Оглавление

НОВЫЕ ЧИСЛА, НОВЫЕ ТЕОРИИ

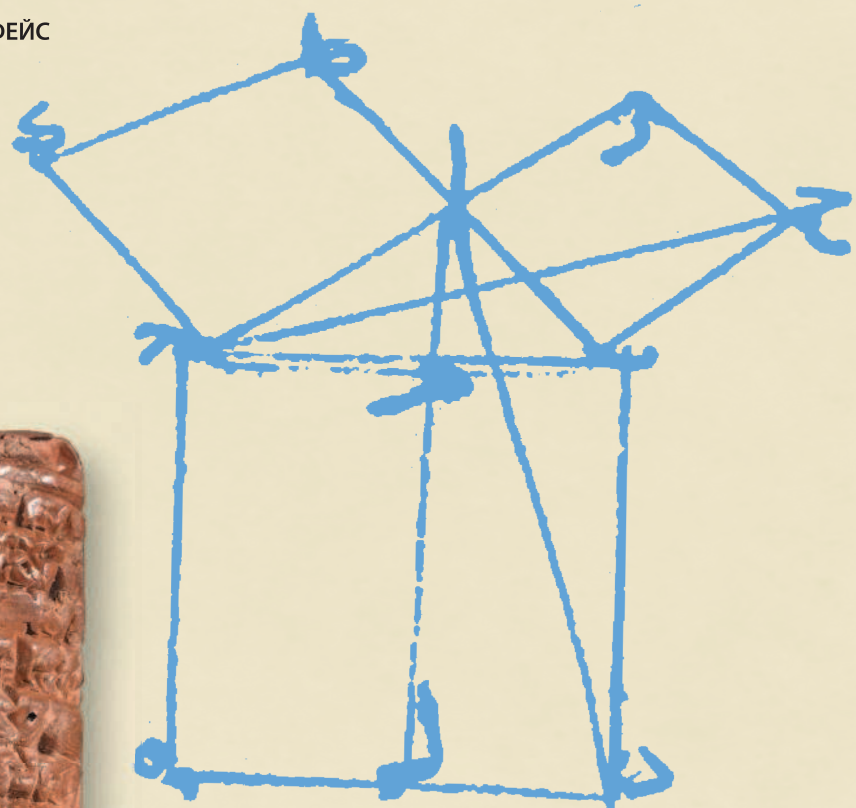
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

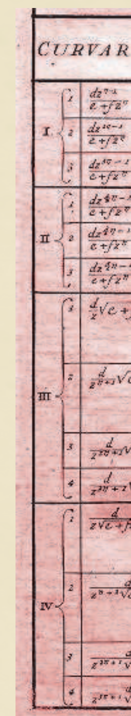
Предисловие

Математика — это наука? Искусство? Возможно, и то, и другое, а возможно — ни то, ни другое. Математика — предмет, отличный от всех других достижений человечества, интерфейс между интеллектом и воображением, скомпонованный из точно подобранных пропорций реального и нереального.

Математика возникла как способ учета богатства и метод раздела земли. Большинство математических записей древности — таких, например, как эта табличка, созданная 4000 лет назад, — это протоколы различных сделок.

Арабское доказательство теоремы Пифагора графическим методом демонстрирует отношение между длинами сторон треугольника.





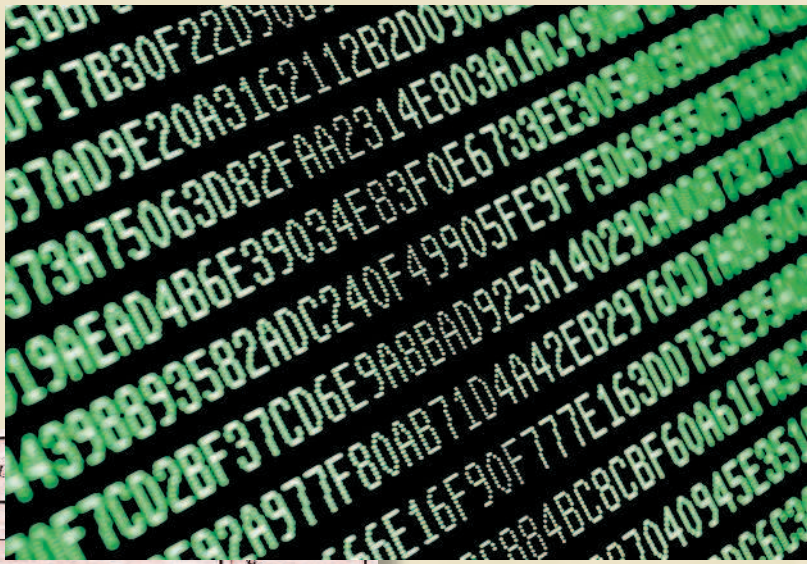
Мысли и деяния великих мудрецов — прекрасный предмет для обсуждения. Здесь мы собрали ровно сотню таких историй. Каждая из них посвящена одному конкретному математическому открытию, серьезной проблеме, решение которой стало настоящим прорывом, изменив наше представление о мире и нашем месте в нем.

История чаще всего представляется нам чередой драматичных перемен — идеи возникают, захватывают умы, а потом уходят в небытие; культуры доминируют, а затем приходят в упадок; одна концепция меняет другую. В математике все не так. Стоит математику доказать, что некое утверждение является истинным, опровергнуть это уже невозможно. Так, геоцентрическую систему строения мира, разработанную античным астрономом Клавдием Птолемеем (и считавшуюся истинной почти полтора тысячелетия), сменили более совершенные, а разработанные им же методы геометрических измерений, которые он использовал для описания движения этой Вселенной, применяются до сих пор.

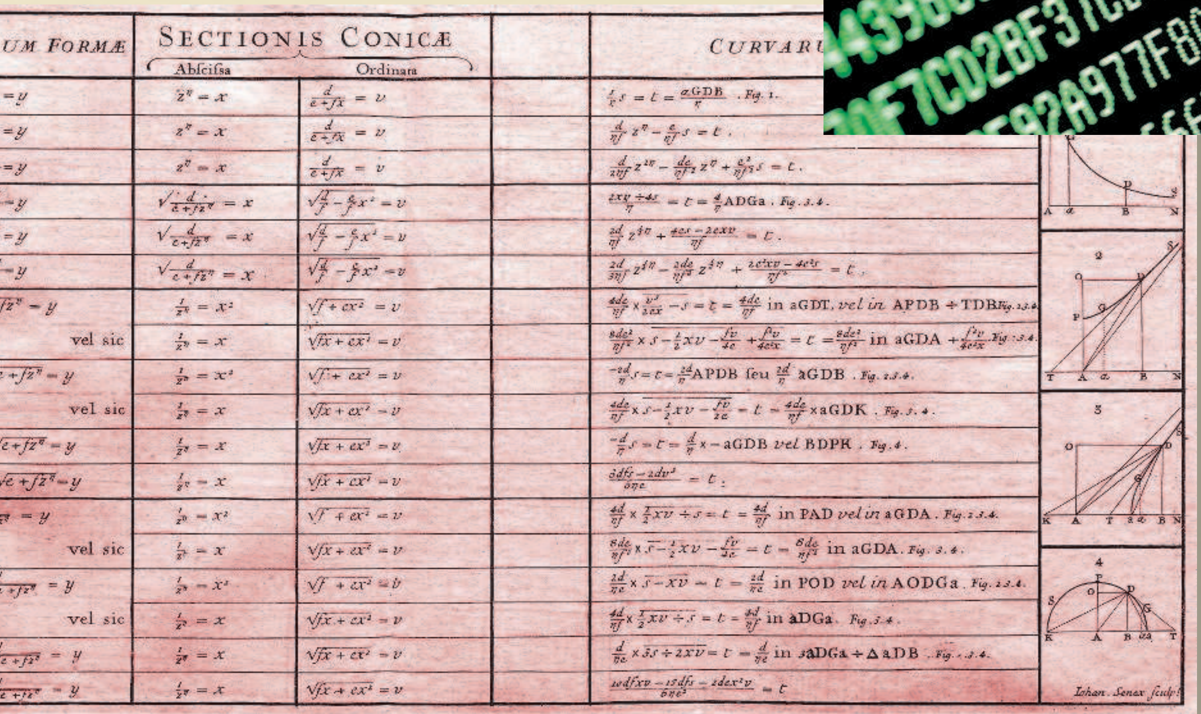
Сегодня фраза «система Птолемея» — расхожее клише для описания классического заблуждения. Методы же александрийской школы геометрии были верными во времена Птолемея, остаются верными и сейчас, формируя основы тригонометрии (теперь вы знаете, кто в этом виноват).

Главный принцип

История математики совсем не похожа на рассказ о том, как новые смелые идеи сметают старые, обветшалые истины, выводя их из обращения. Совсем наоборот, это, скорее, рассказ о том, как к старым, почтенным постулатам добавляются новые принципы, постепенно расширяя математический аппарат.



Компьютерный код — это своего рода математическая азбука. Когда числа двоичной системы, составленные из единиц и нолей, становятся слишком длинными для обработки, их преобразуют в символы шестнадцатеричной системы — от 0 до F.



Скрытые глубины математики. Таблица слева показывает, как превращение линейной геометрии в алгебру позволило создать способ математического описания природных изменений — от роста растений до падения индексов фондовых бирж.

История начинается с единицы, но бесконечность — это далеко не ее финал. Термин «математика» происходит от греческого слова «знание». Фактически все, что мы знаем, — в отличие от того, во что верим — начинается с измерения, с численной оценки, с численного выражения или описания. Таким образом, возникает первый практический вопрос: существовали ли эти количественные величины сами по себе или нам пришлось изобретать их, чтобы потом применить в своих целях? Если математика — продукт деятельности человеческого ума, значит, она внутренне присуща человеку, ведь сходные системы счисления появляются независимо друг от друга в разных изолированных культурах. Майя пришли к идее ноля независимо от вавилонян или индийской цивилизации, а, насколько нам известно, эти культуры никогда не обменивались идеями — да и вообще ничем не обменивались. Двоичная система символов, зафиксированная в классическом китайском труде «И Цзин» («Книга перемен») перекликается с гадательной системой ифа, зародившейся у народов йоруба, населявших долину р. Нигер в Африке.

Не в математике ли отражаются принципы существования реальности — как явные, так и скрытые? Имя Пифагора чаще всего связывают с его исследованиями свойств прямоугольного треугольника. Однако почти так же часто вспоминают и о том, что он был первым, кто «привязал» математику к явлениям природы, определив взаимосвязь между длиной струны и высотой тона ее звучания. Как вы увидите, орбиты небесных тел, накопление богатств, политические стратегии и даже принципы красоты следуют по путям, обозначенным числами. Давайте же начнем наше путешествие.

Разделы математики*

Математику можно использовать для решения любых задач — правда, с переменным успехом — поэтому попытка определить, что такое математика, исходя только из областей ее применения, приводит к путанице. Это похоже на попытку объяснить, что такое телефон, зачитывая телефонную книгу. Даже теоретическая база для подразделения математики на отдельные дисциплины требует множества допусков из-за огромного количества пересечений между ними. Предельно упрощая, можно сказать, что математика может описать весь известный (и даже неизвестный) нам мир, включая такие области, как количественные величины; разнообразные формы подсчета; числовые структуры, закономерности и взаимосвязи в них; пространство, свойства форм и поверхностей; и, наконец, процессы, пошагово отслеживая мгновенные изменения динамических систем.

МАТЕМ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

АЛГЕБРА

Изучение отношений между числами за счет замены их числовых переменных значений общими символами, среди которых чаще всего встречаются *x* и *y*.

ТЕОРИЯ ГРУПП

Исследование свойств алгебраических структур — групп чисел, образованных в результате одних и тех же математических операций над членами одного множества. Подобно числам, такие группы часто состоят из более простых групп.

ТЕОРИЯ ПОРЯДКА

Изучение общих принципов, определяющих, почему числа, количества или другие математические элементы бывают «больше», «меньше», «раньше» или «позже» друг друга.

АРИФМЕТИКА**

Действия с различными количествами при помощи сложения, вычитания, умножения, деления и т. д.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Измерение и оценка единиц информации или объемов данных, таких как те, что хранятся в компьютерах и передаются от одного к другому.

ДИНАМИКА ЖИДКИХ СРЕД

Моделирует движение жидкостей и газов на основе подсчитываемых свойств этих сред — вязкости, скорости, давления и т. д.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Изучение связей между линиями, формами и другими объектами.

КРИПТОГРАФИЯ

Математика кодов и шифров — от двоичных чисел, применяемых в программировании, до зашифрованных посланий, которыми обмениваются компьютеры.

ТЕОРИЯ ИГР

Математические методы оценки стратегий, направленных на решение задач в материальном мире: минимизацию потерь и максимизацию выигрыша на основе вероятностей, а также моделей поведения оппонентов и партнеров.

---

* Приводимая здесь классификация не является исчерпывающей и единственно верной — *прим. ред.*

** Лежит в основе математики, входит как базовый инструмент во все ее разделы — *прим. ред.*

ТОПОЛОГИЯ

Раздел геометрии, изучающий только связи между элементами одного объекта; длины и углы могут свободно изменяться — это не влияет на фундаментальные свойства объекта.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Дисциплина, изучающая отношения между длинами сторон треугольника и его внутренними углами, как на плоскости, так и на выпуклых и вогнутых поверхностях.

ФРАКТАЛЫ

Применяя геометрию и топологию к объектам реального мира, мы обнаруживаем «неровные» поверхности, а также объекты, обладающие свойством самоподобия, — считается, что эти поверхности и объекты имеют дробную метрическую размерность.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Использование геометрических методов для исследования динамических систем или методы счисления, применяемые в комплексной геометрии.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Использование алгебраических выражений для описания граней и поверхностей геометрических фигур и объектов.

ГЕОМЕТРИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЛОСОФИЯ

АТИКА

ЛОГИКА

Изучает, почему выражения вроде 1+1 = 2 являются истинной, а также другие вопросы, образующие фундаментальные основы математики.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Исследование и сравнение численных множеств, их взаимоотношений и пересечений, а также вопроса, являются ли они бесконечными

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Математика шанса, вычисляющая вероятность того, что некое событие произойдет, исходя из исходных условий и возможных исходов.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

МАТСТАТИСТИКА

Позволяет извлечь ценную информацию из математических выборок из реальных количественных данных о материальном мире.

СЧИСЛЕНИЕ

Раздел математики, описывающий постоянные изменения — от движения объектов материального мира до изменения кривизны абсолютно условных алгебраических кривых — и разбивающий эти траектории на мельчайшие текущие отрезки.

ТЕОРИЯ ХАОСА

Описывает, почему и каким образом развитие динамических систем может настолько сильно разниться даже в случае мельчайших изменений изначально заданных условий; объясняет, почему одна маленькая деталь может вызвать огромные изменения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Этот раздел имеет дело с математическими выражениями, включающими функции и производные от них. Функция — это определенная операция, осуществляемая над переменной исходной величиной; производная — мгновенный частный результат действия функции.

ДОИСТОРИЧЕСКАЯ ЭПОХА — СРЕДНИЕ ВЕКА

1 Учимся считать

Математика начинается со счета. Самые головоломные путешествия в абстрактную сферу чисел не имеют смысла без 1, 2, 3… Тем не менее одну проблему, которая выглядит достаточно простой, математика пока не в силах разрешить: числа изобретены людьми или существовали и до людей?

Немецкий математик XIX в. Леопольд Кроникер полушутя заметил: «Господь создал целые числа, все остальное — дело рук человека». «Целые числа», которые имел в виду Кроникер, — это натуральные целые числа от 0 до 9*. Начиная с 10 мы просто используем их заново (слово «целые» в его английском написании — integers — происходит от латинского слова «нетронутый»).

Итак, числа — такая же часть природы, как атомы или силы? История не оставила нам информации о том, как появились числа, ибо возникли они еще в доисторическую эпоху. Весьма вероятно, что наши далекие предки, которые еще не были людьми, могли различать небольшие количества — два, три и т. д. Предполагается, однако, что формализованный подсчет мог появиться только тогда, когда предметов для подсчета стало гораздо больше.

В наборе инструментов человека каменного века было уже достаточно предметов для того, чтобы точное знание об их количестве было полезным. Точные значения первоначально «записывались» как простые насечки на камне или кости — их количество соответствовало значению числа. Такие камни и кости сохранились до наших дней. Мокшане — народность, проживающая на западе России, — и сегодня пользуются традиционной системой подсчета, мало отличающейся от таких насечек. Этнографы полагают, что эта система сохранилась у мокшан с доисторических времен.

Настоящий прорыв в умении считать — и записывать результаты подсчета — произошел после того, как человечество перешло от кочевого образа жизни охотников и собирателей к оседлому, начав заниматься земледелием. Количество домашнего скота и личных вещей — несомненных признаков цивилизации — росло, и ради их точного учета стоило, наконец, научиться считать. Подсчитав их, человек начинал сравнивать полученные числа с другими, а потом объединять их, меняться и приумножать. Так и родилась математика.

ПОДСЧЕТ НА ГЛАЗОК

Частенько мы оперируем приблизительными величинами — *немного, несколько* или, скажем, *миллионы*. В этих случаях точность не так важна и у нас нет времени — или возможности — сосчитать интересующие нас объекты. Однако, когда необходимость в точном подсчете все же возникает, наш мозг, похоже, способен произвести оценку лишь в определенных пределах. И эти пределы являются его врожденным свойством. Взгляните на эти камни. Их шесть, конечно, но ваш мозг, скорее всего, определил их количество как «две группы по три». Закройте один камень рукой и взгляните на картинку снова. Вероятно, человеческий мозг в пределах одного набора объектов способен распознать лишь количество, равное пяти**. Подсчет бо́льших величин требует объединения мелких групп объектов в более крупные.

---

* Точнее, от 1 до 10 — когда люди осваивали порядковый счет, ноля еще «не было» — *прим. ред.*

** Любой подсчет «на глазок» — сравнение с уже заданным количеством. Поэтому вполне допустимо предположение о том, что изначально человек сравнивал с наиболее близкими ему «предметами» — руками, ногами, пальцами, отсюда и «неспособность» мозга мгновенно распознавать количество, большее пяти — *прим. ред.*

Кость Ишанго, сделанная из малой берцовой кости бабуина 20 000 лет назад в Центральной Африке, — один из древнейших математических инструментов. Это не просто запись неких чисел — насечки на кости, вероятно, использовались для расчетов в рамках двенадцатеричной системы счета.

2 Позиционная система счисления

Имея пальцы, досчитать до десяти легко. Однако для того, чтобы считать дальше, требуется иной подход. Сегодня мы используем позиционную систему счисления, оперирующую десятками. Древнейшая же позиционная система счисления сформировалась в Вавилоне 5000 лет назад. Основой этой системы стало число 60.

Вавилоняне писали клинообразными заостренными тростниковыми палочками по сырой глине. Высыхая, глина превращалась в твердые таблички. Вавилонские цифры, что неудивительно, составлялись из клинообразных штрихов. Шестидесятеричную (основанную на числе 60) систему счисления вавилоняне заимствовали у своих предков. Это весьма разумная система. Число 60 можно разделить на 1, 2, 3, 4 и 5 — сравните это, например, с возможностями числа 10. Количество минут в одном часе (60) и градусов (360, то есть 6×60) в окружности — наследство, доставшееся нам от вавилонских математиков. Подобно цифровому ряду от 0 до 9, что мы используем сегодня, вавилонская система записи чисел была способна обозначать единицы, десятки или шестидесятки в зависимости от того, на каком месте в ряду цифр оказывался каждый конкретный символ. Впрочем, прочесть вавилонские надписи сегодня могут лишь эксперты. Сравните эту систему с появившейся позднее древнеримской, в которой числовые значения символов оставались неизменными вне зависимости от положения: LXI это 50+10+1 или 61.

Первые десять цифр вавилонской системы счисления. Для обозначения чисел 40 и 50 имелись отдельные символы.

3 Счеты

Многие считают, что счеты появились до того, как люди научились записывать цифры. Вавилонская система счисления, вероятно, была изобретена для записи чисел, полученных в результате вычислений с помощью двигающихся бусин или четок.

Китайские счеты имеют два отделения для подсчета в десятеричной (каждая бусина из верхнего отделения имеет значение 5) или шестнадцатеричной (две бусины из верхнего отделения добавляют 10 к числу 15, образованному бусинами из нижнего). Шестнадцатеричная система исчисления используется для подсчета традиционных китайских единиц веса, каждая из которых состоит из 16 единиц.

Сегодня в магазинах продавцы считывают с упаковки штрихкоды лазерными сканерами, или покупатели сами делают это с помощью систем самообслуживания. Однако всего несколько десятков лет назад продавцы подсчитывали стоимость покупок на счетах. Во многих странах Азии торговцы до сих пор производят весьма сложные вычисления, полагаясь лишь на деревянную рамку с нанизанными на проволоку бусинами. Скорость этих вычислений весьма впечатляет.

Счеты сами по себе не настолько древнее вычислительное устройство, как может показаться. Это симбиоз счетных таблиц, разработанных на Ближнем Востоке, со счетными палочками, изобретенными на Дальнем. С античности осталось слово «абак», которым называли счеты. Это слово происходит от арабского слова «пыль» и подразумевает, вероятно, песчаную площадку или рамку со стопками небольших голышей или других счетных предметов, организованных внутри нее.

В Китае счетные фишки нанизывались на стержень. Этот инструмент был похож на детскую головоломку-пирамидку. Китайские символы, обозначавшие числа, появившиеся около III в. до н. э., внешне напоминают вертикальные стержни, на которые нанизаны стопки дисков. Лишь в XVI в. н. э. эти инструменты объединились, превратившись в удобные ручные счеты.

4 Теорема Пифагора

Пифагор — сакральный персонаж классической греческой античности, хотя бо́льшая (если не вся) часть его биографии — миф, увековеченный его последователями, одним из которых был Платон.

Списки самых знаменитых математиков мира чаще всего возглавляет имя Пифагора. Это значительное достижение для человека, которого, возможно, никогда и не существовало, который был главным подозреваемым в убийстве и даже не формулировал теорему, которая прославила его.

Теорема Пифагора — третий по важности (и частоте преподавания) после базовых арифметических действий и таблицы умножения математический принцип. Она настолько наглядна и проста, что запомнить ее очень легко: $a^2 + b^2 = c^2$. Для тех, у кого под рукой нет учебника, напоминаем: это уравнение означает, что сумма квадратов двух катетов (коротких сторон) прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы — самой длинной его стороны. Таким образом, зная длину двух сторон, вы всегда можете вычислить длину третьей.

Практика прежде доказательства

Эта теорема получила имя Пифагора из Самоса, жившего на юге Италии примерно 2500 лет назад. Однако ее знали по крайней мере за несколько веков до этого, но, насколько нам известно, Пифагор был первым математиком, доказавшим, что она верна. В молодости Пифагор много путешествовал, бывал в Египте, Вавилоне и, возможно, даже добирался до Индии. Во всех этих местах он видел, как работает «его» теорема на практике — в землемерном деле и строительстве. Египетские землемеры постоянно пользовались веревками, на которых были завязаны несколько узелков. Расстояния между ними соответствовали мерам длины в 3, 4 и 5 единиц измерения. Если из этих веревок складывали треугольник, у него всегда был точный прямой угол в 90 градусов. Числа 3, 4 и 5 образуют первое из бесконечных множеств «пифагоровых троек» — наборов из трех целых чисел, удовлетворяющих условиям теоремы.

В 2002 г. теорему Пифагора применили в совершенно современном контексте — в суде Нью-Йорка. Судьи постановили, что торговцы наркотиками, пойманные на распространении своего зелья в пределах 1000 шагов от школ, должны получать более суровое наказание.

На фреске из египетской гробницы, созданной в 1600 г. до н. э., изображены древнеегипетские землемеры, измеряющие пшеничные поля перед уборкой урожая. Углы каждого поля были прямыми — составляли точно 90° — благодаря системе пифагоровых троек в веревочном выражении.

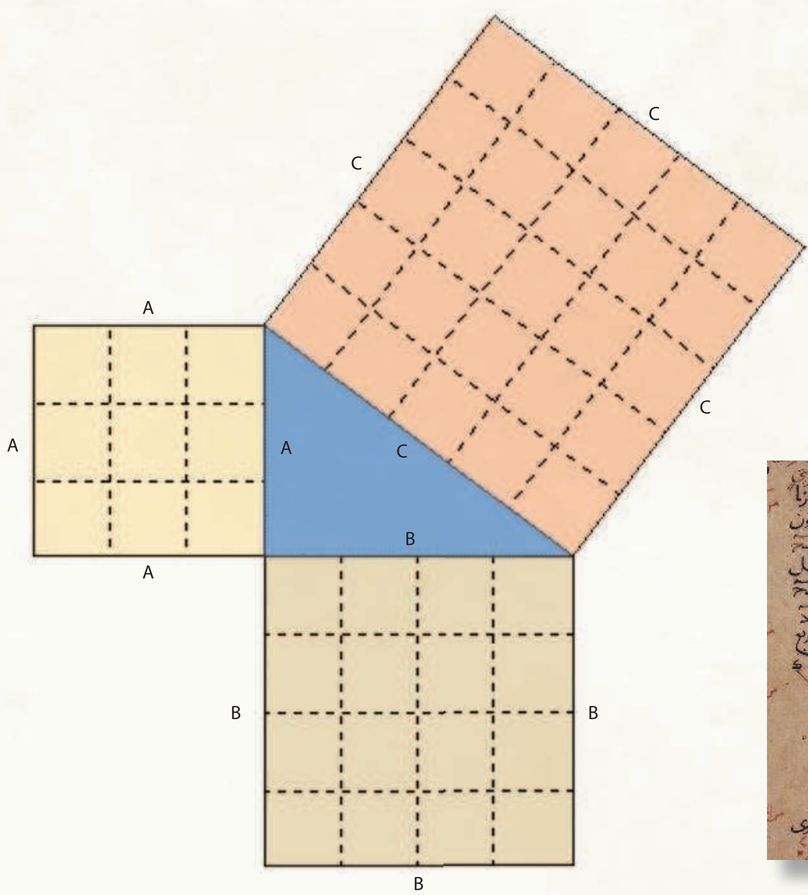
Но как точно измерить эту дистанцию: с помощью так называемой Манхэттенской мерки (сумме длин сторон прямоугольных кварталов, формировавших с улицами своего рода географическую решетку) или прямо по диагонали, в соответствии с теоремой Пифагора? Суд решил следовать простоте древнегреческого математика.

Иррациональная философия

Пифагор считал числа священными: все в природе могло быть описано в целочисленном выражении. Он привлек множество последователей и возглавил тайное общество математиков, посвятивших свою жизнь поиску абсолютной истины чисел. Однако теорема, увековечившая Пифагора как математика, уничтожила его философскую систему. Философ-пифагореец Гиппас заметил, что в случае, если стороны треугольника равны 1 мере длины, то длина гипотенузы составит $\sqrt{2}$. Значение этого квадратного корня составлял бесконечный ряд чисел. Его нельзя было выразить целым числом, значит, оно не имело точного целочисленного значения (такие числа называются *иррациональными*). Легенда гласит, что Пифагор, получив такой мощнейший удар по своим постулатам, пригласил Гиппаса на рыбалку, а на берег вернулся уже в одиночку…

ПИФАГОРЕЙЦЫ

Рожденный на острове Самос, расположенном у западных берегов современной Турции, большую часть жизни Пифагор провел в Кротоне — греческой колонии в южной Италии. Его последователи-пифагорейцы напоминали квазирелигиозную секту. Пифагорейцами становились лишь немногие избранные — скорее всего те, кто обладал достаточными навыками в математике — проходя через тайную систему обрядов и инициаций. Жизнь пифагорейцев регулировали так называемые золотые строфы, среди которых были, например, такие: «Ищи справедливую меру, которой является та мера, что не причиняет боли», или «Будь добр со словами и полезен в делах». Пифагорейцы придавали каждому числу особое значение: 1 символизировало причину; 2 — неопределенный женский дух; 3, как сумма 1 и 2 и, таким образом, обозначала мужественность; 5 (сумма 2 и 3) была самым мощным числом. Однако прославились пифагорейцы и куда более странными идеями. Говорили, что они боялись белых петухов и никогда не дотрагивались до бобов. Со временем пифагорейцы лишились поддержки со стороны населения Кротона, и враги Пифагора собрались убить его. Говорят, что они сумели его настичь только потому, что великий ученый отказался пересечь бобовое поле. Не желая причинить вред посевам, он предпочел принять смерть.

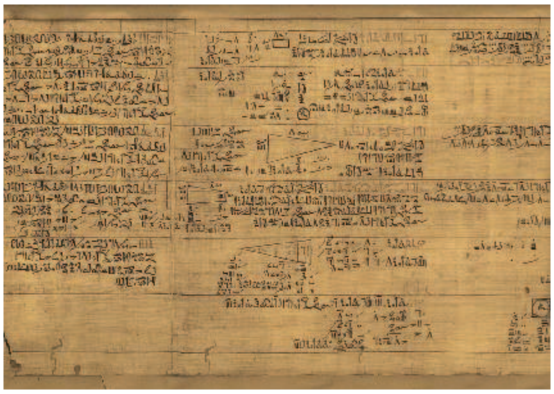


Эта простая схема демонстрирует взаимосвязь между квадратами длин сторон прямоугольника. Такая же изображена в древней арабской книге. В XIX в. поиск более хитроумного способа превратить фигуры A и B в фигуру C стал популярным развлечением в математических кругах.

5 Математический папирус Ахмеса

Ахмес утверждал, что двухметровый папирус обеспечивал «точные методы счисления для решения задач и знание всех вещей… всех тайн».

Папирус Ахмеса, также известный как папирус Райнда — в честь Генри Райнда, который приобрел его в Луксоре в 1858 г., — дает нам возможность взглянуть на математический мир древних египтян. Папирусом Ахмеса его называют в честь писца, скопировавшего его между 1650 и 1500 г. до н. э. с текста, написанного двумя веками раньше.



Этот древний документ представляет собой справочные таблицы, предназначенные для помощи в вычислениях и решении более 80 математических задач, встававших перед египетскими чиновниками примерно в 1650 г. до н. э. — таких, например, как расчет объема зернохранилища. Кроме того, папирус демонстрирует, что египтяне умели рассчитывать площадь круга, используя формулу, в которой числу π присваивалось значение, приблизительно равное 3,1605. Подобно другим цивилизациям того времени, египтяне находили значение числа π, сравнивая замеренные длины диаметров и окружностей.

6 Ноль

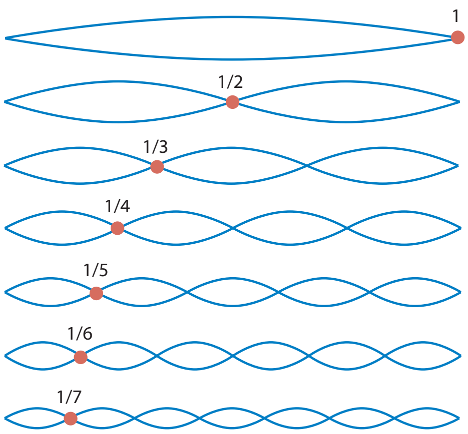
Ноль обозначается точкой или кружком в греческих, индийских и китайских текстах.

Сегодня мы можем принять ничто — ноль — за нечто само собой разумеющееся, но было время, когда этого «ничто» не существовало вовсе. Вавилоняне использовали его в качестве знака-«заглушки» более 3000 лет назад. Со временем индийцы сделали ноль полноправным числом и полноправной цифрой.

То, что мы сейчас называем нолем, впервые появляется среди вавилонских чисел в виде пары наклонных клиньев. Этот ноль обозначал отсутствие численного значения внутри большого числа (так в числе 404 ноль означает отсутствие десятков). Ноль того же типа появляется в системе счисления майя. Греки располагались гораздо ближе к вавилонянам, но в их математике, основанной на геометрии, необходимости в ноле не возникало до тех пор, пока во II в. до н. э. он не пригодился Гиппарху для астрономических вычислений. Через тысячелетие индийские математики сделали ноль таким же числом, как и все остальные, показав, что тот является результатом некоторых математических выражений. Это революционное открытие проложило дорогу к отрицательным числам — тем, которые меньше ноля.

7 Математика музыки

Математики Древней Греции везде видели комбинации чисел — и не без причины. Музыка, это гармоническое подмножество звуков, как оказалась, покоится на надежной математической основе.



Вибрация струны приводит в движение воздух, создавая звуковую волну — аналоговый звук, который мы и слышим. «Деление» волны на целые доли создает серию гармоник, звуковая комбинация которых формирует тембр.

Легенда гласит, что греческий математик Пифагор остановился послушать, как работают кузнецы, и обнаружил, что звук удара молота, весящего вдвое меньше, чем его аналог, был на октаву выше.

Эта история вполне может быть вымыслом, зато точно известно, что Пифагор экспериментировал с различными объектами в поисках соотношения между их размерами и высотой звука, который они производили. Среди объектов его экспериментов были и струны разной длины, которые он дергал, и наполненные разным количеством воды сосуды, по которым он стучал. Так он извлекал различные ноты. Так он установил математическое соотношение между объектом и звуком.

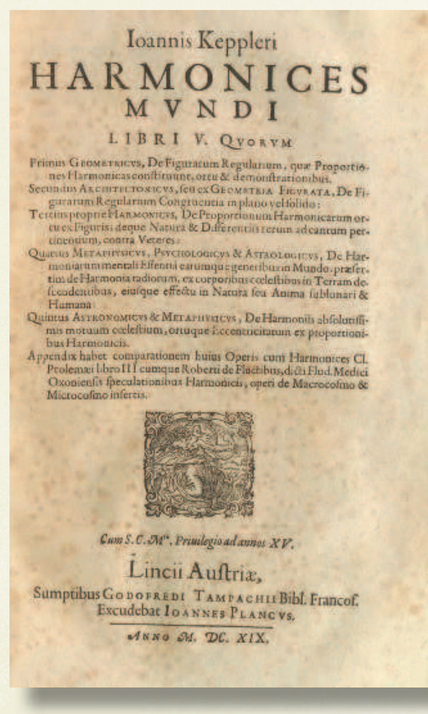
Гармоники

Возьмите две одинаково натянутые струны, сделанные из одного материала, одна из которых вдвое длиннее другой. Дерните за них — и короткая струна будет вибрировать вдвое чаще, чем длинная. То есть частота ее колебаний будет выше вдвое, а звук — выше на октаву (восемь тонов — от латинского слова *octāva,* «восьмая»), чем у длинной. Пифагор определил октавное соотношение как 2 к 1. Если одна струна составляет треть от другой, соотношение составит 3 к 2. При этом интервал — разница тонов между извлеченными звуками — составит одну пятую (квинту). Соотношение 4 к 3 (если взять струну вчетверо короче эталонной) соответствует одной четверти (кварте). Одновременное звучание интервалов октавы и квинты или октавы и кварты рождает гармоничный звук, приятный для уха, — музыкальный аккорд.

Впервые природное явление — звук — было описано в численных терминах. Раньше такого не делали никогда. Пифагор считал, что принципы музыкальной гармонии отражаются во всей Вселенной в целом, и что числа и их взаимосвязи могут объяснить все, что угодно.

МУЗЫКА СФЕР

Древние греки считали, что Луна, Солнце, планеты и звезды закреплены на прозрачных сферах, вращающихся вокруг Земли и сопровождающих это вращение музыкой. Согласно учению пифагорейцев, расстояния между планетами пропорциональны гармоническим музыкальным интервалам между нотами, извлекаемыми из струн. Ближние сферы производят низкие тона, дальние — более высокие, поскольку они движутся быстрее*. Сливаясь, эти тона формируют музыку сфер, наполняющую небеса.



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius proprie HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Natura & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentia earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Cum S. C. M^tis. Privilegio ad annos XV.

Lincii Austriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

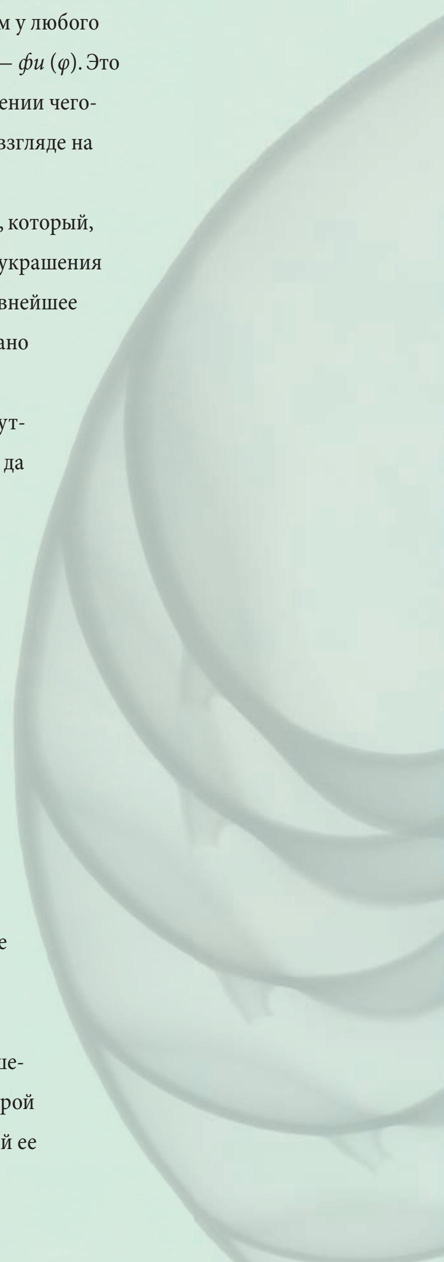
В книге «Гармония мира», опубликованной в 1619 г., Иоганн Кеплер представил относительные высоты тона планет — своего рода «планетарную гамму».

* Дальнейшие исследования Иоганна Кеплера показали, что все наоборот — чем ближе к Солнцу планета, тем быстрее она движется — *прим. ред.*

8 Золотое соотношение

Часто говорят, что в математике есть своя красота, но уже к середине V в. до н. э. или даже гораздо раньше было известно, что в красоте много математики.

Пропорции соседних сегментов раковины моллюска наутилуса приближаются к золотому соотношению.

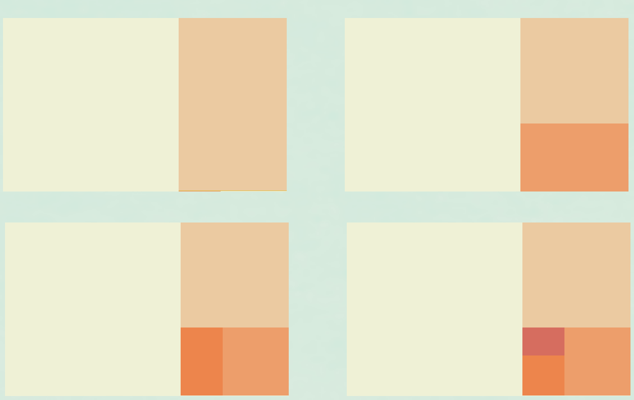


Золотое соотношение — это число, у которого, по всей вероятности, больше имен, чем у любого другого. Его называют золотым сечением, божественной пропорцией или попросту — *фи* (φ). Это число обозначает весьма приятную — обычно — пропорцию, возникающую при делении чего-либо на две неравные части. Чаще всего золотое соотношение можно встретить при взгляде на памятники искусства и архитектуры любого исторического периода.

Свое имя число фи получило в честь греческого архитектора и скульптора Фидия, который, по утверждению некоторых исследователей, активно использовал этот принцип для украшения самого своего знаменитого творения — Парфенона, возведенного в 440 г. до н. э. Древнейшее сохранившееся до наших дней описание принципа золотого соотношения было сделано Эвклидом около 300 г. до н. э. в его труде «Начала».

Однако самое восхитительное в числе фи — не его реальное или кажущееся присутствие в созданных человеком объектах (от кредитных карточек до рисунка Леонардо да Винчи «Витрувианский человек»), но его проявления в природе (рост цветов и ракушек, например).

Несмотря на то, что свое обозначение золотое соотношение получило в честь Фидия, он не руководствовался этим принципом при разработке проекта Парфенона. Храм несколько высоковат для того, чтобы его пропорции строго соответствовали стандарту золотого сечения — то ли из-за ошибки в расчетах, то ли потому, что Фидию так больше нравилось.



Вычисление золотого соотношения

Существует много способов математически выразить золотое соотношение, и во всех этих способах есть своя определенная простота, точность и обаяние. Эвклид описывал его как «сечение в крайнем и среднем отношении». Более «математичное» выражение выглядит так: если золотое соотношение равно x, то $x^2 - x - 1 = 0$. Или так: $x/1 = 1/x^{-1}$. Словами же золотое соотношение определяют как пропорцию, в которой «длина всей линии относится к большей ее части так же, как та — к меньшей».

Золотые прямоугольники можно разделить на бесконечное количество уменьшающихся в размерах золотых прямоугольников, «отрезая» от них части по кратчайшей линии. В терминологии греческих геометров такое свойство делает золотой прямоугольник гномоном — объектом, способным сохранять форму по мере роста (или уменьшения).