



# Содержание

## АЛГЕБРА

---

### 1. Числа и вычисления

<b>1.1. Натуральные числа</b> .....	<b>12</b>
1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры .....	12
1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами .....	13
1.1.3. Степень с натуральным показателем .....	17
1.1.4. Делимость натуральных чисел. Простые и составные числа, разложение натурального числа на простые множители .....	18
1.1.5. Признаки делимости .....	20
1.1.6. Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) .....	21
1.1.7. Деление с остатком .....	23
<b>1.2. Дроби</b> .....	<b>24</b>
1.2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей. Сокращение дроби .....	24
1.2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями .....	28
1.2.3. Нахождение части от целого и целого по его части. ....	34
1.2.4. Десятичная дробь, сравнение десятичных дробей. ....	36
1.2.5. Арифметические действия с десятичными дробями. ....	37
1.2.6. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби .....	39

<b>1.3. Рациональные числа</b> .....	<b>40</b>
1.3.1. Целые числа .....	40
1.3.2. Модуль (абсолютная величина) числа .....	40
1.3.3. Сравнение рациональных чисел .....	41
1.3.4. Арифметические действия с рациональными числами .....	42
1.3.5. Степень с целым показателем .....	43
1.3.6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок .....	44
<b>1.4. Действительные числа</b> .....	<b>45</b>
1.4.1. Квадратный корень из числа .....	45
1.4.2. Корень третьей степени .....	46
1.4.3. Нахождение приближённого значения корня .....	46
1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем .....	47
1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. ....	47
1.4.6. Сравнение действительных чисел. ....	47
<b>1.5. Измерения, приближения, оценки</b> .....	<b>48</b>
1.5.1. Единицы измерения .....	48
1.5.2. Стандартный вид числа .....	50
1.5.3. Представление зависимости между величинами в виде формул .....	50
1.5.4. Проценты. Нахождение процента от величины и величины по её проценту .....	51
1.5.5. Отношение, выражение отношения в процентах. ....	52
1.5.6. Пропорция. Прямая и обратно пропорциональная зависимости .....	53
1.5.7. Округление чисел. ....	54

## **2. Алгебраические выражения**

### **2.1. Буквенные выражения**

**(выражения с переменными) . . . . . 56**

2.1.1. Буквенные выражения.

Числовое значение буквенного выражения . . . . . 56

2.1.2. Допустимые значения переменных,  
входящих в выражения с переменными . . . . . 57

2.1.3. Подстановка выражений вместо переменных . . 57

2.1.4. Равенство буквенных выражений,  
тождество. Преобразования выражений . . . . . 58

**2.2. Свойства степени с целым показателем . . . . . 58**

**2.3. Многочлены . . . . . 59**

2.3.1. Многочлен. Сложение, вычитание,  
умножение многочленов . . . . . 59

2.3.2. Формулы сокращённого умножения:  
квадрат суммы и квадрат разности,  
формула разности квадратов . . . . . 60

2.3.3. Разложение многочлена на множители . . . . . 61

2.3.4. Квадратный трёхчлен. Теорема Виета.  
Разложение квадратного трёхчлена  
на линейные множители . . . . . 62

2.3.5. Степень и корень многочлена  
с одной переменной . . . . . 62

**2.4. Алгебраическая дробь. . . . . 63**

2.4.1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей. . 63

2.4.2. Рациональные выражения  
и их преобразования . . . . . 63

**2.5. Свойства квадратных корней  
и их применение в вычислениях . . . . . 64**

## **3. Уравнения и неравенства**

**3.1. Уравнения. . . . . 65**

3.1.1. Уравнение с одной переменной,  
корень уравнения. . . . . 65

3.1.2. Линейное уравнение . . . . .	65
3.1.3. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения . . . . .	67
3.1.4. Решение рациональных уравнений . . . . .	69
3.1.5. Примеры решения уравнений высших степеней. Решение уравнений методом замены переменной. Решение уравнений методом разложения на множители . . . . .	71
3.1.6. Уравнение с двумя переменными; решение уравнения с двумя переменными. . . . .	72
3.1.7. Система уравнений; решение системы. . . . .	73
3.1.8. Система двух линейных уравнений с двумя переменными; решение подстановкой и алгебраическим способом . . . . .	74
<b>3.2. Неравенства. . . . .</b>	<b>78</b>
3.2.1. Числовые неравенства и их свойства . . . . .	78
3.2.2. Неравенства с одной переменной. Решение неравенства . . . . .	80
3.2.3. Линейное неравенство с одной переменной . . . . .	81
3.2.4. Системы линейных неравенств. . . . .	82
3.2.5. Квадратные неравенства . . . . .	84
<b>3.3. Текстовые задачи . . . . .</b>	<b>88</b>
3.3.1. Решение текстовых задач арифметическим способом . . . . .	88
3.3.2. Решение текстовых задач алгебраическим способом . . . . .	90
<b>4. Числовые последовательности</b>	
<b>4.1 Понятие последовательности . . . . .</b>	<b>95</b>
4.1.1. Понятие последовательности . . . . .	95
<b>4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии . . . . .</b>	<b>96</b>
4.2.1. Арифметическая прогрессия . . . . .	96
4.2.2. Геометрическая прогрессия . . . . .	97
4.2.3. Сложные проценты . . . . .	98

## 5. Функции

<b>5.1. Числовые функции.</b> . . . . .	<b>99</b>
5.1.1. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции . . . . .	99
5.1.2. График функции, возрастание и убывание, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства . . . .	100
5.1.3. Пример графических зависимостей, отражающих реальные процессы . . . . .	101
5.1.4. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов . . . . .	102
5.1.5. Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость, её график. Гипербола. . . . .	103
5.1.6. Квадратичная функция, её график. Парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии . . . . .	104
5.1.7. График функции $y = \sqrt{x}$ . . . . .	105
5.1.8. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ . . . . .	105
5.1.9. График $y =  x $ . . . . .	106
5.1.10. Использование графиков функций для решения уравнений и систем . . . . .	106

## 6. Координаты на прямой и в плоскости

<b>6.1. Координатная прямая.</b> . . . . .	<b>108</b>
6.1.1. Изображение чисел точками координатной прямой . . . . .	108
6.1.2. Геометрический смысл модуля . . . . .	108
6.1.3. Числовые промежутки: интервал, отрезок, луч. . . . .	109
<b>6.2. Декартовы координаты на плоскости.</b> . . . . .	<b>110</b>
6.2.1. Декартовы координаты на плоскости; координаты точки . . . . .	110

6.2.2. Координаты середины отрезка . . . . .	110
6.2.3. Формула расстояния между двумя точками плоскости . . . . .	111
6.2.4. Уравнение прямой, угловой коэффициент прямой, условие параллельности прямых . . . . .	111
6.2.5. Уравнение окружности . . . . .	112
6.2.6. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и их систем . . . . .	112
<b>7. Статистика и теория вероятности . . . . .</b>	<b>114</b>

## **ГЕОМЕТРИЯ**

---

### **8. Геометрия**

#### **8.1. Геометрические фигуры и их свойства.**

<b>Измерение геометрических величин. . . . .</b>	<b>120</b>
8.1.1. Начальные понятия геометрии. . . . .	120
8.1.2. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы. Биссектриса угла и её свойства . . . . .	122
8.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых . . . . .	124
8.1.4. Отрезок. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Перпендикуляр и наклонная к прямой . . . . .	127
8.1.5. Понятие о геометрическом месте точек . . . . .	129
8.1.6. Преобразования плоскости. Движения. Симметрия . . . . .	130

#### **8.2. Треугольник. . . . . 132**

8.2.1. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника; точки пересечения серединных перпендикуляров, биссектрис, медиан, высот или их продолжений . . . . .	132
8.2.2. Равнобедренный и равносторонний треугольники. Свойства и признаки равнобедренного треугольника . . . . .	133

8.2.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора . . . . .	136
8.2.4. Признаки равенства треугольников. . . . .	138
8.2.5. Неравенство треугольника . . . . .	139
8.2.6. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника. . . . .	139
8.2.7. Теорема Фалеса . . . . .	140
8.2.8. Подобие треугольников, коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников. . . . .	140
8.2.9. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ . . . . .	143
8.2.10. Решение прямоугольных треугольников. Основное тригонометрическое тождество. Теорема косинусов и теорема синусов. . . . .	144
<b>8.3. Многоугольники . . . . .</b>	<b>146</b>
8.3.1. Параллелограмм, его свойства и признаки . .	146
8.3.2. Прямоугольник, квадрат, ромб, их свойства и признаки . . . . .	148
8.3.3. Трапеция, средняя линия трапеции; равнобедренная трапеция . . . . .	150
8.3.4. Сумма углов выпуклого многоугольника. . .	151
8.3.5. Правильные многоугольники. . . . .	152
<b>8.4. Окружность и круг . . . . .</b>	<b>153</b>
8.4.1. Центральный, вписанный угол; величина вписанного угла. . . . .	153
8.4.2. Взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей . . . . .	155
8.4.3. Касательная и секущая к окружности; равенство отрезков касательных, проведённых из одной точки . . . . .	156
8.4.4. Окружность, вписанная в треугольник . . . .	157
8.4.5. Окружность, описанная около треугольника . . .	157
8.4.6. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника . . . . .	159
8.4.7. Вписанные и описанные четырёхугольники. . .	160

<b>8.5. Измерение геометрических величин . . . . .</b>	<b>161</b>
8.5.1. Длина отрезка, длина ломаной, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой . . .	161
8.5.2. Длина окружности . . . . .	162
8.5.3. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности . . . . .	162
8.5.4. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника . . . . .	163
8.5.5. Площадь параллелограмма . . . . .	164
8.5.6. Площадь трапеции . . . . .	164
8.5.7. Площадь треугольника . . . . .	165
8.5.8. Площадь круга, площадь сектора . . . . .	166
8.5.9. Формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, куба, шара . . . . .	167
<b>8.6. Векторы на плоскости . . . . .</b>	<b>168</b>
8.6.1 Вектор, длина (модуль) вектора . . . . .	168
8.6.2. Равенство векторов . . . . .	169
8.6.3. Операции над векторами (сумма векторов, умножение вектора на число) . . . . .	170
8.6.4. Угол между векторами . . . . .	172
8.6.5. Коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам . . . . .	173
8.6.6. Координаты вектора . . . . .	174
8.6.7. Скалярное произведение векторов . . . . .	176

# АЛГЕБРА

---

# 1. ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

---

## 1.1. Натуральные числа

### 1.1.1. Десятичная система счисления. Римская нумерация. Цифры

**Цифры** — знаки для записи чисел.

**Система счисления** — способ записи чисел в виде, удобном для чтения и выполнения арифметических операций.

В десятичной системе счисления используют цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Всего 10 цифр.

<b>Римские цифры</b>	I	V	X	L	C	D	M
<b>Арабские цифры</b>	1	5	10	50	100	500	1000

*Примеры*

1)  $XXVII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27.$

2)  $MDCCLXIV = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + (5 - 1) = 1764.$

### 1.1.2. Арифметические действия над натуральными числами

<b>Натуральные числа</b> — числа, которые используют при счёте предметов.	
<b>Действия над натуральными числами</b>	
Сложение	$a + b = c, a = c - b, b = c - a,$ где $a$ — слагаемое, $b$ — слагаемое, $c$ — сумма
Вычитание	$a - b = c, a = b + c, b = a - c,$ где $a$ — уменьшаемое, $b$ — вычитаемое, $c$ — разность
Умножение	$ab = c, a = \frac{c}{b}, b = \frac{c}{a}, a \neq 0, b \neq 0,$ где $a$ — множитель, $b$ — множитель, $c$ — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c, a = bc, b = \frac{a}{c},$ $b \neq 0, c \neq 0,$ где $a$ — делимое, $b$ — делитель, $c$ — частное

<b>Свойства сложения и умножения</b>	
Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$

Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$
--	----------------------

<b>Общие правила при действиях с 0 и 1</b>	
$a + 0 = a$	$a : 1 = a$
$a - 0 = a$	$a : a = 1$
$a - a = 0$	$a \cdot 0 = 0$
$a \cdot 1 = a$	$0 : a = 0$
$a : 0$ — нет числового решения	

<b>Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9</b>
<i>Действия</i>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат.</li> <li>• Умножаем или складываем остатки. В результате вычислений тем же способом находим остаток и сравниваем его с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать.</li> <li>• При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно складывая остаток разности с остатком вычитаемого.</li> </ul>

### *Примеры*

1)  $44 \cdot 46 = 2024$

$4 + 4 = 8; 4 + 6 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1;$

$2 + 0 + 2 + 4 = 8;$

$8 \cdot 1 = 8$  (верно)

2)  $327 + 48 = 375$

$3 + 2 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$4 + 8 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$3 + 7 + 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6;$

$3 + 3 = 6$  (верно)

3)  $156 : 12 = 13 \rightarrow 13 \cdot 12 = 156$

$1 + 3 = 4; 1 + 2 = 3;$

$1 + 5 + 6 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$

$4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$  (верно)

4)  $58 - 22 = 36 \rightarrow 36 + 22 = 58$

$3 + 6 = 9; 2 + 2 = 4; 5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4;$

$9 + 4 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$  (верно)

### **Приёмы быстрого устного счёта**

**Умножение чисел от 101 до 109 между собой**  
 $(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$

*Порядок действий*

*Примеры*

1) Записываем число 1.

2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей.

3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.

1)  $102 \cdot 104 = 10\,000 + 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608.$

2)  $109 \cdot 108 = 10\,000 + 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 = 10\,000 + 1700 + 72 = 11\,772.$