Содержание

От авторов

Данная книга состоит из пяти параграфов. В § 1 содержатся решения заданий второй части тестов с нечётными номерами книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2023». В § 2 и § 3 даны краткие решения и указания к некоторым из заданий 24 и 25 тестов с чётными номерами (краткие решения и указания даны лишь к тем заданиям тестов с чётными номерами, которые существенно отличаются от соответствующей задачи предшествующего теста с нечётным номером). В § 4 приведены решения всех задач с нечётными номерами из задачника этой книги. А в § 5 дана подборка геометрических утверждений, составленных по мотивам заданий №19 тестов книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2023», истинность которых необходимо подтвердить или опровергнуть.

Основная цель данного пособия — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по математике. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Хотя на экзамене при оформлении решений достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «таким образом», «так как..., то...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении – вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем вам успехов!

§ 1. Решения задач учебно-тренировочных тестов

Тест №1

20 Решите неравенство $2\sqrt{7}(12-5x)+3\sqrt{3}(5x-12)\geqslant 0$.

Решение.

Вынесем за скобки общий множитель $5x-12$, при этом наше неравенство преобразуется следующим образом: $(5x-12)\cdot(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})\geqslant 0$. Заметим, что $3\sqrt{3}<2\sqrt{7}$ (так как $(3\sqrt{3})^2=27$, $(2\sqrt{7})^2=28$). Поэтому $3\sqrt{3}-2\sqrt{7}<0$ и, значит, данное неравенство равносильно неравенству $5x-12\leqslant 0$, $x\leqslant 2{,}4$.

Ответ: $x\in(-\infty;2{,}4]$

21 В одном из отелей цена за номер категории «Люкс» на 60% выше, чем за номер категории «Стандарт». На сколько процентов номер категории «Стандарт» дешевле, чем номер категории «Люкс»?

Решение.

Пусть p — цена за номер категории «Стандарт». Тогда цена за номер категории «Люкс» равна $p+0{,}6p=1{,}6p$. Число процентов, которые составляет цена номера «Стандарт» от цены номера «Люкс», равно $\frac{p}{1{,}6p}\cdot 100\%=\frac{100}{1{,}6}\%=62{,}5\%$. Таким образом, номер «Стандарт» дешевле, чем номер «Люкс» на $100\%-62{,}5\%=37{,}5\%$.

Ответ: $37{,}5$

22 Прямая $y=4x$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции $y=x^2+2px+36$. Найдите p.

Решение.

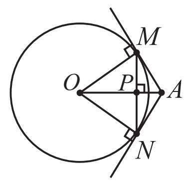
Данные в условии прямая и график имеют ровно одну общую точку $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ уравнение $4x=x^2+2px+36$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ дискриминант трёхчлена $x^2+(2p-4)x+36$ равен нулю. Произведём вычисления: $D=(2p-4)^2-4\cdot 36=0$, $(p-2)^2-36=0$, $p^2-4p-32=0$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $p=-4$ или $p=8$.

Ответ: $p=-4$ или $p=8$

23 Дана окружность с центром в точке O и точка A, лежащая вне этой окружности. Из точки A проведены две прямые, которые касаются этой окружности в точках M и N. Найдите радиус данной окружности, если $AO = 50$, $MN = 48$ и дополнительно известно, что $AM < OM$.

Решение.

1) Пусть P — точка пересечения отрезков AO и MN, см. рисунок.



Так как OM и ON– радиусы к точкам касания, то $\angle OMA = \angle ONA = 90°$. Треугольники AOM и AON равны, как прямоугольные треугольники с равной гипотенузой. Следовательно, AP– биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника и, значит, AP– медиана и высота треугольника AMN.

2) $MP = PN = \frac{1}{2}MN = 24$. Пусть $OP = x$, тогда $AP = AO - OP = 50 - x$. Как известно, квадрат высоты прямоугольного треугольника равен произведению отрезков, на которые высота делит гипотенузу. Поэтому $MP^2 = AP \cdot OP$, $24^2 = (50 - x)x$, $x^2 - 50x + 576 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет корни $x = 18$ и $x = 32$. Так как по условию $OM > AM$, то $OP > AP$. При $x = 18$ условие $OP > AP$ не выполнено ($OP = x = 18$, $AP = 50 - x = 32$). Поэтому $x = 32$. По теореме Пифагора из треугольника OMP имеем: $OM^2 = OP^2 + MP^2 = 32^2 + 24^2 = 1600$, $OM = 40$.

Ответ: 40

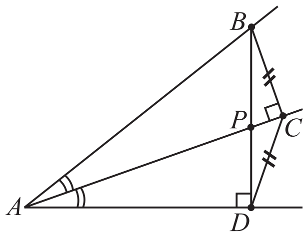
24 На стороне острого угла с вершиной A отмечена точка B. Из точки B на биссектрису и другую сторону угла опущены перпендикуляры BC и BD соответственно, P— точка пересечения прямых BD и AC. Докажите, что $CD \cdot AB = BP \cdot AC$.

Решение.

Равенство, которое нам требуется доказать, запишем в виде: $\frac{CD}{BP} = \frac{AC}{AB}$.

Так как $\angle ACB = 90°$ и $\angle ADB = 90°$, то точки C и D лежат на окружности, построенной на отрезке AB, как на диаметре. Четырёхугольник

$ABCD$ вписан в эту окружность, а поскольку $\angle BAC = \angle DAC$, то равны дуги окружности, на которые опираются эти углы, и, значит, равны отрезки, стягивающие эти дуги, т.е. $CD = BC$, см. рисунок.



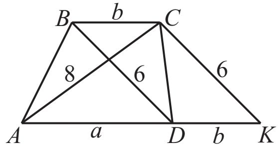
Поэтому равенство, которое нам требуется доказать, можно записать в виде: $\dfrac{BC}{BP} = \dfrac{AC}{AB}$. Остаётся лишь заметить, что $\dfrac{BC}{BP} = \cos\angle CBP$ (из прямоугольного треугольника BPC), а $\dfrac{AC}{AB} = \cos\angle BAC$ (из прямоугольного треугольника ABC) и, кроме того, $\angle CBP = \angle CBD = \angle CAD = = \angle BAC$, ($\angle CBD = \angle CAD$ — как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Таким образом, $\cos\angle CBP = \cos\angle BAC$ и, значит, $\dfrac{BC}{BP} = \dfrac{AC}{AB}$, что и требовалось доказать.

25 Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 6 и 8, а средняя линия равна 5.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ – данная в условии трапеция, где $AC = 8$, $BD = 6$. Пусть также $AD = a$, $BC = b$.

Через точку C проведём прямую, параллельную диагонали BD, и точку пересечения этой прямой с прямой AD обозначим через K, см. данный ниже рисунок.



Четырёхугольник $BCKD$ является параллелограммом ($BC \parallel DK$ – так как $ABCD$ трапеция, $CK \parallel BD$ – по построению). Следовательно, $CK = BD = 6$, $DK = BC = b$. Для длины отрезка AK имеем следующее равенство: $AK = AD + DK = a + b$. Так как сумма длин оснований трапеции равна удвоенной средней линии, которая по условии равна 5, то $a + b = 2 \cdot 5 = 10$.

2) Заметим, что площадь треугольника ACK равна площади трапеции $ABCD$. В самом деле, $S_{ACK} = \frac{1}{2} AK \cdot CH = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, где CH – высота $\triangle ACK$. Но высота треугольника ACK является одновременно и высотой трапеции $ABCD$, поэтому $\frac{1}{2}(a+b) \cdot h = S_{ABCD}$.

3) Из пункта 2) следует, что нам достаточно найти площадь треугольника ACK, в котором нам известны длины всех трёх сторон: $AC = 8$, $CK = 6$, $AK = 10$. Для этого можно использовать формулу Герона:
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – длины сторон треугольника, $p = a + b + c$. Но и этих вычислений можно избежать, если заметить, что $AC^2 + CK^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2 = AK^2$. Из этого равенства согласно обратной теореме Пифагора следует, что $\triangle ACK$ – прямоугольный треугольник с катетами AC и CK, поэтому $S_{ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ответ: 24

Тест № 3

20 Разложите на множители выражение $x^2 - 9y^2 + 30yz - 25z^2$.

Решение.

Заметим, что последние три слагаемые после вынесения знака минус образуют полный квадрат: $9y^2 - 30yz + 25z^2 = (3y - 5z)^2$. Воспользовавшись также формулой разности квадратов, получим, что данное выражение равно $x^2 - (3y - 5z)^2 = (x - 3y + 5z) \cdot (x + 3y - 5z)$.

Ответ: $(x - 3y + 5z)(x + 3y - 5z)$

21 К июлю кинотеатры города Геленджик увеличили цену входного билета на 75% по сравнению с ценой билета в феврале. На сколько процентов нужно будет снизить цену билета в октябре, чтобы после этого она была на 40% выше, чем в феврале?

Решение.

Пусть x — цена билета в феврале. Тогда $1{,}75\,x$ — цена билета в июле,