Содержание

От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2023. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №16 (планиметрия) и №18 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Глава I

Решения к тестам

Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.

Д. Юнг

Тест №1

12. а) Решите уравнение $2\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)\cdot\sin(-x)+\cos x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2};5\pi\right].$

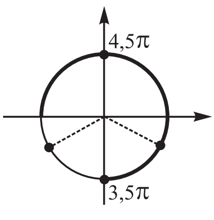
Решение.

а) По формуле приведения $\sin\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x,$ поэтому исходное уравнение преобразуется к виду:

$$-2\cos x\cdot\sin x=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Решением уравнения $\cos x=0$ являются $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,$ где $n\in Z.$ Решением уравнения $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ являются $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ где $n\in Z.$

б) Отметим на тригонометрической окружности дугу $[3{,}5\pi;5\pi]$ и точки $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,$ $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ где $n\in Z,$ см. рисунок.



Из отмеченных точек в отрезок $[3{,}5\pi; 5\pi]$ попадают точки $x = 3{,}5\pi$, $x = 4\pi - \dfrac{\pi}{6}$, $x = 4{,}5\pi$.

Ответ: а) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\dfrac{7\pi}{2}, \dfrac{23\pi}{6}, \dfrac{9\pi}{2}.$

13. Основанием правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC. На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 — середина отрезка AD. На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что C_1 — середина отрезка B_1E.

а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE, если $AB = 7$, $AA_1 = 9$.

Решение.

а) Так как $A_1B_1 = B_1C_1$ и C_1 — середина B_1E, то $B_1E = 2A_1B_1$. Поскольку $\angle A_1B_1E = 60^\circ$, то из равенства $B_1E = 2A_1B_1$ следует, что $\dfrac{A_1B_1}{B_1E} = \dfrac{1}{2} = \cos\angle A_1B_1E$ и, значит, $\triangle A_1B_1E$ — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A_1, см. рисунок 1.

Отрезок A_1E — проекция отрезка DE на плоскость $A_1B_1C_1$, и поскольку $A_1B_1 \perp A_1E$, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1B_1 \perp DE$, что и требовалось доказать.

рис. 1

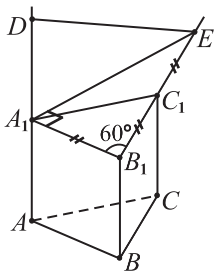
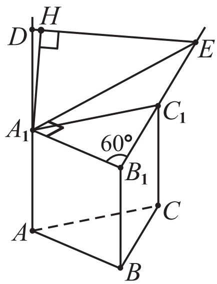


рис. 2



б) Покажем, что $A_1B_1 \perp A_1DE$ (прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости A_1DE). В самом деле, $A_1B_1 \perp A_1D$ — по условию, $A_1B_1 \perp A_1E$ — доказано в пункте а), отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1B_1 \perp A_1DE$.

Так как $AB \parallel A_1B_1$, то $AB \perp ADE$. Поэтому расстояние между прямыми AB и DE равно длине перпендикуляра из точки A к прямой DE. А поскольку $AD = 2A_1D$, то эта искомая длина перпендикуляра равна $2A_1H$, где A_1H — перпендикуляр к DE, см. рисунок 2.

Длину отрезка A_1H найдём, выразив двумя способами площадь прямоугольного $\triangle A_1DE$: $2S_{A_1DE} = A_1D\cdot A_1E = A_1H\cdot DE \;\Rightarrow\; A_1H = = \dfrac{A_1D\cdot A_1E}{DE}$. Проведём вычисления: $A_1E = A_1B_1\cdot \operatorname{tg}60^\circ = 7\sqrt{3}$, $DE^2 = A_1E^2 + A_1D^2 = \left(7\sqrt{3}\right)^2 + 9^2 = 228$, $DE = \sqrt{228} = 2\sqrt{57}$.
Итак, $A_1H = \dfrac{9\cdot 7\sqrt{3}}{2\sqrt{57}}$, а искомая величина равна $2A_1H = \dfrac{63}{\sqrt{19}}$.

Ответ: б) $\dfrac{63}{\sqrt{19}}$

14. Решите неравенство $\dfrac{23}{3^x-243} \geqslant \dfrac{2}{3^x-27}$.

Решение.

Введём новую неизвестную $t = 3^x$ и преобразуем данное в условии неравенство: $\dfrac{23}{t-243} - \dfrac{2}{t-27} \geqslant 0$, $\dfrac{23(t-27)-2(t-243)}{(t-243)(t-27)} \geqslant 0$, $\dfrac{21t-135}{(t-243)(t-27)} \geqslant 0$, $\dfrac{7t-45}{(t-243)(t-27)} \geqslant 0$. По методу интервалов получаем, что решением этого неравенства являются $t \in \left[\dfrac{45}{7}; 27\right) \cup (243; +\infty)$. Возвращаясь к неизвестной x имеем:

$$\frac{45}{7} \leqslant 3^x < 27 \;\text{ или }\; 3^x > 243 \;\Leftrightarrow\; \log_3\frac{45}{7} \leqslant x < 3 \;\text{ или }\; x > 5.$$

Ответ: $x \in \left[\log_3\dfrac{45}{7}\,; 3\right) \cup (5; +\infty)$

15. Страховая компания положила в банк некоторую сумму денег под 10% годовых для обеспечения страховых выплат. Какова была эта сумма (в рублях), если она оказалась полностью истрачена за три года на следующие выплаты: 880000 рублей в конце первого года, 605000 рублей в конце второго года и 1331000 рублей в конце третьего года (все выплаты производились после начисления банком процентов).

Решение.

Пусть X – искомая сумма, измеряемая в тысячах рублей. Тогда в конце первого года после начисления банком процентов на счёте компании было $1{,}1X$ тыс. руб., а после страховых выплат осталось $1{,}1X - 880$ тыс. руб. Далее действуя аналогично, получим, что в конце второго года после выплат осталось $1{,}1\cdot(1{,}1X - 880) - 605$ тыс. руб., а в конце третьего года после выплат осталось $1{,}1\cdot(1{,}1\cdot(1{,}1X-880)-605)-1331$ тыс. руб., что по условию составило 0 руб. Таким образом, имеем следующее уравнение: $1{,}1\cdot(1{,}1\cdot(1{,}1X-880)-605)=1331 \Rightarrow 1{,}1\cdot(1{,}1X-880)-605=\dfrac{1331}{1{,}1}$ $\Rightarrow 1{,}1X-880=\dfrac{1331}{1{,}1^2}+\dfrac{605}{1{,}1} \Rightarrow X=\dfrac{1331}{1{,}1^3}+\dfrac{605}{1{,}1^2}+\dfrac{880}{1{,}1},\ X=\dfrac{1331}{1{,}331}+$ $+\dfrac{605}{1{,}21}+\dfrac{880}{1{,}1}=1000+500+800=2300.$

Ответ: 2300000

Примечание. Если имеется вклад на X руб., который полностью расходуется за n ежегодных выплат, равных $v_1, v_2, \dots, v_n$, осуществляемых после начисления банком p процентов по вкладу, то, как несложно усмотреть из выкладок приведённого выше решения, для величины X имеет место равенство: $X=\dfrac{v_1}{1+0{,}01p}+\dfrac{v_2}{(1+0{,}01p)^2}+\dots+\dfrac{v_n}{(1+0{,}01p)^n}$.

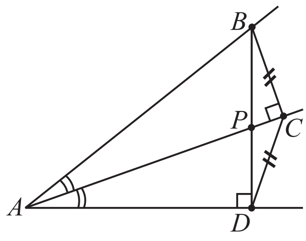
16. На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B. Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно, P — точка пересечения прямых BD и AC.

а) Докажите, что $\dfrac{1}{CD^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BP^2}$.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника $ABCD$ к площади треугольника ABP, если $\cos\angle BAC=\dfrac{5}{6}$.

Решение.

а) Так как $\angle ACB=90^\circ$ и $\angle ADB=90^\circ$, то точки C и D лежат на окружности, построенной на отрезке AB, как на диаметре. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в эту окружность, а поскольку $\angle BAC=\angle DAC$, то равны дуги окружности, на которые опираются эти углы, и, значит, равны отрезки, стягивающие эти дуги, т.е. $CD=BC$, см. рисунок.



Поэтому равенство, которое нам требуется доказать, можно преобразовать к виду: $\dfrac{1}{BC^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{BP^2}$, $\dfrac{AB^2-BC^2}{BC^2\cdot AB^2}=\dfrac{1}{BP^2}$. По теореме Пифагора из $\triangle ABC$ имеем: $AB^2-BC^2=AC^2$. Отсюда следует, что наше равенство равносильно равенству: $\dfrac{AC^2}{BC^2\cdot AB^2}=\dfrac{1}{BP^2}$, $\dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{BC^2}{BP^2}$. Осталось лишь заметить, что $\dfrac{AC^2}{AB^2}=\cos^2\angle BAC$, $\dfrac{BC^2}{BP^2}=\cos^2\angle CBP$, и $\angle BAC=\angle CAD=\angle CBP$ ($\angle CAD=\angle CBD$ — как опирающиеся на одну и ту же дугу). Итак, $\dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{BC^2}{BP^2}$, что доказывает требуемое равенство.

б) Пусть $AB=1$, $\angle BAC=\alpha$. Тогда $BC=\sin\alpha$, а из прямоугольных треугольников BCP и ABD имеем: $CP=BC\cdot\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $AD=AB\cdot\cos 2\alpha=\cos 2\alpha$ (см. рисунок). Из $\triangle ADP$ имеем: $AP=$ $=\dfrac{AD}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$. Для удвоенной площади треугольников ABP и ABD получаем такие выражения: $2S_{ABP}=AB\cdot AP\cdot\sin\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$, $2S_{ABD}=AB\cdot AD\cdot\sin 2\alpha=\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha$. Отсюда для отношения площадей $\triangle ABD$ и $\triangle ABP$ имеем: $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ABP}}=\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha:\dfrac{\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ $=\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos^2\alpha$.

Далее заметим, что $\dfrac{S_{BCD}}{S_{ABD}}=\dfrac{CP}{AP}$ (если провести высоты CK и AH этих треугольников, то $\dfrac{CK}{AH}=\dfrac{CP}{AP}$ в силу подобия $\triangle CPK$ и $\triangle APH$). Значит, $\dfrac{S_{BCD}}{S_{ABD}}=\dfrac{CP}{AP}=\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha:\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=$ $=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$, и $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABD}}=\dfrac{S_{ABD}+S_{BCD}}{S_{ABD}}=1+\dfrac{S_{BCD}}{S_{ABD}}=1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}=$ $=1+\dfrac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=\dfrac{\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

Таким образом, $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABP}}=\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABD}}\cdot\dfrac{S_{ABD}}{S_{ABP}}=\dfrac{\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}\cdot 2\cos^2\alpha=$ $=\dfrac{2\cos^4\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$. Если $\cos\alpha=\dfrac{5}{6}$, то для искомого отношения $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABP}}$ имеем: $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{ABP}}=2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^4:\left(2\cdot\dfrac{25}{36}-1\right)=\dfrac{625}{18\cdot 36}\cdot\dfrac{18}{7}=\dfrac{625}{252}$.

Ответ: б) $\dfrac{625}{252}$

17. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x^2+a^2-7x-3a| = x+a$ имеет четыре решения.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:

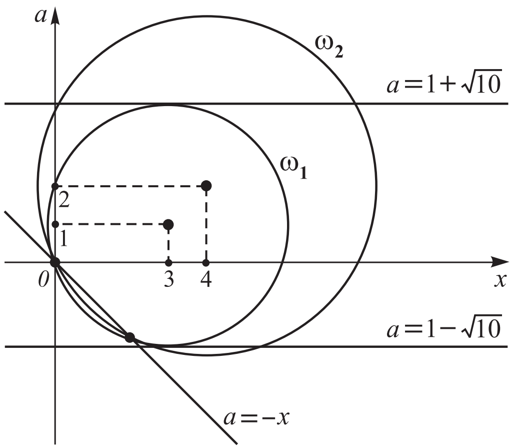
$$\begin{cases} x+a \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+a^2-7x-3a = -x-a \\ x^2+a^2-7x-3a = x+a \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant -x \\ \left[\begin{array}{l} (x-3)^2+(a-1)^2 = 10 \\ (x-4)^2+(a-2)^2 = 20. \end{array} \right. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности, входящей в эту систему, задаёт в координатной плоскости $(x;a)$ окружность ω_1 с центром в точке $O_1(3;1)$ радиуса $\sqrt{10}$; второе уравнение этой совокупности задаёт окружность ω_2 с центром в точке $O_2(4;2)$ радиуса $2\sqrt{5}$; условие $a \geqslant -x$ задаёт множество точек $(x;a)$, расположенных не ниже прямой $a=-x$. Прямую $a=-x$ обозначим через l.

Заметим, что прямая l $(x+a=0)$ имеет с каждой из окружностей ω_1 и ω_2 пару общих точек, координаты которых являются решением системы:

$$\begin{cases} x+a=0 \\ x^2+a^2-7x-3a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x \\ 2x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0, a=0 \text{ и } x=2, a=-2.$$

Поэтому окружности ω_1, ω_2 и прямая l расположены друг относительно друга именно так, как показано на рисунке ниже.



Чтобы при некотором фиксированном $a = a_0$ данное в условии уравнение имело четыре решения, необходимо и достаточно, чтобы прямая $a = a_0$ пересекала каждую из окружностей ω_1 и ω_2 в двух точках, расположенных не ниже прямой l. Проводя прямые $a = 1 - \sqrt{10}$ и $a = 1 + \sqrt{10}$, которые являются касательными к окружности ω_1, видим, что прямая $a = a_0$ пересекает окружность ω_1 в двух точках, лежащих выше прямой l в том случае, если $1 - \sqrt{10} < a_0 < -2$ и $0 < a_0 < 1 + \sqrt{10}$. А поскольку каждая из этих прямых пересекает также в двух точках окружность ω_2, то эти значения a являются искомыми.

Ответ: $a \in \left(1 - \sqrt{10}; -2\right) \cup \left(0; 1 + \sqrt{10}\right)$

18. Имеется три коробки, в первой из которых лежит 55 камней, во второй — 65 камней, а третья — пустая. За один ход разрешается взять по одному камню из любых двух непустых коробок и положить в оставшуюся коробку.

а) Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы число камней в первой коробке было равно 55, во второй — 5, а в третьей — 60?

б) Можно ли добиться того, чтобы все 120 камней лежали в третьей коробке?

в) После нескольких ходов в первой коробке оказалось три камня. Какое наибольшее число камней могло при этом оказаться в третьей коробке?

Решение.

а) Заметим, что если дважды переложить по камню из первой и второй коробок в третью, а затем один раз переложить по камню из 2-ой и 3-ей коробок в 1-ую, то число камней в 1-ой коробке не изменится $(-1-1+2=0)$, во 2-ой коробке станет на 3 камня меньше $(-1-1-1=-3)$, а в 3-ей коробке станет на 3 камня больше $(2+2-1=3)$. Если такую последовательность из трёх ходов повторить ещё 19 раз, т.е. всего сделать 20 таких операций из трёх ходов каждая, то в 1-ой коробке останется 55 камней, число камней во 2-ой коробке станет равно $65-20\cdot 3=5$, а в 3-ей коробке будет $0+20\cdot 3=60$ камней. Поэтому ответ в пункте а) положительный.

Обратим внимание (это понадобится нам в пункте в), что если в каждой из коробок не меньше трёх камней, то можно провести аналогичную операцию из трёх ходов, после которой число камней в любой выбранной коробке останется прежним, в другой выбранной коробке — уменьшится на 3, а в оставшейся коробке увеличится на 3. Например, чтобы оставить неизменным число камней во 2-ой коробке, уменьшить на 3 число камней в 1-ой коробке и увеличить на 3 число камней в 3-ей коробке, нужно дважды переложить по камню из первой и второй коробок в третью, а затем один раз переложить по камню из 1-ой и 3-ей коробок во 2-ую.

б) Заметим, что первоначально остаток от деления на 3 числа камней в коробке различен для всех трёх коробок: $55 \equiv 1 \pmod 3$, $65 \equiv 2 \pmod 3$, $0 \equiv 0 \pmod 3$. (Общепринятая сокращённая запись $a \equiv b \pmod k$ означает, что целые числа a и b имеют одинаковый остаток при делении на натуральное число k.) А поскольку при любом ходе разность между числом камней в любых двух коробках либо не изменяется, либо изменяется на 3 $(-1-(-1)=0,\ \ 2-(-1)=3,\ \ -1-2=-3)$, то остатки от деления на 3 числа камней в любых двух коробках остаются всё время различными. Поэтому не может оказаться так, что в какой-то момент 1-ая и 2-ая коробки пустые (иначе остаток от деления на 3 числа камней в этих коробках был бы одинаков). Значит, добиться того, чтобы все 120 камней оказались в 3-ей коробке, невозможно.

в) Заметим, что первоначально разность между остатками от деления на 3 числа камней во второй и первой коробках равна 1, а далее эта разность остатков от деления 3 не изменяется. Поэтому если в первой коробке оказалось 3 камня (остаток 0 при делении на 3), то минимальное число камней во второй коробке равно 1, при этом в третьей коробке будет не больше, чем $120-3-1=116$ камней.

Приведём пример, показывающий, что такая ситуация действительно реализуется. Первым ходом переложим по камню из 1-ой и 2-ой коробок в 3-ю, количества камней в коробках станут такими: $54, 64, 2$. Затем совершим 20 раз операцию из трёх ходов, описанную в пункте а), при которой число камней в 1-ой коробке не меняется, во 2-ой коробке — уменьшается на 3, а в 3-ей коробке — увеличивается на 3. После этого количества камней в коробках будут такими: $54, 4, 62$. А затем совершим 17 раз операцию из трёх ходов, при которой число камней во 2-ой коробке не меняется, в 1-ой коробке — уменьшается на 3, а в 3-ей коробке — увеличивается на 3, при этом количества камней в коробках станут такими: $3, 4, 113$. И, наконец, совершим одну операцию из трёх ходов, уменьшающую на 3 число камней во 2-ой коробке и увеличивающую на 3 число камней в третьей коробке, получив требуемое число камней в коробках: $3, 1, 116$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 116.

Примечание. Заметим, что при ответе на вопрос пункта б) неявно использовался *«метод инварианта»*. А именно, было установлено, что для любых двух коробок разность остатков от деления на 3 числа камней в этих коробках остаётся неизменной, т.е. является *«инвариантом»*. И поскольку первоначально остатки от деления на 3 числа камней в коробках различны для всех трёх коробок, то они будут различными после любого хода.

Тест № 3

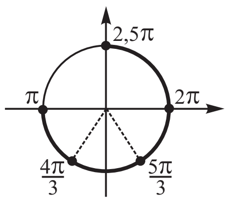
12. а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin x + \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользовавшись формулой $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, преобразуем данное уравнение к виду: $(2\sin x + \sqrt{3}\,)\cdot\cos x - (2\sin x + \sqrt{3}\,) = 0$, $(2\sin x + \sqrt{3}\,)\cdot(\cos x - 1) = 0$. Произведение двух множителей равно нулю в том и только том случае, если один из них равен нулю, поэтому $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ или $\cos x - 1 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos x = 1$. Корнями уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ являются $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$, а корнями уравнения $\cos x = 1$ являются $x = 2\pi n$, где $n \in Z$.

б) Отметим на тригонометрической окружности дугу $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ и точки $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $x = 2\pi n$, см. данный ниже рисунок. Из отмеченных точек на дугу $[\pi; 2{,}5\pi]$ попадают точки $x = \frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{3}$, $x = 2\pi$.



Ответ: а) $x = 2\pi n, x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.