Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ – школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета Вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М.В.Ломоносова.

Ранее были изданы пособия для 11-х классов по математике, физике и информатике для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Настоящее пособие продолжает эту серию и предназначено для учащихся 9-х классов для подготовки к сдаче ОГЭ (ранее этот экзамен назывался ГИА) по математике.

Отличительной особенностью наших пособий является то, что наряду с традиционными составляющими (теоретический раздел, примеры с решениями, задачи для самостоятельного решения) мы предлагаем **решения** предложенных задач **с идеями** и последовательными **подсказками**, помогающими решить задачу оптимальным способом без посторонней помощи. Это позволит ученику самостоятельно продвигаться в решении задачи так, как если бы за его спиной стоял учитель и направлял ход его мысли при решении трудных задач. Конечно, мы понимаем, что настоящего учителя не может заменить никакая книга, но если учителя рядом нет, то, как показывает опыт предыдущих изданий, наличие грамотных подсказок помогает учащимся самостоятельно научиться решать задачи. С другой стороны, наши пособия помогут молодым учителям вести занятия. Мы знаем на собственном опыте, что не всегда легко направлять ученика так, чтобы он сам догадался, как решить задачу.

По данному пособию можно начинать готовиться к ОГЭ и заранее, например, начиная с 8-го класса. Его также можно использовать и в 10-м классе для того, чтобы начать подготовку к ЕГЭ – тогда будет легче решать задачи из наших пособий для 11-х классов.

Заместитель декана по учебной работе
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Курс рассчитан на закрепление школьного материала и приобретение навыков, необходимых для решения задач ОГЭ и ЕГЭ (базового уровня и первой части профильного уровня).

Предлагаемый курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приёмы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу «*от простого – к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров. Если самостоятельное решение задачи вызывает трудности, рекомендуется воспользоваться системой указаний (подсказок). В случае, если вам не удалось получить правильный ответ или у вас возникли сомнения в правильности вашего решения, рекомендуется изучить решение, предложенное авторами.

Необходимо отметить, что в реальных экзаменационных заданиях в формулировках задач наряду с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$. По этой причине в формулировках задач также встречаются оба вида терминологии.

Рекомендуется школьникам при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ (базовый уровень и первая часть профильного уровня), учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Теория и задачи

1. Алгебра

Современный цивилизованный мир применяет для представления чисел преимущественно арабские цифры. *Арабские цифры* – традиционное название десяти числовых знаков индийского происхождения $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, которые используются для позиционной записи десятичного числа. Арабские цифры появились в южной Индии не позднее V века, были позаимствованы сначала персами, а затем арабами, и в изменённом виде, адаптированном к арабскому письму, были перенесены в Европу в X веке.

В это время в Европе использовалась римская нумерация. *Римские цифры* – семь букв латинского алфавита {I;V;X;L;C;D;M}, которые применяются для обозначения десятичных разрядов и их половин. Цифре I соответствует число 1, цифре V – число 5, цифре X – число 10, и так далее. При записи числа необходимо следовать двум правилам: если бо́льшая цифра стоит перед меньшей, то они складываются; если же, напротив, бо́льшая цифра следует за меньшей, то берётся разность.

Римская нумерация – одна из самых древних. Справедливости ради следует отметить, что она была придумана отнюдь не древними римлянами, а этрусками. Произошло это около 500 года до нашей эры. И в настоящее время римские цифры используются в разных областях (например, для обозначения времени на циферблатах часов, столетий, производных небольших порядков, при нумерации страниц в предисловии книг, в нумерованных списках и др.). Римскими цифрами нумеруют события, имеющие большую значимость – олимпиады, конгрессы, конференции. Исключительно римские цифры используют для нумерации монархов.

Однако непозиционная римская система счисления лишена многих преимуществ, которыми обладают арабские цифры и основанная на них позиционная десятичная система счисления. Именно поэтому арабские цифры достаточно быстро заняли своё место в средневековой Европе. Введение арабских цифр дало мощный импульс развитию естественных наук – математики и физики, астрономии и географии. В XVIII веке при Петре I десятичная система счисления окончательно утвердилась и на Руси, заменив славянскую нумерацию, созданную греческими монахами Кириллом (827—869) и Мефодием (815—885) в IX веке.

В данном учебном пособии для записи чисел используются преимущественно арабские цифры. В разделе 1.1 будут рассмотрены множество целых чисел и его подмножества – натуральные, простые, составные числа.

1.1. Целые числа, делимость

Теоретический материал

Определение. Числа 1, 2, 3, ..., употребляемые для счёта, называются *натуральными. Множество натуральных чисел* обозначается символом $\mathbb{N}$. Множество, состоящее из натуральных чисел и нуля, будем обозначать через $\mathbb{N}_0$.

Сумма и произведение двух натуральных чисел есть натуральные числа. Другими словами, множество натуральных чисел *замкнуто относительно операций сложения и умножения.* Разность и частное двух натуральных чисел не всегда принадлежат $\mathbb{N}$.

Если число n представимо в виде произведения двух натуральных чисел m и k, то есть $n = m \cdot k$, то говорят, что число n *делится* (*нацело*) на m и на k. Данное свойство называют *делимостью* числа n на число m и на число k. При этом каждое из чисел m и k называется *делителем* числа n.

Для обозначения делимости нацело используется знак $\vdots$. Запись $n \vdots k$ означает, что число n кратно числу k. Например, $205 \vdots 5$, то есть число 205 делится нацело на число 5, или $572 \vdots 13$ (число 572 кратно числу 13).

Замечание 1. Определение делимости нацело распространяется на множество $\mathbb{N}_0$, а также на множество целых чисел. В частности, если $n \in \mathbb{N}_0$, то из определения делимости нацело следует, что число 0 делится нацело на любое натуральное число.

Определение. Натуральное число, большее единицы, называется *простым*, если оно не имеет других делителей, кроме единицы и самого себя. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 простые.

Определение. Натуральное число называется *составным*, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя. Например, числа 8, 15, 21, 22, 39, 51 составные.

Определение. Если составное число n делится (нацело) на число 2, оно называется *чётным.* Любое чётное число может быть представлено в виде $n = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Множество чётных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения, то есть сумма и произведение двух чётных чисел есть чётное число.

Определение. Если натуральное число не делится (нацело) на 2, оно называется *нечётным.* Нечётное число может быть представлено в виде $n = 2l - 1$, где $l \in \mathbb{N}$. Заметим, что все простые числа, за исключением числа 2, являются нечётными. Нечётными являются и многие составные числа, например 27, 33, 65.

Множество нечётных чисел замкнуто относительно операции умножения, то есть произведение двух нечётных чисел есть нечётное число.

В общем случае чётность или нечётность суммы и произведения двух натуральных чисел определяются в соответствии со следующими замечаниями.

Замечание 2. Сумма двух чисел одинаковой чётности (либо оба числа чётные, либо оба нечётные) всегда чётна. Сумма двух чисел различной чётности (одно число чётное, второе нечётное) всегда нечётна.

З а м е ч а н и е 3. Если хотя бы один из двух множителей является чётным числом, то произведение этих чисел чётно; если оба числа нечётные, то их произведение нечётно.

Для доказательства замечаний 2 и 3 достаточно представить чётное число в виде $2k$, нечётное число в виде $2l-1$ и определить, в каком из этих двух видов можно представить результат соответствующего арифметического действия.

Утверждение (*основная теорема арифметики*)**.** Каждое натуральное число, кроме единицы, можно разложить на простые множители, то есть представить в виде

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k},$$

где p_1, p_2, ..., p_k – простые числа, k, m_1, m_2, ..., m_k – натуральные числа. Например, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Указанное представление составного числа называют его *каноническим разложением.* Каноническое разложение единственно с точностью до перестановки множителей в правой части равенства.

При изучении свойств натуральных чисел удобно использовать *позиционную запись* натурального числа n в десятичной системе счисления:

$$n = \overline{a_k\, a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0},$$

где a_k, a_{k-1}, ... , a_1, a_0 – цифры, причём $a_k \neq 0$.

Основные признаки делимости натуральных чисел[1]

1. $n \,\vdots\, 2 \iff a_0 \,\vdots\, 2$.
2. $n \,\vdots\, 4 \iff \overline{a_1\, a_0} \,\vdots\, 4$.
3. $n \,\vdots\, 8 \iff \overline{a_2\, a_1\, a_0} \,\vdots\, 8$.
4. $n \,\vdots\, 3 \iff a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \,\vdots\, 3$.
5. $n \,\vdots\, 9 \iff a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0 \,\vdots\, 9$.
6. $n \,\vdots\, 5 \iff a_0 \,\vdots\, 5$.
7. $n \,\vdots\, 25 \iff \overline{a_1\, a_0} \,\vdots\, 25$.
8. $n \,\vdots\, 125 \iff \overline{a_2\, a_1\, a_0} \,\vdots\, 125$.
9. $n \,\vdots\, 10 \iff a_0 = 0$.
10. $n \,\vdots\, 100 \iff a_1 = 0,\ a_0 = 0$.

Основные свойства делимости натуральных чисел

1. $n \,\vdots\, d \implies m \cdot n \,\vdots\, d$.
2. $m \,\vdots\, d,\ n \,\vdots\, d \implies m + n \,\vdots\, d,\ m - n \,\vdots\, d$.

[1] В формулировках признаков делимости под записью $\overline{0\, a_{k-1} \ldots}$ подразумевается число $\overline{a_{k-1} \ldots}$.

3. $m \vdots p,\ n \vdots q \Longrightarrow m \cdot n \vdots p \cdot q$.
4. $m \vdots n,\ n \vdots p \Longrightarrow m \vdots p$.

Определение. Если натуральные числа n_1 и n_2 делятся нацело на одно и то же натуральное число m, то число m называют их *общим делителем.*

Определение. Наибольшее натуральное число, на которое нацело делятся натуральные числа n_1 и n_2, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается НОД(n_1, n_2).

Правило нахождения НОД(n_1, n_2)**:**

- найти каноническое разложение чисел n_1 и n_2;
- выписать все общие простые множители, входящие в каноническое разложение *каждого* из чисел n_1 и n_2;
- возвести каждый из выписанных в предыдущем пункте простых сомножителей в *наименьшую степень*, с которой этот множитель входит в каноническое разложение чисел n_1 и n_2;
- произведение полученных степеней даёт НОД(n_1, n_2).

Если НОД$(n_1, n_2) = 1$, то числа n_1 и n_2 называются *взаимно простыми.*

Определение. Наименьшее натуральное число, которое нацело делится на натуральные числа n_1 и n_2, называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается НОК(n_1, n_2).

Правило нахождения НОК(n_1, n_2)**:**

- найти каноническое разложение чисел n_1 и n_2;
- выписать все общие простые множители, входящие в каноническое разложение *хотя бы одного* из чисел n_1 и n_2;
- возвести каждый из выписанных в предыдущем пункте простых сомножителей в *наибольшую степень*, с которой этот множитель входит в каноническое разложение чисел n_1 и n_2;
- произведение полученных степеней даёт НОК(n_1, n_2).

Для любых двух натуральных чисел n_1, n_2 справедливо равенство

$$\text{НОД}(n_1, n_2) \cdot \text{НОК}(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2.$$

Определение. Множество, состоящее из натуральных чисел n, нуля и отрицательных чисел $-n$ (целых отрицательных чисел), называется *множеством целых чисел* и обозначается символом $\mathbb{Z}$.

Множество целых чисел *замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения.*

Определение. Два числа a и b *равны*, если их разность $a - b$ равна нулю.

Свойства числовых равенств

1. $a = b,\ \ b = c \quad \Longrightarrow \quad a = c$ (транзитивность).
2. $a = b,\ \ c = d \quad \Longrightarrow \quad a + c = b + d$.
3. $a = b,\ \ c = d \quad \Longrightarrow \quad ac = bd$.
4. $a = b \quad \Longrightarrow \quad a + c = b + c$ для любого c.
5. $a = b,\ \ c \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad ac = bc$.

Определение. Число a *больше* числа b, если разность $a - b$ положительна.

Определение. Число a *меньше* числа b, если разность $a - b$ отрицательна.

Определение. Говорят, что справедливо *двойное неравенство* $a > b > c$, если одновременно справедливы неравенства $a > b$ и $b > c$.

Свойства строгих числовых неравенств

1. $a > b > c \quad \Longrightarrow \quad a > c$ (транзитивность).
2. $a > b \quad \Longleftrightarrow \quad a + c > b + c$ для любого c.
3. $a > b,\ \ c > d \quad \Longrightarrow \quad a + c > b + d$ (возможность почленного сложения неравенств одинакового смысла).
4. $a > b,\ \ c < d \quad \Longrightarrow \quad a - c > b - d$ (возможность почленного вычитания неравенств противоположного смысла).
5. $a > b,\ \ c > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ac > bc$.
6. $a > b,\ \ c < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ac < bc$.
7. $a > b > 0,\ \ c > d > 0 \quad \Longrightarrow \quad ac > bd$ (возможность почленного умножения неравенств одинакового смысла для положительных чисел).
8. $a^n > b^n,\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad a > b > 0$ (возможность почленного умножения n одинаковых неравенств для положительных чисел).
9. $a > b > 0,\ \ 0 < c < d \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$ (возможность почленного деления неравенств противоположного смысла для положительных чисел).

Замечание 4. Приведённые свойства числовых равенств и неравенств справедливы не только для целых чисел, но и для любых действительных чисел.

При сравнении двух чисел a и b составляется так называемое *формальное неравенство* $a \vee b$. Символом $\vee$ обозначен знак неравенства, который должен быть определён. Далее алгебраическими преобразованиями, не меняющими знака неравенства, формальное неравенство сводится к очевидному.

При исследовании делимости и решении уравнений в целых числах могут оказаться полезными формулы сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Пусть при решении уравнения в целых числах удалось представить его в виде равенства, в левой части которого стоит произведение нескольких множителей с целочисленными коэффициентами, а в правой – целое число. Далее необходимо разложить число в правой части на множители, рассмотреть всевозможные комбинации значений множителей левой части и решить полученные системы уравнений на множестве целых чисел.

Примеры решения задач

Пример 1. Какое из указанных чисел делится на 4?

1) 12345 **2)** 67890 **3)** 23456 **4)** 78902

Решение. Прежде всего исключим из рассмотрения нечётное число 12345. Далее воспользуемся признаком делимости натурального числа на 4. Рассмотрим число, состоящее из двух последних цифр каждого из трёх оставшихся пятизначных чисел, и определим, делится ли оно на 4:

- $90 = 4 \cdot 22 + 2$, следовательно, второе число не делится на 4;
- $56 = 4 \cdot 14$, значит, $23456 \,\vdots\, 4$;
- $02 = 4 \cdot 0 + 2$, четвёртое число не делится на 4 нацело.

Итак, на 4 делится число 23456, правильный ответ приведён под номером **3**.

Ответ.[1] 3.

Пример 2. Найти все числа вида $\overline{6XX3Y}$, делящиеся на 12.

Решение. Заметим, что $12 = 3 \cdot 4$. Значит, исходное пятизначное число должно делиться и на 3, и на 4.

Согласно признаку делимости на 4 двузначное число $\overline{3Y}$, состоящее из двух последних цифр исходного числа, должно делиться на 4. Таких чисел два: 32 и 36. Значит, $Y = 2$ или $Y = 6$.

Далее воспользуемся признаком делимости на 3.

1) При $Y = 2$ сумма цифр исходного числа есть

$$6 + X + X + 3 + 2 = 11 + 2X = 9 + 2(1 + X).$$

Исходное число будет делиться на 3, если сумма $1 + X$ будет кратна 3, то есть при $X = 2$, $X = 5$ или $X = 8$.

2) При $Y = 6$ сумма цифр исходного числа есть

$$6 + X + X + 3 + 6 = 15 + 2X.$$

Исходное число будет делиться на 3, если слагаемое $2X$ будет кратно 3. Это возможно при $X = 0$, $X = 3$, $X = 6$ или $X = 9$.

Итак, на 12 делятся числа 62232, 65532, 68832, 60036, 63336, 66636 и 69936.

Ответ. 62232, 65532, 68832, 60036, 63336, 66636, 69936.

Пример 3. Сравните числа 10^{20} и 90^{10}.

Решение. Составим формальное неравенство:

$$\begin{aligned} 10^{20} &\ \vee\ 90^{10} \\ (10^2)^{10} &\ \vee\ 90^{10} \\ 100^{10} &\ \vee\ 90^{10}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся свойством 8 о возможности почленного умножения n одинаковых неравенств для положительных чисел и перейдём к равносильному очевидному неравенству

$$100 > 90.$$

[1] В задачах с выбором варианта ответа в ответ пишется номер правильного варианта.

Значит, первое число из условия задачи больше второго.

О т в е т. $10^{20} > 90^{10}$.

П р и м е р 4. Сравните числа 15^7 и 129^4.

Р е ш е н и е. Заметим, что $15 < 16$, поэтому согласно свойству 8 о возможности почленного умножения n одинаковых неравенств для положительных чисел

$$15^7 < 16^7 = (2^4)^7 = 2^{28} = (2^7)^4 = 128^4 < 129^4.$$

Мы доказали, что $15^7 < 129^4$.

О т в е т. $15^7 < 129^4$.

П р и м е р 5. Докажите, что $195^{10} < 14^{20}$.

Р е ш е н и е. Разложим число 195 на множители: $195 = 13 \cdot 15$. Составим формальное неравенство:

$$(13 \cdot 15)^{10} \quad \vee \quad 14^{20}.$$

Заметим, что $13 = 14 - 1$, $15 = 14 + 1$, и применим в левой части неравенства формулу для разности квадратов двух чисел:

$$(14^2 - 1^2)^{10} \quad \vee \quad (14^2)^{10}.$$

Поскольку $14^2 - 1 < 14^2$, из свойства 8 о возможности почленного умножения n одинаковых неравенств для положительных чисел следует, что

$$(14^2 - 1^2)^{10} < (14^2)^{10}, \quad \text{то есть} \quad 195^{10} < 14^{20}.$$

Справедливость неравенства доказана.

П р и м е р 6. Решить уравнение $x^2 + 5xy + 4y^2 = 9$ на множестве целых чисел.

Р е ш е н и е. Разложим выражение в левой части равенства на множители:

$$x^2 + 5xy + 4y^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + xy + 4xy + 4y^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(x+y) + 4y(x+y) = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+y)(x+4y) = 9.$$

Произведение двух целых чисел может быть равно 9 в одном из шести случаев: либо один из множителей равен 1, а второй 9, либо один из множителей равен -1, а второй -9, либо оба множителя равны 3, либо оба множителя равны -3. Составим соответствующие системы линейных уравнений и решим их на множестве целых чисел:

- $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + 4y = 9; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{8}{3} \notin \mathbb{Z}; \quad$ не подходит;

- $\begin{cases} x + y = 9, \\ x + 4y = 1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = -\dfrac{8}{3} \notin \mathbb{Z}; \quad$ не подходит;

- $\begin{cases} x+y=-1, \\ x+4y=-9; \end{cases} \implies y=-\dfrac{8}{3}\notin\mathbb{Z};$ не подходит;

- $\begin{cases} x+y=-9, \\ x+4y=-1; \end{cases} \implies y=\dfrac{8}{3}\notin\mathbb{Z};$ не подходит;

- $\begin{cases} x+y=3, \\ x+4y=3; \end{cases} \iff \begin{cases} x=3, \\ y=0; \end{cases}$

- $\begin{cases} x+y=-3, \\ x+4y=-3; \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3, \\ y=0. \end{cases}$

Итак, исходному уравнению удовлетворяют две пары целых чисел: $(3;0)$ и $(-3;0)$.

О т в е т. $(3;0)$; $(-3;0)$.

Задачи

1. (a) О числах a и b известно, что a – чётное число, b – нечётное число. Какое из следующих чисел при этом условии является нечётным?
   1) ab **2)** $2(a+b)$ **3)** $a+b$ **4)** $a+b+1$

   (b) Известно, что a и b – нечётные числа. Какое из следующих чисел также является нечётным?
   1) $a+b$ **2)** $2ab$ **3)** $a(b+1)$ **4)** $a+b+3$

   (c) Известно, что a и b – чётные числа. Какое из следующих чисел также является чётным?
   1) $a+b+5$ **2)** $a(b+3)$ **3)** $ab+1$ **4)** $(a+5)(b+7)$

   (d) Известно, что a – чётное число, b – нечётное число. Какое из следующих чисел является чётным?
   1) $2a+b$ **2)** $2b+a$ **3)** $ab+3$ **4)** $a+b+2$

2. (a) Какое из указанных чисел не делится на 3?
   1) 12 852 **2)** 1143 **3)** 20 293 **4)** 7239

   (b) Какое из указанных чисел не делится на 8?
   1) 12 344 **2)** 67 896 **3)** 23 456 **4)** 78 902

   (c) Какое из указанных чисел не делится на 9?
   1) 81 234 **2)** 3219 **3)** 30 159 **4)** 8883

   (d) Какое из указанных чисел не делится на 25?
   1) 12 325 **2)** 67 890 **3)** 214 375 **4)** 32 700

3. Найти цифру X такую, что:

   (a) $\overline{5X793X4} \,\vdots\, 3$; (b) $\overline{6996X4} \,\vdots\, 4$; (c) $\overline{3X52X76} \,\vdots\, 8$; (d) $\overline{44X55X66} \,\vdots\, 9$.

4. Найти все пятизначные числа указанного вида такие, что:

   (a) $\overline{64X5Y} \,\vdots\, 36$; (b) $\overline{71X1Y} \,\vdots\, 45$; (c) $\overline{56X3Y} \,\vdots\, 36$; (d) $\overline{517XY} \,\vdots\, 6$ и 9.

5. Найти каноническое разложение числа:
   (a) 1375; (b) 9009; (c) 6936; (d) 39 200.

6. Доказать, что число является составным:
   (a) $17^{14}+21^{30}$; (b) 1517^2-1516^2; (c) $4^{15}-1$; (d) 2^9+3^{1995}.

7. (a) Произведение двух натуральных чисел равно 96. Одно из них на 4 больше другого. Найти эти числа.
   (b) Одно натуральное число в 3 раза больше другого. Если второе число увеличить в 5 раз, то оно станет больше первого на 10. Найти сумму этих чисел.
   (c) Найти два натуральных числа, если известно, что сумма удвоенного первого и утроенного второго равна 23, а учетверённое второе больше утроенного первого на 8.
   (d)* Даны три натуральных числа. Известно, что сумма их квадратов равна сумме всех попарных произведений, а одно из чисел равно 7. Найти два остальных числа.

8. Найти наибольший общий делитель следующих чисел: (a) НОД$(120, 144)$;
   (b) НОД$(72, 108)$; (c) НОД$(144, 420, 252)$; (d) НОД$(66, 190, 348, 772)$.

9. Определите, являются ли взаимно простыми числа:
   (a) 51 и 76; (b) 1081 и 2924; (c) 645 и 646; (d) 165 и 2233.

10. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел:
    (a) НОК$(372, 156)$; (b) НОК$(20\,000, 78\,400)$;
    (c) НОК $(144, 420, 252)$; (d) НОК $(92, 173, 448, 1015)$.

11. Сравните числа: (a) $297\cdot 299$ и 298^2; (b) $543\cdot 547$ и 545^2;
    (c) $152\cdot 248$ и 200^2; (d) $13\cdot 15\cdot 17$ и 15^3.

12. Сравните числа: (a) 19^4 и $16\cdot 18\cdot 20\cdot 22$; (b) 13^4 и $11\cdot 12\cdot 14\cdot 15$;
    (c) 77^2 и $6\cdot 8\cdot 10\cdot 12$; (d) $2^2\cdot 5^2\cdot 91$ и 97^2.

13. Сравните числа: (a) 2^{300} и 3^{200}; (b) 5^{100} и 2^{200}; (c) 10^{32} и 90^{16};
    (d) 2^{35} и 33^7.

14. Докажите, что: (a) $30^{10} < 6^{20}$; (b) $24^{25} > 2^{100}$; (c) $3^{68} < 90^{17}$;
    (d) $60^{13} < 4^{39}$.

15. Сравните числа: (a) 31^{11} и 17^{14}; (b) 19^{10} и 9^{13}; (c) 21^7 и 7^{11};
    (d) 11^{14} и 31^9.

16. Решить уравнение в целых числах: (a) $y^2-x^2=13$; (b) $x^2+11=y^2$;
    (c)* $x^2=y^2+2y+14$; (d)* $x^2+4x=y^2+3$.

17. Решить уравнение в целых числах: (a) $xy=x-y$; (b) $x^2+xy-7=0$;
    (c) $x^2-y^2+x+y=4$; (d)* $xyz+xz+yz+z+1=0$.

18. Решить уравнение в целых числах: (a) $2x^3 + xy = 7$; (b) $xy + 5 = y^3$;
(c) $xy = x^3 + 1$; (d)* $xy + y = x^3 + 2$.

19. Решить уравнение в целых числах: (a) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$;
(b) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 7$; (c) $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$; (d) $12x^2 - 17xy + 6y^2 = 3$.

20. (a) Сколько существует вариантов составления суммы 2 руб. 31 коп. из монет достоинством 3 и 20 коп.?
(b) Сколькими способами можно разлить 18 литров варенья по банкам объёмом 2 и 3 литра?
(c) Сколько можно предложить вариантов полной загрузки автомашины грузоподъёмностью 15 тонн блоками массой 1,5 и 2 тонны?
(d) Сколько существует вариантов составления суммы 4 руб. 96 коп. из монет достоинством 2 и 15 коп.?

1.2. Дроби

Дробь – число, состоящее из целого числа долей единицы. Основы теории обыкновенных дробей были заложены древнегреческими и индийскими математиками. Впервые в Европе математический термин «дробь» появился в начале XIII века.

На Руси дробные числа упоминались уже в XVI веке. Сначала они назывались долями, затем ломаными числами. В 1703 году известный русский математик, преподаватель в Школе математических и навигацких наук в Москве Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739) издал первый в России учебник по математике под названием «Арифметика». Во 2-й части этой книги «О числах ломаных или с долями» автор подробно изложил учение о дробях.

Теоретический материал

По способу записи дроби делятся на две группы: обыкновенные и десятичные.

Определение. *Обыкновенная* (или *простая*) *дробь* – число, представимое в виде $\dfrac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$ – числитель дроби, $q \in \mathbb{N}$ – знаменатель дроби.

Определение. Обыкновенная дробь называется *правильной*, если модуль её числителя меньше знаменателя. Например, дроби $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{4}{8}$, $-\dfrac{12}{13}$ правильные. Все остальные обыкновенные дроби называются *неправильными*, например $-\dfrac{8}{7}$, $\dfrac{9}{9}$, $\dfrac{2}{1}$.

Определение. Дробь, записанная в виде целого числа и правильной дроби, называется *смешанной*. Например, $\dfrac{11}{7}$ – простая дробь, а $1\dfrac{4}{7}$ – смешанная.

Основное свойство дробей. Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же целое число, не равное нулю, то получится дробь, равная исходной, то есть

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot k}{q \cdot k}; \quad p, k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0; \quad q \in \mathbb{N}.$$

Если числитель и знаменатель дроби разделить на их общий множитель, то получится дробь, равная исходной. Деление числителя и знаменателя дроби на их общий множитель называется *сокращением* дроби.

О п р е д е л е н и е. Дробь $\dfrac{p}{q}$ называется *несократимой*, если числа p и q не имеют общих делителей. Всякую обыкновенную дробь можно записать в виде несократимой дроби.

Множество всех обыкновенных несократимых дробей называется *множеством рациональных чисел* и обозначается символом $\mathbb{Q}$.

Множество рациональных чисел *замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления* (если делитель не равен нулю).

Любая обыкновенная дробь может быть записана в *десятичном представлении*

$$\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} ...} =$$

$$= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10^1 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + ... \, .$$

Десятичные дроби могут быть *конечными* или *бесконечными.* Например, обыкновенная дробь $\dfrac{15}{4}$ представляется в виде конечной десятичной дроби: $\dfrac{15}{4} = 3{,}75$, а число π в десятичном представлении является бесконечной дробью: $\pi = 3{,}14159265...$.

Бесконечные десятичные дроби в свою очередь являются либо *периодическими*, либо *непериодическими.* У бесконечной периодической десятичной дроби после запятой стоит бесконечно много цифр, причём, начиная с некоторого разряда после запятой, одна цифра или упорядоченная последовательная группа цифр повторяется. Эту цифру или группу цифр называют *периодом.* Например, $45{,}67803030303... = 45{,}678(03)$ – периодическая десятичная дробь с периодом, равным 03. Бесконечные непериодические дроби являются *иррациональными числами* и будут рассмотрены в следующем разделе.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Каждая бесконечная периодическая дробь может быть представлена в виде обыкновенной дроби, то есть является рациональным числом.

Утверждение 2. Обыкновенную дробь $\dfrac{p}{q}$ можно записать в виде конечной десятичной дроби тогда и только тогда, когда её знаменатель не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5.

Чтобы *перевести обыкновенную дробь в десятичную*, нужно числитель дроби разделить на знаменатель, предварительно приведя обыкновенную дробь к несократимому виду. Если знаменатель несократимой дроби содержит простые множители, отличные от 2 и 5, то результат деления будет периодической десятичной дробью. Например, $\dfrac{15}{18} = \dfrac{5}{6} = 0{,}8(3)$. Если же знаменатель представляет собой произведение простых множителей 2 и 5, то целесообразно домножить числитель и знаменатель дроби на произведение множителей 2 и 5 так, чтобы знаменатель принял вид 10^k, где $k \in \mathbb{N}$; в этом случае десятичная дробь будет конечной. Например, $\dfrac{7}{16} = \dfrac{7}{2^4} = \dfrac{7 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \dfrac{7 \cdot 625}{10^4} = \dfrac{4375}{10^4} = 0{,}4375$.

Любое положительное десятичное число, как целое, так и дробное, можно записать в виде произведения двух множителей – числа с одной значащей цифрой до запятой и числа 10 в целой степени. Такая запись десятичного числа называется стандартным видом.

Определение. *Стандартный вид* положительного числа — это выражение вида $a{\cdot}10^n$, где $1 \le a < 10$, $n \in \mathbb{Z}$. Число n называется *порядком числа.* Например, число $579{,}531$ в стандартном виде записывается так: $5{,}79531 \cdot 10^2$.

Для того чтобы привести положительное десятичное число к стандартному виду, можно воспользоваться следующим **алгоритмом**:

- выписать значащую часть исходного числа;
- поставить после первой значащей цифры десятичную запятую;
- определить, на сколько разрядов сместилась десятичная запятая по сравнению с её положением в исходном числе (то есть сдвиг десятичной запятой); пусть сдвиг равен k;
- учесть направление сдвига по следующему правилу: если после сдвига десятичной запятой получено число, меньшее исходного, то полученное число необходимо умножить на 10^k; если после сдвига десятичной запятой получено число, большее исходного, то его необходимо умножить на 10^{-k}; если сдвига десятичной запятой не было, то исходное число уже имело стандартный вид;
- в результате получим число, записанное в стандартном виде.

Итак, рациональные числа могут быть записаны в виде обыкновенной дроби (простой или смешанной) или в виде десятичной дроби (конечной или периодической). Производить арифметические действия с дробями, записанными поразному, сложно. Для упрощения решения задач на дроби применяются следующие подходы:

- если в задаче есть смешанные дроби, их необходимо обратить в простые;
- если в задаче есть как конечные десятичные, так и обыкновенные дроби, можно обратить десятичные дроби в обыкновенные и применить правила действий над обыкновенными дробями.

Заметим, что периодические десятичные дроби также можно перевести в обыкновенные. Такие задачи будут рассмотрены в разделе, посвящённом геометрической прогрессии.

Напомним основные приёмы, используемые при преобразовании числовых выражений, в том числе рациональных:

- приведение к наименьшему общему знаменателю;
- вынесение общего множителя за скобки;
- разложение на множители;
- сокращение числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое выражение;
- использование формул сокращённого умножения (см. раздел 1.1).

С понятием дроби тесно связаны понятия *процент* и *масштаб*.

Определение. *Процент* – одна сотая часть некоторой величины. Процент обозначается знаком %. Например, 1% от 5000 рублей составляет 50 рублей; 7% от 5 кг составляет 350 г. Доля, соответствующая одному проценту, равна 0,01.

Определение. *Масштаб* – отношение размера изображения к размеру изображаемого объекта. В частности, масштаб карты есть отношение длины отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на местности.

Примеры решения задач

Пример 1. Запишите число $\dfrac{17}{187}$ в виде десятичной дроби.

Решение. Прежде всего проверим, не является ли исходная дробь сократимой. Для этого разложим знаменатель на простые множители:

$$187 = 11 \cdot 17.$$

Числитель и знаменатель имеют общий делитель 17. Значит, дробь сократима. Приведём её к несократимому виду:

$$\frac{17}{187} = \frac{17}{11 \cdot 17} = \frac{1}{11}.$$

Знаменатель дроби равен 11. Поскольку число 11 не может быть получено перемножением простых множителей 2 и 5, соответствующая десятичная дробь согласно утверждению 2 будет периодической. Разделим числитель на знаменатель:

$$\frac{1}{11} = 0{,}09090909\ldots\ .$$

Период дроби равен 09. Итак,

$$\frac{17}{187} = 0{,}(09).$$

Ответ. 0,(09).

Пример 2. Площадь Северного Ледовитого океана составляет 14 750 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}475 \cdot 10^8$ км^2 **2)** $1{,}475 \cdot 10^7$ км^2 **3)** $1{,}475 \cdot 10^6$ км^2 **4)** $14{,}75 \cdot 10^6$ км^2

Решение. Переведём площадь Северного Ледовитого океана в квадратные километры. Получим 14 750 000 км^2. Затем воспользуемся алгоритмом приведения десятичного числа к стандартному виду:

- значащая часть числа 14 750 000 равна 1475;
- поставим после первой значащей цифры запятую, получим 1,475;
- сдвиг десятичной запятой $k = 7$;
- поскольку $1{,}475 < 14\,750\,000$, умножим число 1,475 на 10^7;
- в результате получим $1{,}475 \cdot 10^7$ (км^2).

Правильный ответ приведён под номером **2**.

О т в е т. 2.

П р и м е р 3. В 2013 году российские школы закончил $708\,231$ человек. Выразите количество выпускников 2013 года в миллионах человек.

1) 0,0708231 млн чел. **2)** 0,708231 млн чел.
3) 7,08231 млн чел. **4)** 70,8231 млн чел.

Р е ш е н и е. По определению 1 миллион равен 10^6. Значит, для того чтобы выразить количество выпускников 2013 года в миллионах человек, нужно исходное число разделить на 10^6:

$$\frac{708\,231}{10^6} = 708\,231 \cdot 10^{-6} = 0{,}708231 \text{ (млн чел.)}$$

Номер правильного ответа **2**.

О т в е т. 2.

П р и м е р 4. Найдите значение выражения $\dfrac{7}{8} : 14 + 15 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$.

Р е ш е н и е. Приведём слагаемые к обыкновенным дробям с одинаковыми знаменателями и сложим:

$$\frac{7}{8} : 14 + 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{8 \cdot 14} + \frac{15}{16} = \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 1.$$

О т в е т. 1.

П р и м е р 5. Общая численность обучающихся в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова в 2014 году составила $3{,}9 \cdot 10^4$ человек, а численность профессорско–преподавательского и научно–исследовательского состава — $10\,000$ человек. Сколько студентов в среднем приходится на одного преподавателя?

1) 0,3 чел. **2)** 3,9 чел. **3)** 39 чел. **4)** 390 чел.

Р е ш е н и е. Среднее число студентов, приходящихся на одного преподавателя, определяется как отношение численности студентов к численности преподавателей. Для упрощения расчётов запишем числа в числителе и знаменателе дроби в стандартном виде:

$$\frac{3{,}9 \cdot 10^4}{10\,000} = \frac{3{,}9 \cdot 10^4}{10^4} = 3{,}9 \text{ (чел.)}$$

Номер правильного ответа **2**.

О т в е т. 2.

Задачи

1. Запишите в виде периодической десятичной дроби число:

   (a) $-\dfrac{1}{3}$; (b) $\dfrac{5}{6}$; (c) $\dfrac{12}{33}$; (d) $\dfrac{4}{7}$.

2. (a) Запишите число $0,0058$ в стандартном виде.
   1) $5{,}8\cdot 10^{-6}$ **2)** $5{,}8\cdot 10^{-5}$ **3)** $5{,}8\cdot 10^{-4}$ **4)** $5{,}8\cdot 10^{-3}$

   (b) Запишите десятичное число $0,00097$ в стандартном виде.
   1) $9{,}7\cdot 10^{-6}$ **2)** $9{,}7\cdot 10^{-5}$ **3)** $9{,}7\cdot 10^{-4}$ **4)** $9{,}7\cdot 10^{-3}$

   (c) Приведите число $0,6422$ к стандартному виду.
   1) $6{,}422\cdot 10^{-3}$ **2)** $6{,}422\cdot 10^{-2}$ **3)** $6{,}422\cdot 10^{-1}$ **4)** $64{,}22\cdot 10^{-2}$

   (d) Запишите число $0,00385$ в стандартном виде.
   1) $38{,}5\cdot 10^{-4}$ **2)** $3{,}85\cdot 10^{-3}$ **3)** $3{,}85\cdot 10^{-2}$ **4)** $3{,}85\cdot 10^{3}$

3. (a) (ГИА-2010.1) Площадь территории Испании составляет 506 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?
   1) $5{,}06\cdot 10^{2}$ км^2 **2)** $5{,}06\cdot 10^{3}$ км^2 **3)** $5{,}06\cdot 10^{4}$ км^2 **4)** $5{,}06\cdot 10^{5}$ км^2

   (b) Площадь территории Миннесоты (штата на Среднем Западе США) составляет 225 тыс. км^2. Запишите эту величину в стандартном виде.
   1) $2{,}25\cdot 10^{-5}$ км^2 **2)** $22{,}5\cdot 10^{4}$ км^2 **3)** $2{,}25\cdot 10^{5}$ км^2 **4)** $2{,}25\cdot 10^{7}$ км^2

   (c) Согласно данным первой переписи населения Лондона, в 1801 году в городе проживало 959 300 человек. Запишите это число в стандартном виде.
   1) $9{,}593\cdot 10^{6}$ чел. **2)** $9{,}593\cdot 10^{5}$ чел. **3)** $9{,}5935\cdot 10^{4}$ чел. **4)** $9{,}593\cdot 10^{3}$ чел.

   (d) Общая численность населения Российской Федерации по итогам Всероссийской переписи населения 2010 года составила 142 857 тыс. человек. Как эта величина записывается в стандартном виде?
   1) $14{,}2857\cdot 10^{7}$ чел. **2)** $1{,}42857\cdot 10^{7}$ чел.
   3) $1{,}42857\cdot 10^{8}$ чел. **4)** $1{,}42857\cdot 10^{9}$ чел.

4. (a) Найдите десятичную дробь, равную $1{,}27\cdot 10^{-4}$.
   1) 0,0127 **2)** 0,00127 **3)** 0,000127 **4)** 0,0000127

   (b) Найдите десятичную дробь, равную $1{,}18\cdot 10^{-5}$.
   1) 0,00000118 **2)** 0,0000118 **3)** 0,000118 **4)** 0,00118

   (c) Найдите десятичную дробь, равную $5{,}498\cdot 10^{-3}$.
   1) 0,05498 **2)** 0,005498 **3)** 0,0005498 **4)** 0,00005498

   (d) Найдите десятичную дробь, равную $8{,}8\cdot 10^{-8}$.
   1) 0,00000000088 **2)** 0,0000000088 **3)** 0,000000088 **4)** 0,00000088

5. (a) Марс находится на расстоянии $2{,}27\cdot 10^{8}$ км от Солнца. Выразите это расстояние в миллионах километров.
   1) 2270 млн км **2)** 227 млн км **3)** 22,7 млн км **4)** 2,27 млн км

   (b) Меркурий находится на расстоянии $5{,}79\cdot 10^{7}$ км от Солнца. Выразите это расстояние в миллионах километров.
   1) 5790 млн км **2)** 579 млн км **3)** 57,9 млн км **4)** 5,79 млн км

(c) Среднее расстояние между центрами Земли и Луны составляет 384 500 км. Выразите эту величину в миллионах километров.

1) 384,5 млн км **2)** 38,45 млн км **3)** 3,845 млн км **4)** 0,3845 млн км

(d) В одном веке $3{,}1536 \cdot 10^9$ секунд. Выразите эту величину в миллионах секунд.

1) 3,1536 млн с **2)** 31,536 млн с **3)** 315,36 млн с **4)** 3153,6 млн с

6. (a) Для биологической лаборатории купили оптический микроскоп, который даёт возможность различить объекты размером до $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

1) 0,0000025 мм **2)** 0,000025 мм **3)** 0,00025 мм **4)** 0,0025 мм

(b) Диаметр линзы объектива театрального бинокля составляет 25 мм. Выразите эту величину в километрах.

1) 0,00000025 км **2)** 0,0000025 км **3)** 0,000025 км **4)** 0,00025 км

(c) Масса самых мелких птиц семейства колибри составляет 1,6 грамма. Выразите эту величину в килограммах.

1) 0,0016 кг **2)** 0,016 кг **3)** 0,16 кг **4)** 0,000165 кг

(d) Самые крупные жирафы достигают высоты 5,9 метра. Выразите высоту такого жирафа в километрах.

1) 0,059 км **2)** 0,0059 км **3)** 0,00059 км **4)** 0,000059 км

7. Установите соответствие между выражениями и их значениями.

(a) (ГИА-2012.1)

А) $\frac{4}{5} + 0{,}4$ **Б)** $1 : \frac{2}{3}$ **В)** $\frac{0{,}5}{1 - 0{,}7}$

1) $\frac{2}{3}$ **2)** 1,2 **3)** 1,5 **4)** $1\frac{2}{3}$

(b) **А)** $\frac{4}{5} - 0{,}3$ **Б)** $\frac{6}{7} : \frac{2}{3}$ **В)** $\frac{0{,}4}{1 + 0{,}6}$

1) $\frac{9}{7}$ **2)** 0,25 **3)** 1,1 **4)** $\frac{1}{2}$

(c) **А)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ **Б)** $2 : \frac{4}{7}$ **В)** $\frac{\frac{1}{2} + 0{,}75}{0{,}25}$

1) 3,5 **2)** 5 **3)** $\frac{1}{5}$ **4)** $\frac{1}{12}$

(d) **А)** $\frac{2}{9} \cdot 0{,}3$ **Б)** $0{,}77 : 11$ **В)** $\frac{3}{4} + \frac{4}{3}$

1) $\frac{1}{15}$ **2)** 2,12 **3)** $2\frac{1}{12}$ **4)** 0,07

8. (a) Найдите значение выражения $(1{,}4 \cdot 10^{-7}) \cdot (4 \cdot 10^4)$.

1) 5600 **2)** 0,056 **3)** 0,0056 **4)** 0,00056

(b) Найдите значение выражения $(1{,}2 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-8})$.

1) 0,00072 **2)** 0,0072 **3)** 0,072 **4)** 7200

ФЕДОТОВ МИХАИЛ ВАЛЕНТИНОВИЧ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, заместитель декана по учебной работе факультета ВМК МГУ имени М.В.Ломоносова. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения, численные методы, математические модели нелинейной оптики. Автор более 100 научных и учебно-методических работ.

Организовал и долгое время возглавлял Учебный центр факультета (1998–2014), в состав которого входят подготовительные курсы.

ЗОЛОТАРЁВА НАТАЛЬЯ ДМИТРИЕВНА – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. Преподаватель подготовительных курсов МГУ, член экзаменационной комиссии МГУ. Область научных интересов: адаптивно измельчаемые сетки для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценка погрешности численных методов для решения ОДУ.

Сертифицированный эксперт ГИА-11 по математике. Автор более 60 научных и учебно-методических работ.

СЕМЕНДЯЕВА НАТАЛЬЯ ЛЕОНИДОВНА – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Область научных интересов: математическое моделирование физико-химических процессов; нелинейная динамика; дифференциальные уравнения; методы Монте-Карло. Автор около 50 научных работ.

На протяжении многих лет ведет занятия на подготовительных курсах МГУ, принимает участие в работе экзаменационной комиссии Московского университета, является сертифицированным экспертом ГИА-11 по математике. Автор более 10 учебных пособий для студентов и абитуриентов.

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

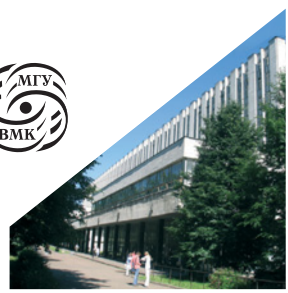
– на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;

– для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;

– сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Президент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***



Сайт факультета ВМК МГУ:
http://www.cs.msu.ru

ISBN 978-5-93208-287-4