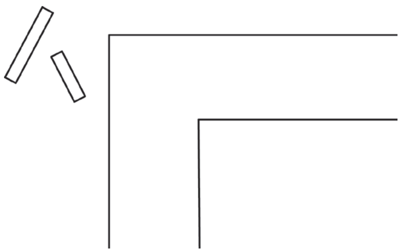
1. Соседские задачи

Кто-то думает, что геометрия есть только в школьном учебнике и в расписании уроков на неделю. А ведь она повсюду сопровождает человека с самого детства.

Как-то раз…

1) Весной я очень любил, как и многие мои ровесники, пускать самодельные кораблики в ручьях, которые текли по канавам вдоль улиц. И во время одной из таких забав я увидел условие настоящей геометрической задачи:

Вот ров с прямыми углами и две доски, длина каждой доски немного короче ширины рва. Как с помощью этих досок переправиться через ров? Ни гвоздей, ни молотка нет. Ров не перепрыгнуть, не переплыть.



2) Комната и пять стульев. Задача — расставить пять стульев в прямоугольной комнате так, чтобы у каждой стены стояло по два стула и все стулья располагались вдоль стен.

3) Как-то раз к нам домой пришел сосед Трофим Петрович и в руках держал круглую столешницу. Вот, говорит, проблема: купил столешницу, а не отмечено, куда крепить ножку. «Тебе повезло, — отвечает мой отец. — Петя как раз заканчивает 7 класс, его знаний геометрии должно хватить, давай его попросим. Вот, сынок, задача: найти центр круга».

И мне, не без помощи отца, удалось найти центр этой столешницы абсолютно точно. Попробуйте и вы догадаться, как это можно сделать.

4) В этот же вечер Трофим Петрович пригласил нас с отцом пить чай за новым столом. Отец попросил кофе и говорит:

— Нет ли у тебя молока?

— Есть.

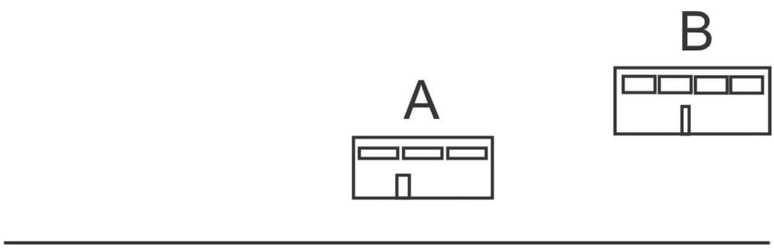
— Вот и замечательно.

Итак, слушай условие. Вот я беру ложку молока и выливаю в чашку с кофе, тщательно размешиваю, условимся считать, что равномерно. Теперь беру ложку получившегося напитка и выливаю в чашку с молоком.

Вопрос: чего больше — кофе в молоке или молока в кофе?

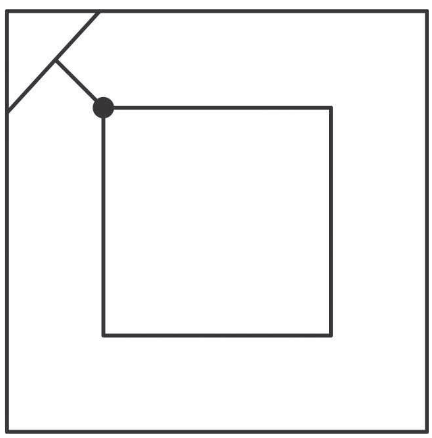
5) А профессия у нашего соседа была самая что ни на есть современная. Трофим Петрович был логист — специалист по транспортным потокам. И вот как-то раз, зная наше увлечение математическими задачами, он обратился за помощью. Вот, извольте, вашему вниманию условие и рисунок.

Вот железная дорога — на рисунке обозначена прямой линией. Вот склад А и склад В находятся по одну сторону от ж/д, но на разных расстояниях от нее. Нужно на ж/д установить станцию, где будет склад С, но сделать это нужно так, чтобы сумма отрезков АС и СВ (т. е. АС + ВС) была наименьшей. Путь из А в С, а потом из С в В был наименьшим.

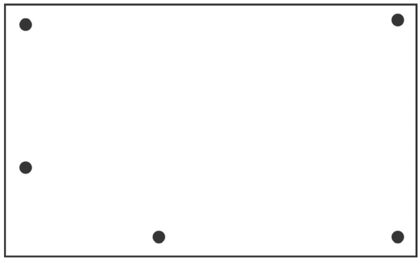


Ответы и решения «Соседских задач»

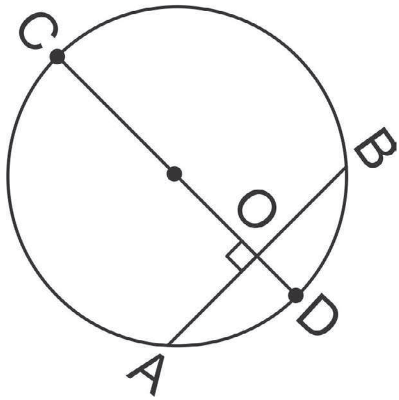
1) Вот расположение досок, которое позволит перейти через ров.



2) Три стула по углам и два по сторонам, прилегающим к пустому углу.



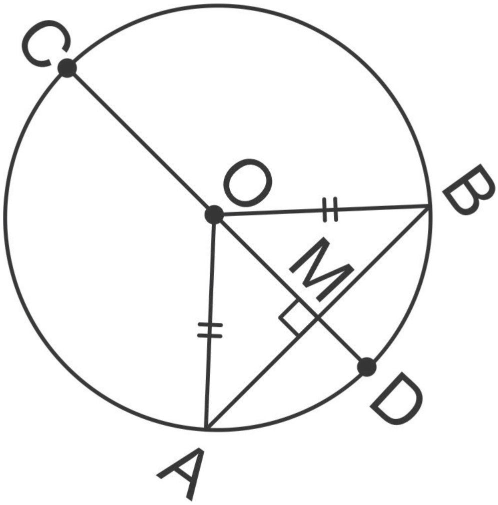
3) Найти центр круга. Проведем хорду AB (хорда — это отрезок, соединяющий две точки на окружности) и построим серединный перпендикуляр CD — он и будет диаметром. А теперь с помощью циркуля и линейки найдем его середину. Это и будет центр круга.



Доказательство:

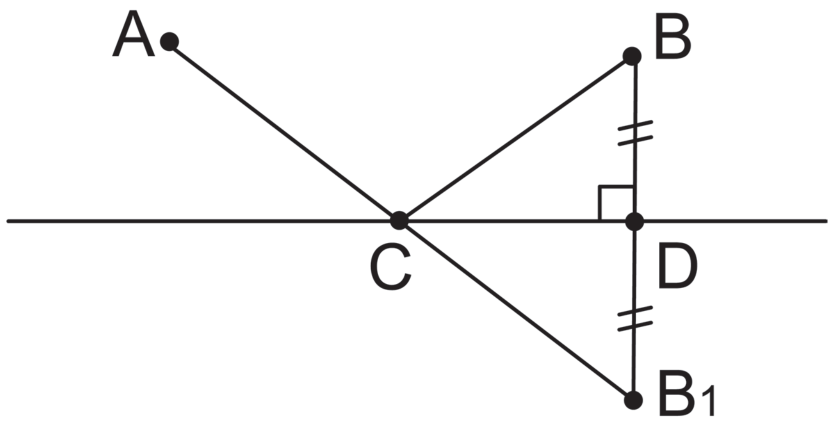
ΔAOB — равнобедренный, так как OA и OB — радиусы =>

OM — медиана и высота => мы делаем вывод, что центр O лежит на серединном перпендикуляре и хорде AB. И когда продлим OM, получим диаметр CD. Остается найти его середину.



4) Представьте себе в чашке n ложек кофе, тогда при равномерном размешивании в каждую ложку кофе попало по одной капельке молока, т. е. n штук, а одна $(n + 1)$-я капля осталась в той самой ложке, некогда полной молока. А место молочных капель, которые ушли в кофе, заняли такие же капли кофе. Вывод: в молоко попало столько кофе, сколько вылилось в кофе.

5) Где поставить точку C, чтобы AC + CB было наименьшим? Что является кратчайшим расстоянием между точками? Расстояние по прямой. Опустим у точки B перпендикуляр BD на нашу прямую и отложим на его продолжении точку B_1, такую, что $BD = DB_1$. Соединим точки A и B_1. Получим на пересечении отрезка AB_1 и нашей прямой точку C. AB_1 — кратчайшее расстояние между точками A и B_1. Отрезок $AB_1 = AC + CB_1$. Рассмотрим ΔBCB_1. У него отрезок CD является медианой и высотой, следовательно, ΔBCB_1 равнобедренный и $CB_1 = CB \Rightarrow AC + CB = AC + CB_1 \Rightarrow$ точка C — искомая точка.



2. Невозможное — возможно

Невозможное — возможно!

Невозможно? Не, возможно!

Почему «Математика и фокусы»? Я знаю точно: невозможное возможно. Это мои давние увлечения. Я учитель математики, и этим все сказано, а еще фокусник, известный в узких кругах)))).

Если перевести на английский, то прозвучит это так: math and magic, т. е. магия математики, волшебство математики.

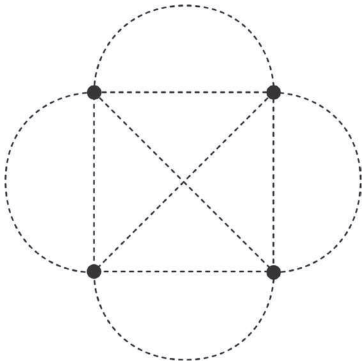
И действительно, многие математические задачи и их решения не просто похожи на фокус, а являются настоящим чудом.

1) Вот и греческий математик Фалес Милетский поразил египетского фараона, когда измерил высоту пирамиды Хеопса без подъема на вершину пирамиды. По тем временам это было настоящим волшебством! Как ему это удалось?

2) Как-то я спросил у своих учеников-пятиклассников: «Можно ли обойти у нас в школе все классы, не проходя дважды ни через одну дверь?»

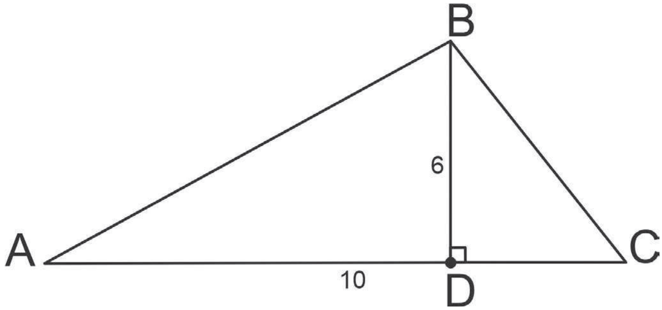
И получил мгновенный ответ: нет, конечно, наше путешествие с таким условием оборвется да вот хотя бы в кабинете математики, ведь у него одна дверь, зайти и выйти придется через нее (не окном же пользоваться — мы на третьем этаже). Таким образом, чтобы условие выполнилось, необходимо иметь еще одну дверь.

Кажется, я начинаю делать подсказки, которые помогут ответить на следующий вопрос: сможете ли вы начертить данную фигуру одним росчерком, не проводя дважды ни по одной линии и не отрывая руки? Вот вам чистый лист с пунктирными фигурками. Дерзайте!



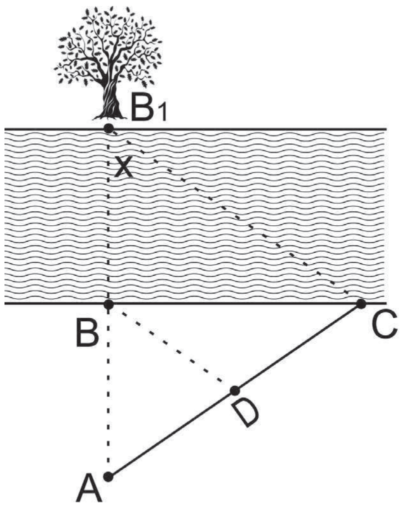
3) Задача, которую исключили из экзамена в Америке.

Эту задачу благополучно на протяжении десяти лет решали американские школьники на выпускных экзаменах. Но дети, учившиеся в российских школах и волею судьбы сдававшие экзамены в американских школах, не могли решить эту задачу. Заинтригованы? Вот условие: в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10, а высота, проведенная из вершины прямого угла, — 6. Найти площадь этого треугольника.



4) А теперь просто фантастическая задача!!!

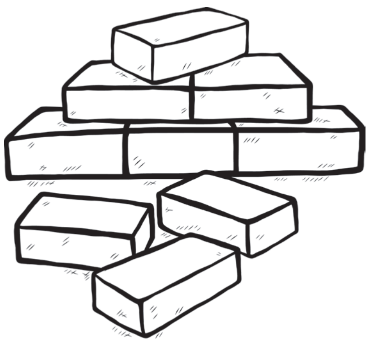
Однажды, подойдя к берегу реки, мой друг Джон Иваныч заявил: спорим, я вычислю ширину реки, т. е. найду расстояние от нашего берега до противоположного, как говорится, на кончике пера. И нарисовал на листке вот такой чертеж. Восстановите ход его мысли, если на нашем берегу можно выполнять любые измерительные действия, а на другой берег нет возможности перебраться.



5) Как вы думаете, что общего у комнаты, в которой вы живете, и у простого строительного кирпича? Вот что про свою комнату написала ученица челябинской школы Даша Иванова: «Не знаю, как вы, а я живу в параллелепипеде! У всех стены как стены, а у меня грани. Мой параллелепипед многогранен, как и мои таланты. Одна грань представляет собой прозрачный прямоугольник, из которого видны чудесные серые одинаковые девятиэтажные параллелепипеды нашего славного города. Над моей головой висит люстра в точке пересечения диагоналей верхней грани моего параллелепипеда. У всех это называется углами, а у меня вершины, там чисто и тепло, там 90°. И плинтус прибит не к полу, а к четырем горизонтальным ребрам. Всем удачи в изучении геометрии».

Вот и кирпич — тоже параллелепипед. Комната — уникальный параллелепипед, внутри которого можно выполнить любые измерительные работы, например измерить длину его диагонали рулеткой. А как измерить диагональ кирпича? Именно измерить, а не вычислить.

Нарисовать стопку кирпичей.



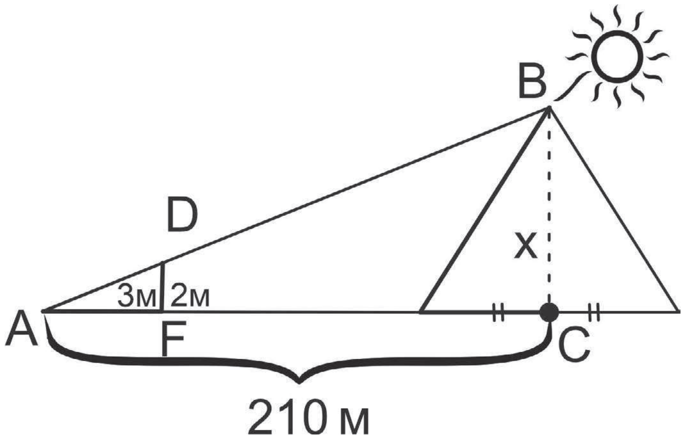
Ответы и решения

1) Фалес выбрал солнечный день для своих манипуляций. Приготовил двухметровый шест. Поставил шест так, чтобы концы тени от пирамиды и шеста совпали, и в этом месте мгновенно сделал отметку. А теперь внимание на рисунок.

Измеряем расстояние от конца тени A до основания шеста — 3 м, до основания высоты пирамиды — 210 м. Видим два подобных треугольника ΔADF и ΔABC =>

$$=> \frac{2}{x} = \frac{3}{210} => x = \frac{210 \cdot 2}{3} = 140$$

И вот вам задание для самостоятельной работы. А как вычислить расстояние от конца тени до основания высоты пирамиды, если это основание внутри?



2) Эта задача — аналог задачи о кенигсбергских мостах, которую решил великий Леонард Эйлер. Он решал на примере островов и мостов. А мы решим на примере комнат и дверей или входов и выходов.

Итак, чтобы пройти комнату по нашему условию, для каждого входа должен быть и выход. Одним словом, комната должна иметь четное количество дверей. На нашем рисунке точки вершины играют роль комнат (у Эйлера это острова), а линии — двери (входы и выходы) (у Эйлера мосты). Смотрите: в наших вариантах-комнатах по пять дверей — нечетное количество. Вывод: эту фигуру невозможно начертить одним росчерком, не проводя дважды ни по одной линии.