **из данного числа вычесть другое**, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

✓ $-2-(-5) = -2+5 = 3$. ✓ $8-9 = 8+(-9) = -1$.

Умножение

Чтобы **перемножить два числа с разными знаками**, надо перемножить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».

✓ $10\cdot(-3{,}5)=-35.$ ✓ $-0{,}25\cdot 4=-1.$

Чтобы **перемножить два отрицательных числа**, надо перемножить их модули.

✓ $-7\cdot(-10)=+70=70.$

Деление

Чтобы **разделить два числа с разными знаками**, надо разделить модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».

✓ $140:(-20)=-7.$ ✓ $-6:0{,}2=-60:2=-30.$ ✓ $-7:3=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}.$

Чтобы **разделить два отрицательных числа**, надо разделить их модули.

✓ $-81:(-3)=27.$ ✓ $-5:(-0{,}1)=50:1=50.$ ✓ $-15:\left(-\frac{3}{5}\right)=15\cdot\frac{5}{3}=25.$

Иррациональные и действительные числа

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ И ЕГО СВОЙСТВА

Квадратным корнем (арифметическим квадратным корнем) из неотрицательного числа *a* называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

Символическая запись арифметического квадратного корня: $\sqrt{a}=x$, если $x^2=a$ и $a,\ x\geq 0$.

★ $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geq 0.$

✓ $\left(\sqrt{7}\right)^2=7.$ ✓ $\left(\sqrt{\frac{4}{15}}\right)^2=\frac{4}{15}.$

★ $\sqrt{a^2}=|a|$, a — любое число.

✓ $\sqrt{14^2}=|14|=14.$ ✓ $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3.$

★ Корень произведения равен произведению корней:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ \text{если}\ a\geq 0,\ b\geq 0.$$

✓ $\sqrt{64\cdot 9}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{9}=8\cdot 3=24.$

✓ $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{32\cdot 2}=\sqrt{64}=8.$

★ Корень из дроби — это корень из числителя и корень из знаменателя:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\quad \text{если}\quad a\ge 0,\ b>0.$$

Свойство может быть записано в виде: $\sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b}$.

✓ $\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

✓ $\sqrt{500}:\sqrt{20}=\sqrt{500:20}=\sqrt{25}=5$.

★ $\sqrt{a^{2n}}=a^n$, $a\ge 0$.

✓ $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^8}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{2\cdot 4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$.

✓ $\sqrt{5^6}=\sqrt{5^{2\cdot 3}}=5^3=125$.

★ Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное значение: $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$ при $a\ge 0$.

✓ $\left(\sqrt{2}\right)^4=\sqrt{2^4}=\sqrt{16}=4$.

✓ $\left(\sqrt{0{,}1}\right)^6=\sqrt{0{,}1^6}=\sqrt{0{,}000001}=0{,}001$.

Для нахождения значений квадратных корней можно воспользоваться таблицей квадратов (см. с. 9).

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ НАТУРАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем *n*-й степени $(n\in N,\ n>1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

Свойства корней n-й степени справедливы для $a\ge 0$, $b\ge 0$, $n\ge 2$, $k\ge 2$, $n\in N$, $k\in N$.

★ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

✓ $\sqrt[3]{343\cdot 0{,}125}=\sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{0{,}125}=7\cdot 0{,}5=3{,}5$.

✓ $\sqrt{7\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{66}=\sqrt{\frac{22}{3}\cdot 66}=\sqrt{22\cdot 22}=22$.

★ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

✓ $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{2}{3}$.

✓ $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\frac{256}{8}}=\sqrt[5]{32}=2$.

★ $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

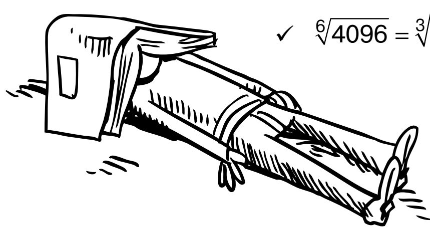
✓ $\sqrt[3]{64^2}=\left(\sqrt[3]{64}\right)^2=4^2=16$.

✓ $\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2=\left(\left(\sqrt[6]{7}\right)^3\right)^2=\left(\sqrt[6]{7}\right)^6=7$.

★ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$.

✓ $\sqrt[3]{\sqrt{0{,}000001}}=\sqrt[6]{0{,}000001}=0{,}1$.

✓ $\sqrt[6]{4096}=\sqrt[3]{\sqrt{4096}}=\sqrt[3]{64}=4$.



СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ И РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степень с целым показателем

$(-n)$-й степенью (n — натуральное число) числа a, не равного нулю, считается число, обратное n-й степени числа a.

$$\boldsymbol{a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0}$$

✓ $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}.$ ✓ $(-2)^{-5}=\frac{1}{(-2)^5}=-\frac{1}{32}.$

Любое число, кроме нуля, в нулевой степени равно единице.

$$\boldsymbol{a^0=1,\ a\neq 0}$$

✓ $7^0=1.$ ✓ $(-4{,}3)^0=1.$ ✓ $\left(\frac{2}{13}\right)^0=1.$

Обыкновенную дробь с отрицательным показателем степени можно заменить на обратную ей дробь с положительным показателем.

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n},\quad a\neq 0,\ b\neq 0}$$

✓ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1}=1\frac{1}{3}.$ ✓ $(0{,}2)^{-3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{1}\right)^{3}=125.$

Степень с рациональным показателем

Пусть $a>0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число $(n\geq 2,\ m\in Z,\ n\in N)$, тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Положительное число a в рациональной степени $\frac{m}{n}$ является арифметическим корнем степени n из числа a в степени m.

✓ $32^{0{,}6}=32^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{32^3}=\left(\sqrt[5]{32}\right)^3=2^3.$ ✓ $27^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{27^{-4}}=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}.$

СРАВНЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для сравнения иррациональных чисел можно пользоваться их десятичными приближениями.

★ Если показатели степени корней одинаковы, а подкоренные выражения различны, то, чем больше подкоренное выражение, тем больше значение корня.

✓ $\sqrt[5]{2{,}4}>\sqrt[5]{2\frac{1}{3}}$, так как $2{,}4>2\frac{1}{3}.$

★ Если подкоренные выражения одинаковы, а показатели степени корней различны, то, чем больше показатель, тем меньше данное выражение.

✓ $\sqrt[9]{2{,}4}<\sqrt[5]{2{,}4}$, так как $9>5.$

★ Если различны и степени корней, и подкоренные выражения, необходимо найти наименьшее общее кратное для показателей корней и возвести оба выражения в степень, равную наименьшему общему кратному. Затем нужно сравнить полученные рациональные числа.

✓ $\sqrt[3]{0,3} < \sqrt{0,5}$, так как $\left(\sqrt[3]{0,3}\right)^6 = 0,3^2 = 0,09$.

✓ $2 > \sqrt[4]{10}$, так как $2^4 = 16$; $\left(\sqrt[4]{10}\right)^4 = 10$.

Данным правилом можно пользоваться для сравнения рационального и иррационального числа.

Вычисление и преобразование выражений

Данный раздел содержит основные сведения о преобразованиях выражений, включающих арифметические операции.

Тождественные преобразования

Тождеством называется равенство, которое верно при всех значениях переменных.

Тождественное преобразование выражения (преобразование выражения) — подмена одних выражений другими, тождественно равными друг другу.

Тождественные преобразования используются для упрощения алгебраических выражений, а также при решении уравнений и неравенств.

Раскрытие скобок в алгебраической сумме

★ Если перед скобками стоит знак «+», то можно опустить скобки и знак «+», сохранив знаки слагаемых, стоящих в скобках.

★ Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «+».

★ Если перед скобками не стоит знак, следует считать, что стоит знак «+».

✓ $m + (-3 - n) = m - 3 - n$.

✓ $5 + (x - 4) = 5 + x - 4 = 1 + x$.

✓ $a - (-b + c) = a + b - c$.

★ Если перед скобками стоит знак «–», надо заменить этот знак на «+», поменяв знаки всех слагаемых в скобках на противоположные, а затем раскрыть скобки.

✓ $7 - (x - y) = 7 - x + y$.

✓ $a - (-b + c) = a + b - c$.

Вынесение общего множителя за скобки

Вынесение общего множителя за скобки — преобразование, при котором исходное выражение представляется в виде произведения общего множителя и выражения в скобках, состоящего из исходных слагаемых без общего множителя.

✓ $4d+4f=4(d+f)$.

✓ $2x^2y-3xy^2=xy(2x-3y)$.

Приведение подобных слагаемых

Слагаемые, имеющие одинаковую буквенную часть, называются **подобными**.

Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

✓ $5c+8c=(5+8)c=13c$.

✓ $-7x-x+10x=(-7-1+10)x=2x$.

✓ $k+5m-2k-9m=(1-2)k+(5-9)m=-k-4m$.

Коэффициент — числовой множитель, стоящий перед буквой или произведением нескольких букв.

Многочлены

ОДНОЧЛЕН. ДЕЙСТВИЯ С ОДНОЧЛЕНАМИ

Произведение числовых и (или) буквенных множителей называется **одночленом**.

✓ $7abc$; $-x^2y$; $m\cdot 0{,}8cd$; z^{12}; $\dfrac{1}{3}$.

Не являются одночленами выражения вида:

$2+x^2$; x^2-4x+5; $7(a-b)^2$; $\dfrac{5}{a}$;

$x^3:2y$; $\dfrac{x^2}{y-5}$; $2a^2-\dfrac{1}{7}xa^4$.

Запись одночлена в стандартном виде

Для записи любого одночлена в стандартном виде надо:

1) перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место;

2) произведение степеней с одинаковыми основаниями записать в виде степени.

✓ $20am\cdot(0{,}5a^3)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)\cdot m=\left(20\cdot 0{,}5\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)\cdot(a\cdot a^3)\cdot(m\cdot m)=-2{,}5a^4m^2$.

Сложение и вычитание одночленов

Складывать и вычитать можно только одночлены с одинаковой буквенной частью. Для этого необходимо привести подобные слагаемые.

✓ $5ck^2-c^2k-2k^2c+9kc^2=\underline{5ck^2}\underline{\underline{-c^2k}}\underline{-2ck^2}\underline{\underline{+9c^2k}}=3ck^2+8c^2k$.

Умножение одночленов

Чтобы выполнить умножение одночленов, надо:
1) раскрыть скобки в выражении;
2) сгруппировать числовые множители и по возможности множители с одинаковыми буквами — отдельно (то есть привести одночлен к стандартному виду).

✓ $(-8x^2yz^5)\cdot(0{,}2xy^7)=-8x^2yz^5\cdot0{,}2xy^7=(-8\cdot0{,}2)\cdot(x^2\cdot x)\cdot(y\cdot y^7)\cdot z^5=-1{,}6x^3y^8z^5.$

Возведение одночлена в натуральную степень

Чтобы возвести одночлен в степень, надо его числовой множитель (коэффициент) возвести в эту степень, а также каждый буквенный множитель возвести в степень.

✓ $(2cd^3)^5=2^5\cdot c^5\cdot(d^3)^5=32c^5d^{15}.$

Деление одночленов

Чтобы выполнить деление одночленов, надо:
1) коэффициент делимого разделить на коэффициент делителя;
2) разделить степени каждого буквенного множителя.

✓ $(18r^{10}st^4):(-3r^8t)=(18:(-3))\cdot(r^{10}:r^8)\cdot s\cdot(t^4:t)=-6r^2st^3.$

▶ МНОГОЧЛЕН. ДЕЙСТВИЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ И ОДНОЧЛЕНАМИ

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

✓ $7abc+x^2y-t.$ ✓ $m\cdot0{,}8cd+3.$ ✓ $z^{12}-\frac{1}{3}.$

Запись многочлена в стандартном виде

Для записи любого многочлена в стандартном виде надо:
1) записать каждый член (слагаемое) в стандартном виде;
2) привести подобные члены (слагаемые).

✓ $6xy\cdot\frac{1}{2}xz-3xzx-8x^2\cdot\frac{1}{4}y+25x^2\cdot0{,}2z+xyx-x^2yz=\underline{3x^2yz}\underline{\underline{-3x^2z}}-2x^2y\underline{\underline{+5x^2z}}+$

$+x^2y\underline{-x^2yz}=2x^2yz+2x^2z-x^2y.$

Сложение и вычитание многочленов

Чтобы сложить (вычесть) многочлены, надо:
1) раскрыть скобки;
2) привести подобные члены.

✓ $(8ab+5b^2-3)+(b^2-15ab)=\underline{8ab}\underline{\underline{+5b^2}}-3\underline{\underline{+b^2}}\underline{-15ab}=-7ab+6b^2-3.$

✓ $(nk+6)-(-14+2nk)=\underline{nk}\underline{\underline{+6}}\underline{\underline{+14}}\underline{-2nk}=-nk+20.$

Умножение многочлена на одночлен

Чтобы умножить многочлен на одночлен, надо:
1) каждый член многочлена умножить на этот одночлен;
2) полученные произведения упростить и сложить.

✓ $(2p^2r+3pr^2)\cdot(3pr)=(2p^2r)\cdot(3pr)+(3pr^2)\cdot(3pr)=6p^3r^2+9p^2r^3.$

✓ $(7a-3b)\cdot(-4c)=(7a)\cdot(-4c)+(-3b)\cdot(-4c)=-28ac+12bc.$

Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо:
1) каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена;
2) полученные произведения упростить и сложить.

✓ $(7x-2y)(3x-5y)=(7x)\cdot(3x)+(7x)\cdot(-5y)+(-2y)\cdot(3x)+(-2y)\cdot(-5y)=21x^2\underline{-35xy}\underline{-6xy}+$

$+10y^2=21x^2-41xy+10y^2.$

Деление многочлена на одночлен

Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо:
1) каждый член многочлена разделить на этот одночлен;
2) полученные результаты упростить и сложить.

✓ $(2a^2b+4ab^2+8abc):(2ab)=(2a^2b):(2ab)+(4ab^2):(2ab)+(8abc):(2ab)=a+2b+4c.$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

★ Квадрат суммы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

★ Квадрат разности: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

★ Разность квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

На множестве действительных чисел сумму квадратов a^2+b^2 нельзя представить в виде произведения.

★ Куб суммы: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

★ Куб разности: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

★ Разность кубов: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

★ Сумма кубов: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

СПОСОБЫ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Разложение многочленов на множители используется при сокращении алгебраических дробей, при решении уравнений и неравенств.

★ Вынесение общего множителя за скобки.

✓ $6a+3ab=3a(2+b).$

✓ $5y^9-6y^6+y^3=y^3(5y^6-6y^3+1).$

★ **Способ группировки.** Некоторые многочлены содержат группу слагаемых, имеющих общий множитель. Такие группы можно заключать в скобки и далее выносить общий множитель за эти скобки.

✓ $7x+ax+7y+ay=(7x+7y)+(ax+ay)=7(x+y)+a(x+y)=(x+y)(7+a)$.

✓ $m^2-3m-mk+3k=(m^2-mk)+(-3m+3k)=m(m-k)-3(m-k)=(m-k)(m-3)$.

★ Использование формул сокращённого умножения.

✓ $49d^2-1=(7d)^2-1^2=(7d-1)(7d+1)$.

✓ $9a^2-12ab+4b^2=(3a)^2-2\cdot(3a)\cdot(2b)+(2b)^2=(3a-2b)^2$.

★ Применение нескольких способов разложения на множители.

✓ $t^2+2t+1-25s^2=(t^2+2\cdot t\cdot 1+1^2)-25s^2=(t+1)^2-(5s)^2=(t+1-5s)(t+1+5s)$.

Алгебраические дроби

Дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами (причём знаменатель отличен от нуля), называется **алгебраической (рациональной)**.

Любой многочлен (в частности, одночлен или число) можно представить в виде алгебраической дроби со знаменателем 1.

✓ $15y+7=\frac{15y+7}{1}$. ✓ $8cd=\frac{8cd}{1}$.

ОПЕРАЦИИ И ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

Сокращение

Сокращение алгебраической дроби — деление её числителя и знаменателя на общий множитель. Им может быть многочлен, в частности одночлен или число.

✓ $$\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}=\frac{x^2-5^2}{x^2-2\cdot 5\cdot x+5^2}=\frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{(x-5)^{\cancel{2}}}=\frac{x+5}{x-5}.$$

Сложение и вычитание

Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) числители, а знаменатель оставить без изменения.

✓ $$\frac{3x}{x+2}+\frac{x+8}{x+2}=\frac{3x+(x+8)}{x+2}=\frac{3x+x+8}{x+2}=\frac{4x+8}{x+2}=\frac{4\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=4.$$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно привести дроби к общему знаменателю, а затем сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями.

✓ $$\frac{3m-11k^2}{k}+11k=\frac{3m-11k^2}{k}+\frac{11k}{1}=\frac{3m-11k^2}{k}+\frac{11k^2}{k}=\frac{3m-11k^2+11k^2}{k}=\frac{3m}{k}.$$

Умножение

Чтобы умножить алгебраические дроби, необходимо умножить их числители (это будет числитель произведения) и умножить их знаменатели (это будет знаменатель произведения).

Прежде чем выполнять умножение числителей и знаменателей, необходимо разложить многочлены на множители. Затем, если возможно, нужно сократить дробь.

✓ $(b+3)\cdot\frac{b-3}{b^2+6b+9}=(b+3)\cdot\frac{b-3}{(b+3)^2}=\frac{(b+3)(b-3)}{(b+3)^2}=\frac{b-3}{b+3}.$

Деление

Чтобы разделить алгебраические дроби, необходимо первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Для получения обратной дроби надо поменять местами числитель и знаменатель.

✓ $\frac{m-18y}{m}:\frac{18y^2-my}{m^2}=\frac{m-18y}{m}:\frac{y(18y-m)}{m^2}=\frac{(m-18y)m^2}{m\cdot y(18y-m)}=\frac{-(18y-m)m^2}{m\cdot y(18y-m)}=-\frac{m}{y}.$

✓ $\frac{x-y}{3}:\left(x^2-2xy+y^2\right)=\frac{x-y}{3}\cdot\frac{1}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x-y}{3}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)\cdot 1}{3(x-y)^2}=\frac{1}{3(x-y)}=\frac{1}{3x-3y}.$

Возведение в натуральную степень

Чтобы возвести алгебраическую дробь в степень с натуральным показателем, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель дроби.

✓ $\left(\frac{4z+1}{7xy^3}\right)^2=\frac{(4z+1)^2}{\left(7xy^3\right)^2}=\frac{16z^2+8z+1}{49x^2y^6}.$

Выполнение нескольких действий

Если выражение содержит несколько действий с алгебраическими дробями, то действия выполняются в том же порядке, что и действия с натуральными числами.

✓ $\frac{m^2-36n^2}{6mn}:\left(\frac{1}{6n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{(m-6n)(m+6n)}{6mn}:\frac{m-6n}{6mn}=\frac{(m-6n)(m+6n)\cdot 6mn}{6mn\cdot(m-6n)}=m+6n.$

Иррациональные выражения

Выражения, содержащие корень, который нельзя извлечь, называются **иррациональными**.

✓ $\sqrt{11}$; $\sqrt[3]{20x}$; $\frac{5a-b}{\sqrt{c}}$.

Для упрощения иррациональных выражений применяют свойства корней.

ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вынесение множителя из-под знака корня

Вынесение множителя из-под знака корня — преобразование, которое представляет собой замену выражения $\sqrt[n]{A^n \cdot B}$ на выражение $A \cdot \sqrt[n]{B}$, если n — нечётное число, и на выражение $|A| \cdot \sqrt[n]{|B|}$, если n — чётное число.

✓ $\sqrt[3]{0{,}0081} = \sqrt[3]{0{,}027 \cdot 0{,}3} = 0{,}3\sqrt[3]{0{,}3}$.

✓ $\sqrt{(x+1)^2 \cdot 3} = |x+1|\sqrt{3}$.

Внесение множителя под знак корня

Внесение множителя под знак корня представляет собой преобразование произведения $A \cdot \sqrt[n]{B}$ в выражение $\sqrt[n]{A^n \cdot B}$ или $-\sqrt[n]{A^n \cdot B}$.

✓ $2\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 4} = \sqrt[5]{32 \cdot 4} = \sqrt[5]{128}$.

✓ $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$.

✓ $-4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-4)^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{-64 \cdot 5} = \sqrt[3]{-320}$.

✓ $-3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{3^4 \cdot 2} = -\sqrt[4]{81 \cdot 2} = -\sqrt[4]{162}$.

Исключение (освобождение от) иррациональности в знаменателе

Для исключения иррациональности в знаменателе надо:

1) умножить числитель и знаменатель дроби на такое не равное нулю иррациональное число (выражение), чтобы из произведения в знаменателе можно было бы извлечь корень;

2) преобразовать выражение, получившееся в знаменателе.

$$\boldsymbol{\frac{a}{b\sqrt[n]{y}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{y^{n-1}}}{b\sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{y^{n-1}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{y^{n-1}}}{by}}$$

✓ $\dfrac{7}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{4}}{2}$.

✓ $\dfrac{1}{\sqrt{x}-6} = \dfrac{1 \cdot \left(\sqrt{x}+6\right)}{\left(\sqrt{x}-6\right) \cdot \left(\sqrt{x}+6\right)} = \dfrac{\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 6^2} = \dfrac{\sqrt{x}+6}{x-36}$.

Умножение числителя и знаменателя на сопряжённое иррациональное выражение:

$$\frac{a}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} = \frac{a\left(\sqrt{x} \mp \sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x} \pm \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} \mp \sqrt{y}\right)} = \frac{a\left(\sqrt{x} \mp \sqrt{y}\right)}{x-y}.$$

Логарифмические выражения

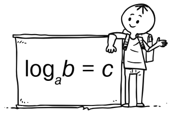
Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* $(a > 0,\ a \neq 1)$ называют такое число c, что $b = a^c$. Обозначение: $\log_a b$.

Десятичный логарифм: $\log_{10} b = \lg b$.

Натуральный логарифм: $\log_e b = \ln b$, где $e \approx 2{,}7$.

Для десятичных и натуральных логарифмов справедливы все перечисленные ниже свойства.

Логарифм числа



ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА, ФОРМУЛЫ
($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $r \in R$, $p \in R$)

★ Следствия из определения: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.

✓ $\log_{12} 12 = 1$. ✓ $\log_7 1 = 0$.

★ Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

✓ $5^{\log_5 18} = 18$. ✓ $36^{\log_6 3} = \left(6^2\right)^{\log_6 3} = \left(6^{\log_6 3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

★ Логарифм произведения: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

✓ $\log_2 (32 \cdot 128) = \log_2 32 + \log_2 128 = 5 + 7 = 12$.

✓ $\log_7 5 + \log_7 0{,}2 = \log_7 (5 \cdot 0{,}2) = \log_7 1 = 0$.

★ Логарифм частного: $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

✓ $\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3 = \log_{0,3} \left(\dfrac{10}{3}\right) = -1$. ✓ $\log_2 13 - \log_2 \dfrac{13}{16} = \log_2 \left(13 : \dfrac{13}{16}\right) = \log_2 16 = 4$.

★ Логарифм степени:

$\log_a b^p = p \cdot \log_a b$. ✓ $\log_{13} \sqrt{13} = \log_{13} 13^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_{13} 13 = 0{,}5$.

$\log_{a^r} b = \dfrac{1}{r} \log_a b$. ✓ $\log_4 8 = \log_{2^2} 8 = \dfrac{1}{2} \log_2 8 = \dfrac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$.

$\log_{a^r} b^p = \dfrac{p}{r} \log_a b$. ✓ $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{125} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{-3} = \dfrac{-3}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = -6$.

★ Формула перехода к другому основанию:

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$. ✓ $\dfrac{\log_2 36}{\log_2 6} = \log_6 36 = 2$.

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $b \neq 1 \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$. ✓ $\log_3 5 \cdot \log_5 3 = 1$.

★ Представление числа в виде логарифма по определённому основанию: $t = \log_a a^t$.

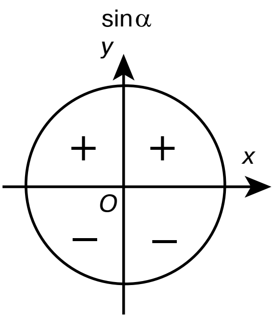
✓ $5 = \log_2 2^5 = \log_2 32$. ✓ $-2 = \log_3 3^{-2} = \log_3 \dfrac{1}{9}$.

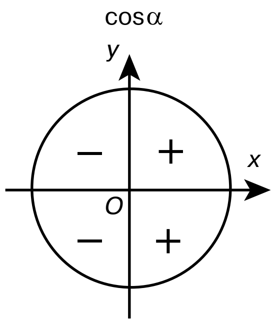
Тригонометрические выражения

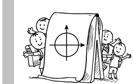
Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат *xOy*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА УГЛА

Синусом угла α (sin α) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.





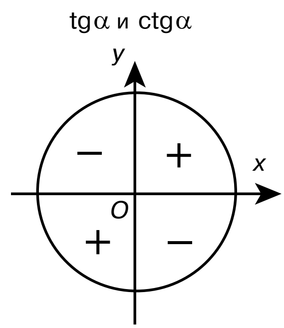


Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

Косинусом угла α (cos α) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Тангенсом угла α (tg α) называется отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенсом угла α (ctg α) называется отношение косинуса угла к его синусу.



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС УГЛА. ГРАДУСНАЯ И РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—