



---

# Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>17</b>
От издательства	18
Предисловие к первому изданию	19
<b>I. Моделирование финансов компаний и предприятий</b>	<b>21</b>
<b>1. Элементарные финансовые расчеты</b>	<b>23</b>
1.1. Введение	23
1.2. Приведенная стоимость и чистая приведенная стоимость	24
1.3. Внутренняя ставка доходности и таблицы возврата средств	25
1.4. Неоднозначные решения для внутренней ставки доходности	28
1.5. График периодических выплат по кредиту	29
1.6. Примеры расчета будущей стоимости	30
1.7. Пенсионная задача — усложненная задача о будущей стоимости	32
1.8. Расчет непрерывно накапливаемого дохода	35
Упражнения	38
<b>2. Расчет стоимости капитала</b>	<b>45</b>
2.1. Введение	45
2.2. Дивидендная модель Гордона	46
2.3. Расчет стоимости акционерного капитала фирмы Abbot Laboratories по модели Гордона	49
2.4. Ценовая модель рынка капитала	50
2.5. Использование линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ) для вычисления стоимости капитала Abbot	52
2.6. Расчет стоимости долга	54
2.7. Расчет стоимости долга фирмы Abbot	55
2.8. Средневзвешенная стоимость капитала (СВСК)	58
2.9. Когда модели не работают	59
2.10. Заключение	62
Упражнения	63
Приложение 1. Рекомендации по вычислению $\beta$ для долга	65
Приложение 2. Почему $\beta$ является хорошей мерой риска. Показатели портфеля и отдельных акций	67

Приложение 3. Получение данных из Интернета	68
<b>3. Моделирование финансового отчета предприятия</b>	<b>73</b>
3.1. Введение	73
3.2. Применение финансовых моделей: теория и первый пример	73
3.3. Поток свободных средств (ПСС): расчет средств, производимых предприятием	80
3.4. Использование ПСС для оценки фирмы и ее капитала	84
3.5. Некоторые замечания о процедуре оценивания	85
3.6. Анализ чувствительности	87
3.7. Использование долга в качестве замыкателя	88
3.8. Использование планируемого коэффициента “долг/акционерный капитал”	91
3.9. Финансирование проекта: график выплаты долга	92
3.10. Заключение	95
Упражнения	96
Приложение 1: расчет потоков свободных средств при отрицательном доходе	98
Приложение 2: ускоренная амортизация в гипотетических моделях	99
<b>4. Гипотетические модели и оценивание предприятий</b>	<b>103</b>
4.1. Введение	103
4.2. Исходная информация	103
4.3. Построение финансовой модели	105
4.4. Вычисление потоков свободных средств (ПСС)	108
4.5. Вычисление средневзвешенной стоимости капитала	110
4.6. Анализ чувствительности решения	111
4.7. Заключение	111
Упражнения	112
<b>5. Финансовый анализ арендных отношений</b>	<b>113</b>
5.1. Введение	113
5.2. Элементарный пример	113
5.3. Аренда и финансирование фирмы: метод эквивалентного займа	115
5.4. Задача для арендодателя: расчет максимальной приемлемой величины арендной платы	117
5.5. Остаточная стоимость имущества и другие соображения	120
Упражнения	121
Приложение. Налоговые и бухгалтерские аспекты арендных отношений	122

<b>6. Аренда имущества, частично приобретенного в кредит</b>	<b>127</b>
6.1. Введение	127
6.2. Пример	129
6.3. Анализ денежных потоков по ЧПС или ВСД	131
6.4. Смысл ВСД	133
6.5. Бухгалтерский аспект: многофазный метод	136
6.6. Сравнение ставки доходности по многофазному методу и ВСД	139
Упражнения	140
<b>II. Моделирование портфелей ценных бумаг</b>	<b>141</b>
<b>7. Введение в модели портфелей ценных бумаг</b>	<b>143</b>
7.1. Введение	143
7.2. Простой пример с двумя активами	143
7.3. Вычисление среднего дохода и дисперсии портфеля	147
7.4. Средний доход и дисперсия портфеля	149
7.5. Эффективные портфели	152
7.6. Заключение	154
Упражнения	154
Приложение 1. Учет дивидендов	157
Приложение 2. Различные способы вычисления сложного процента	159
<b>8. Вычисление ковариационной матрицы</b>	<b>161</b>
8.1. Введение	161
8.2. Общие сведения	162
8.3. Иллюстративный пример	163
8.4. Другие способы вычисления ковариационной матрицы	164
8.5. Модель одного индекса	166
Упражнения	168
<b>9. Расчет эффективных портфелей без ограничения прав продажи</b>	<b>169</b>
9.1. Введение	169
9.2. Определения и обозначения	169
9.3. Некоторые теоремы об эффективных портфелях и ЦМРК	171
9.4. Пример расчета эффективной границы	175
9.5. Расчет рыночного портфеля: линия рынка капитала (ЛРК)	181
9.6. ЛРК при наличии безрискового актива	183
Упражнения	183

## 10 Содержание

Приложение	185
<b>10. Расчет “бета” и линии рынка ценных бумаг</b>	<b>189</b>
10.1. Введение	189
10.2. Тестирование ЦМРК	189
10.3. Тестирование ЦМРК: общие правила	191
10.4. Причины получения неблагоприятных результатов	192
10.5. Неэффективность “рыночного портфеля”	193
10.6. Настоящий рыночный портфель и тестирование ЦМРК	198
10.7. Есть ли польза от ЦМРК	199
Упражнение	200
<b>11. Эффективные портфели при запрете на продажу без покрытия</b>	<b>201</b>
11.1. Введение	201
11.2. Пример расчета	203
11.3. Эффективная граница	205
11.4. Программа на VBA	207
11.5. Заключение	208
Упражнения	209
<b>12. Стоимость, подверженная риску</b>	<b>211</b>
12.1. Введение	211
12.2. Простейший пример	211
12.3. Определение квантилей в Excel	213
12.4. Задача трех активов: важность ковариационной матрицы	215
12.5. Генерирование тестовых данных	217
Приложение. Пример перемешивания данных в Excel	219
<b>III. Модели ценообразования опционов</b>	<b>227</b>
<hr/>	
<b>13. Введение в опционы</b>	<b>229</b>
13.1. Основные термины и определения	229
13.2. Некоторые примеры	231
13.3. Схемы расчетов и прибыли по опционам	235
13.4. Схемы работы с опционами: прибыль от портфелей опционов и акций	239
13.5. Теоремы об арбитражных операциях с опционами	241
Упражнения	247

<b>14. Биномиальная модель цены на опционы</b>	<b>251</b>
14.1. Биномиальная модель с двумя датами	251
14.2. Цены возможных состояний	253
14.3. Биномиальная модель для нескольких периодов	254
14.4. Оценивание американских опционов по биномиальной модели	259
14.5. Реализация биномиальной модели на VBA	261
14.6. Оценивание американского опциона на продажу	262
14.7. Сходимость биномиальной модели к цене Блэка–Скоулза	265
14.8. Нестандартные опционы и биномиальная модель: пример	266
Упражнения	268
<b>15. Логнормальное распределение</b>	<b>273</b>
15.1. Введение	273
15.2. Свойства курсов акций	274
15.3. Логнормальное распределение курсов акций и геометрическая диффузия	277
15.4. Свойства логнормального распределения	280
15.5. Моделирование логнормальной эволюции цен	282
15.6. Технический анализ	285
15.7. Расчет параметров логнормального распределения	287
Упражнения	288
<b>16. Модель Блэка–Скоулза</b>	<b>291</b>
16.1. Введение	291
16.2. Модель Блэка–Скоулза	291
16.3. Реализация модели на языке VBA	293
16.4. Расчет подразумеваемой волатильности	294
16.5. Функция VBA для нахождения подразумеваемой дисперсии	295
16.6. “Тонка за сверхприбылью” с помощью опционов	297
Упражнения	300
<b>17. Страхование портфелей ценных бумаг</b>	<b>303</b>
17.1. Введение: страхование дохода от акций	303
17.2. Страхование портфелей сложных активов	304
17.3. Пример	305
17.4. Некоторые свойства схем страхования портфелей	308
17.5. Численное моделирование схем страхования портфелей	309
17.6. Страхование общего дохода от портфеля	313

## 12 Содержание

17.7. Опционы, включенные в стоимость портфеля	316
Упражнения	318
<b>18. Опциональные сделки</b>	<b>319</b>
18.1. Введение	319
18.2. Простой пример опциона на продолжение	320
18.3. Опцион на отказ от проекта	323
18.4. Оценивание опциона на отказ как последовательности опционов на продажу	328
18.5. Заключение	330
Упражнения	330
<b>19. Пределы досрочного исполнения</b>	<b>333</b>
19.1. Введение	333
19.2. Зачем досрочно исполнять опцион на продажу	333
19.3. Предел досрочного исполнения для опционов на продажу	335
19.4. Программа на VBA для нахождения предела досрочного исполнения	336
19.5. Замечание об эквивалентности по дивидендам	339
19.6. Досрочное исполнение американских опционов на покупку: расчетный пример	340
19.7. Программа на VBA для предела досрочного исполнения опциона на покупку акций с дивидендами	342
Упражнения	344
Приложение. Доказательство	345
<b>IV. Облигации и дюрация</b>	<b>349</b>
<b>20. Дюрация</b>	<b>351</b>
20.1. Введение	351
20.2. Примеры	351
20.3. Смысл величины дюрации	353
20.4. Характер изменения дюрации	357
20.5. Дюрация облигаций с неравномерными выплатами	358
20.6. Дюрация при непостоянной временной структуре	363
Упражнения	365
<b>21. Схемы иммунизации</b>	<b>367</b>
21.1. Введение	367
21.2. Базовая модель иммунизации	367

21.3. Численный пример	369
21.4. Выпуклость: продолжение эксперимента по иммунизации	372
21.5. Попытка усовершенствования Упражнения	374 376
<b>22. Моделирование временной структуры процентных ставок</b>	<b>377</b>
22.1. Введение	377
22.2. Полиномиальные регрессии	377
22.3. Изменение коэффициентов со временем	380
22.4. Теоретические модели временных структур	382
<b>23. Доходность облигаций с поправкой на дефолт</b>	<b>385</b>
23.1. Введение	385
23.2. Расчет ожидаемого дохода в рамках одного периода	387
23.3. Задача для марковской цепи с несколькими периодами и состояниями	388
23.4. Пример расчета	391
23.5. Источники статистической информации	393
23.6. Перерасчет ожидаемого дохода на случай неравных периодов	396
23.7. Вычисление коэффициентов “бета” Упражнения	398 398
<b>24. Дюрация и задача дешевой поставки</b>	<b>401</b>
24.1. Введение	401
24.2. Общая модель дешевой поставки	401
24.3. Экстремальная купонная ставка как общее решение задачи дешевой поставки	403
24.4. Выбор оптимального срока погашения для дешевой поставки: случай постоянной временной структуры	403
24.5. Графики оптимальной поставки и дюрации в Excel	404
24.6. Заключение	411
<b>V. Технические вопросы</b>	<b>413</b>
<b>25. Случайные числа</b>	<b>415</b>
25.1. Введение	415
25.2. Тестирование генератора Excel	416
25.3. Генерирование случайных чисел с нормальным распределением Упражнения	419 423

<b>26. Таблицы данных</b>	<b>425</b>
26.1. Введение	425
26.2. Пример	425
26.3. Пример	426
26.4. Построение двухмерной таблицы данных	427
26.5. Замечание по оформлению: сокрытие ячеек с формулами	428
26.6. Таблицы данных Excel как массивы	429
Упражнения	430
<b>27. Матрицы</b>	<b>431</b>
27.1. Введение	431
27.2. Матричные операции	432
27.3. Обращение матриц	434
27.4. Решение систем линейных уравнений	435
Упражнения	436
<b>28. Метод Гаусса–Зейделя</b>	<b>439</b>
28.1. Введение	439
28.2. Простой пример	439
28.3. Строгое решение	440
28.4. Заключение	440
Упражнение	441
<b>29. Функции Excel</b>	<b>443</b>
29.1. Введение	443
29.2. Финансовые функции	443
29.3. Функции для работы с массивами	447
29.4. Статистические функции	450
29.5. Регрессия в Excel	451
29.6. Функции проверки условий и поиска	456
29.7. Функции ранжирования	457
<b>30. Некоторые приемы работы с Excel</b>	<b>459</b>
30.1. Введение	459
30.2. Быстрое копирование: ввод данных в соседний столбец	459
30.3. Многострочные ячейки	460
30.4. Текстовые функции	460
30.5. Обновляемые заголовки графиков	461
30.6. Вставка греческих букв	463

30.7. Верхние и нижние индексы	464
30.8. Именованные ячейки	465
30.9. Скрытые ячейки	466
<b>VI. Введение в Visual Basic for Applications</b>	<b>469</b>
<b>31. Функции, определяемые пользователем</b>	<b>471</b>
31.1. Введение	471
31.2. Ввод функции в редакторе VBA	471
31.3. Добавление справки в мастер функций	475
31.4. Исправление ошибок в VBA	477
31.5. Условное выполнение: оператор If	479
31.6. Оператор Select Case	483
31.7. Использование функций Excel в VBA	485
31.8. Использование своих функций внутри аналогичных Упражнения	488
Приложение	491
<b>32. Типы и циклы</b>	<b>495</b>
32.1. Введение	495
32.2. Использование типа	495
32.3. Переменные и их типы	497
32.4. Операции сравнения и логические операции	500
32.5. Циклы	503
Упражнения	509
<b>33. Макросы и взаимодействие с пользователем</b>	<b>513</b>
33.1. Введение	513
33.2. Макроподпрограммы	513
33.3. Вывод данных и функция MsgBox	518
33.4. Ввод данных и функция InputBox	520
33.5. Модули	521
Упражнения	523
<b>34. Массивы</b>	<b>529</b>
34.1. Введение	529
34.2. Простые массивы	529
34.3. Многомерные массивы	532
34.4. Динамические массивы и оператор ReDim	533
34.5. Присваивание массивов	539

34.6. Переменные типа Variant, содержащие массивы	540
34.7. Массивы как параметры функций	541
Упражнения	546
<b>35. Объекты</b>	<b>549</b>
35.1. Введение	549
35.2. Объекты таблицы: введение	549
35.3. Объект-диапазон Range	551
35.4. Оператор with	554
35.5. Коллекции	555
35.6. Имена	558
35.7. Обзоратель объектов	561
Упражнения	562
Приложение. Иерархия объектов Excel	565
<b>36. Список литературы</b>	<b>567</b>
Главы 1–4: финансы и оценивание предприятий	567
Главы 5–6: арендные отношения	567
Главы 7–11: портфели ценных бумаг	568
Глава 12: стоимость, подверженная риску	568
Главы 13–17: опционы и страхование портфелей	569
Глава 18: опциональные сделки	570
Главы 20–21: дюрация и иммунизация	571
Глава 22: моделирование временной структуры	572
Глава 24: задача дешевой поставки	574
Глава 25: случайные числа	575
<b>Предметный указатель</b>	<b>577</b>

---

# 9 Расчет эффективных портфелей без ограничения прав продажи

---

## 9.1. Введение

В этой главе рассматриваются все расчеты, необходимые для применения обеих версий классической ценовой модели рынка капитала, или ЦМРК (*capital asset pricing model — CAPM*): как версии, основанной на безрисковом активе (*risk-free asset*), так и ЦМРК с нулевым “бета” по Блэку (Black, 1972), в которой не требуется допущения о безрисковости актива. Вы сами увидите, как легко выполнять соответствующие расчеты с помощью средств электронных таблиц.

Глава имеет следующую структуру. Вначале даются некоторые предварительные определения и обозначения. Затем формулируются основные теоретические положения (доказательства даны в приложении к главе). В последующих разделах рассматривается применение этих положений, а именно:

- расчет эффективных портфелей;
- расчет эффективной границы.

В этой главе больше теоретического материала, чем в большинстве других глав нашей книги. В разделе 9.3 излагаются теоремы, лежащие в основе расчетов как эффективных портфелей, так и *линии рынка ценных бумаг, ЛРЦБ (security market line — SML)*, и рассматриваемые далее в главе 10. Если материал раздела 9.3 покажется вам сложным, пропустите его при первом чтении и попытайтесь разобраться в примере расчета из раздела 9.4.

---

## 9.2. Определения и обозначения

На протяжении этой главы будут использоваться описанные далее обозначения. Пусть имеется  $N$  подверженных риску активов, средний ожидаемый доход с каждого из которых обозначим как  $E(r_i)$ . Переменная  $R$  будет обозначать вектор-столбец ожидаемых доходов с этих активов:

$$R = \begin{bmatrix} E(r_1) = \bar{r}_1 \\ E(r_2) = \bar{r}_2 \\ \vdots \\ E(r_N) = \bar{r}_N \end{bmatrix}.$$

Обозначение  $S$  будет относиться к ковариационной матрице размерности  $N \times N$ :

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \dots & \sigma_{N1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{N2} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{1N} & \sigma_{2N} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}.$$

Портфелем рискованных (подверженных риску) активов (там, где нам не грозят разночтения, будем употреблять просто слово *портфель*) будем называть вектор-столбец  $x$ , координаты которого в сумме дают 1:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Каждая координата  $x_i$  представляет долю портфеля, вложенную в  $i$ -й актив.

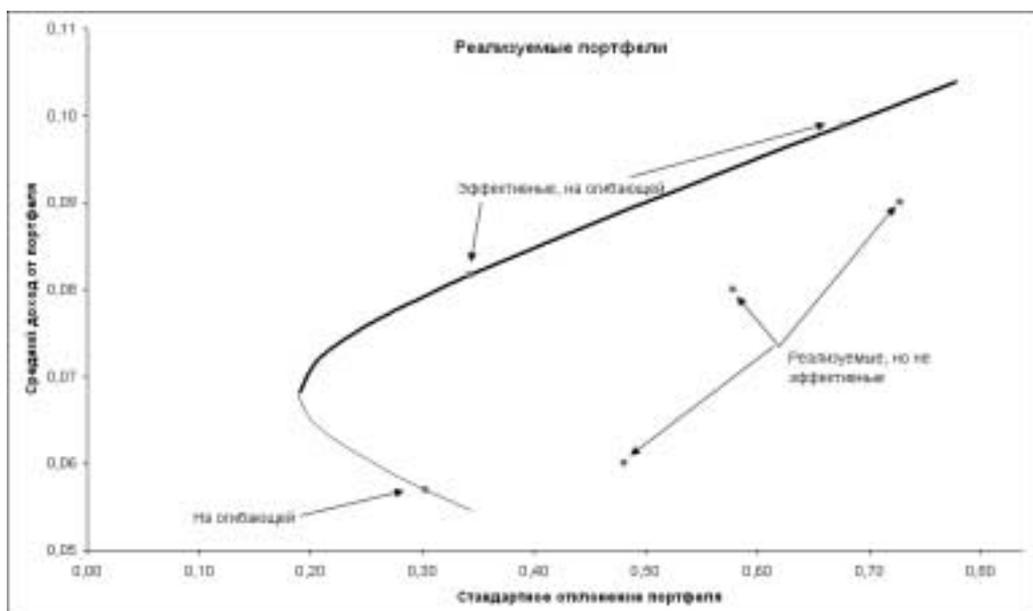
Ожидаемый (средний) доход с портфеля  $x$  —  $E(r_x)$  — вычисляется путем умножения  $x$  на  $R$ :

$$E(r_x) = x^T \cdot R \equiv \sum_{i=1}^N x_i E(r_i)$$

Дисперсия дохода с портфеля  $x$ , обозначаемая  $\sigma_x^2 \equiv \sigma_{xx}$ , представляет собой произведение  $x^T S x = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$ .

Ковариация между доходами с двух портфелей  $x$  и  $y$ ,  $\text{Ковар}(x, y)$ , определяется как произведение  $\sigma_{xy} = x^T S y = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i y_j \sigma_{ij}$ . Обратите внимание, что  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ .

На приведенном далее графике наглядно показаны четыре понятия. *Реализуемым портфелем* называется любой портфель, доли активов в котором в сумме дают единицу. *Реализуемым множеством* называется множество средних доходов и дисперсий реализуемых портфелей; реализуемое множество представляет собой область внутри и справа от кривой. Реализуемый портфель находится на *огибающей* реализуемого множества, если для заданного среднего дохода его дисперсия принимает минимальное значение. Наконец, портфель  $x$  называется *эффективным портфелем*, если доход с него максимален для заданной дисперсии (или стандартного отклонения). Таким образом, портфель  $x$  является эффективным, если нет другого портфеля  $y$ , такого, что  $E(R_y) > E(R_x)$  и при этом  $\sigma_y \leq \sigma_x$ . Множество всех эффективных портфелей называется *эффективной границей*; это множество изображается на графике жирной линией.



### 9.3. Некоторые теоремы об эффективных портфелях и ЦМРК

В приложении к этой главе приведены доказательства утверждений, которые излагаются ниже и представляют собой основу для расчетов ЦМРК. Все приведенные теоремы используются при выводе эффективной границы и линии рынка ценных бумаг; примеры конкретных числовых расчетов даются в следующих разделах и в главе 10.

**Теорема 1.** Пусть  $c$  — некоторая константа. Тогда обозначение  $R - c$  относится к следующему вектору-столбцу:

$$R - c = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \vdots \\ E(r_N) - c \end{bmatrix}.$$

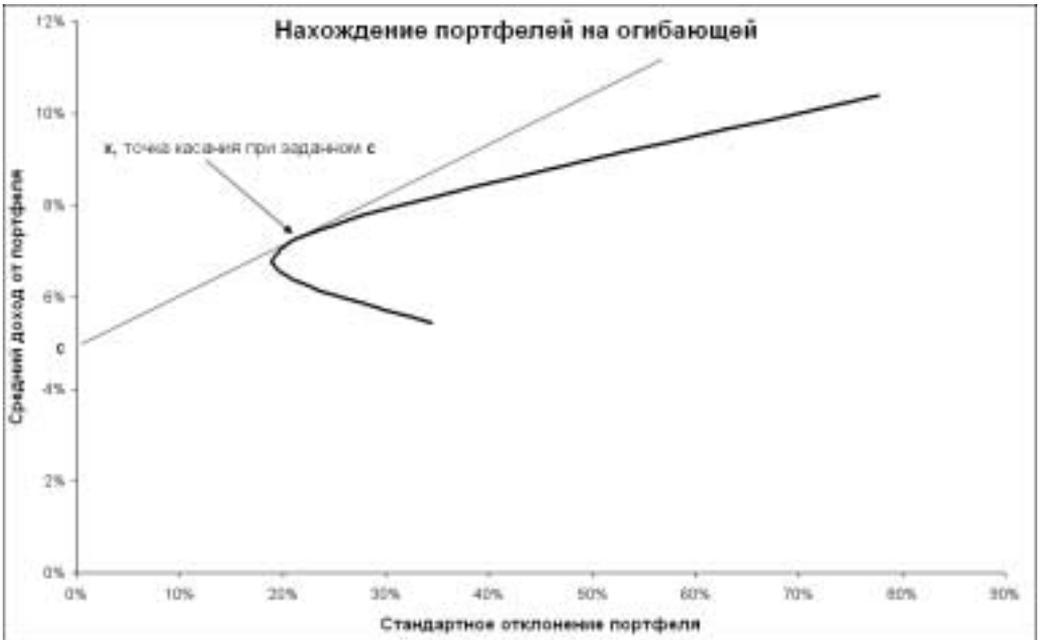
Пусть вектор  $z$  является решением системы линейных уравнений  $R - c = Sz$ . Тогда из этого решения можно получить портфель  $x$  на огибающей реализуемого множества:

$$z = S^{-1} \{R - c\};$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \text{ где } x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^N z_j}.$$

Более того, утверждается, что все портфели на огибающей имеют указанный вид.

*Наглядное представление.* Строгое доказательство данной теоремы приведено в приложении к этой главе, однако геометрический смысл ее ясен и очевиден. Предположим, мы выбрали константу  $c$  и пытаемся найти эффективный портфель  $x$ , для которого проведенная из точки  $c$  прямая касается границы реализуемого множества.



Теорема 1 как раз и описывает методику нахождения  $x$ ; более того, в теореме утверждается, что все портфели на огибающей (в частности, все эффективные портфели) строятся только по этой методике. Таким образом, если  $x$  — портфель на огибающей, то существует константа  $c$  и вектор  $z$ , такие, что  $Sz = R - c$  и  $x = z / \sum_i z_i$ .

**Теорема 2.** Согласно этой теореме, впервые доказанной Блэком (Black, 1972), зная любые два портфеля на огибающей, можно восстановить всю огибающую. Если заданы два портфеля,  $x = \{x_1, \dots, x_N\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_N\}$ , то все портфели на огибающей являются выпуклыми линейными комбинациями  $x$  и  $y$ . Это означает, что для любой заданной константы  $a$  приведенный далее портфель лежит на огибающей эффективной границы:

$$ax + (1 - a)y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1 - a)y_1 \\ ax_2 + (1 - a)y_2 \\ \vdots \\ ax_N + (1 - a)y_N \end{bmatrix}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $y$  — любой портфель, принадлежащий огибающей. Тогда для любого другого портфеля (как на огибающей, так и вне ее) справедливо соотношение

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$ .

Более того,  $c$  является средним ожидаемым доходом от портфеля  $z$ , ковариация которого с портфелем  $y$  равна нулю:

$$c = E(r_z), \quad \text{Ковар}(y, z) = 0$$

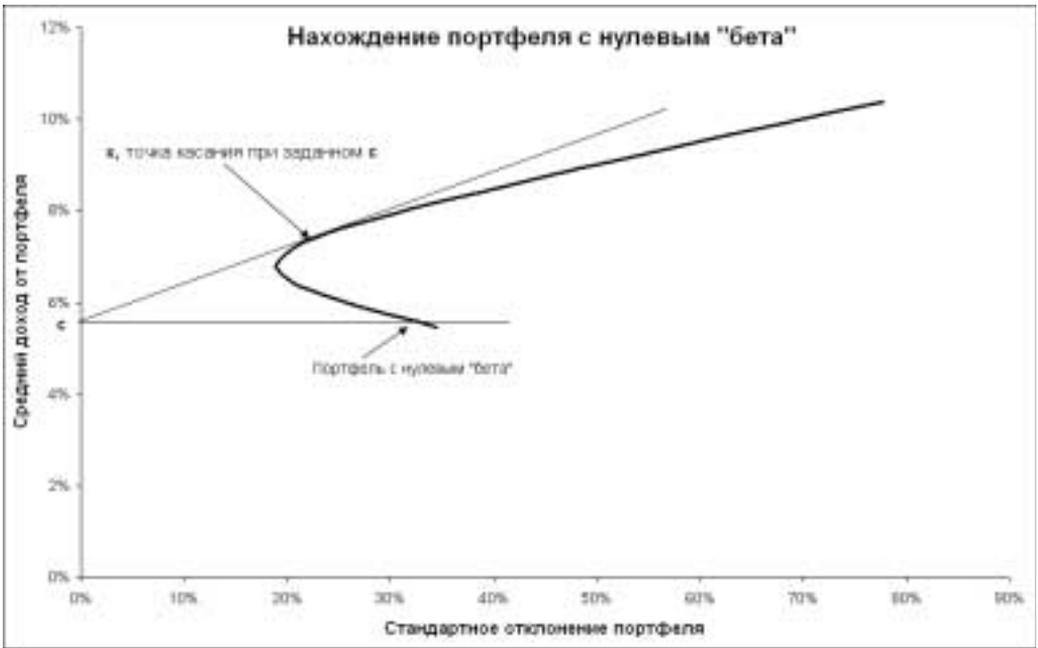
*Примечания.* Если  $y$  принадлежит огибающей, то регрессия любого произвольного портфеля  $x$  по  $y$  дает линейное соотношение. Эта версия ЦМРК обычно называется ЦМРК с нулевым “бета” по Блэку в честь Фишера Блэка (Fisher Black), в работе которого за 1972 г. получен рассматриваемый результат. В данной модели линия рынка ценных бумаг Шарпа–Линтнера–Моссена (Sharpe–Lintner–Mossin) заменена ЛРЦБ, в которой роль безрискового актива играет портфель с нулевым показателем “бета” по отношению к некоторому портфелю  $y$ , принадлежащему огибающей. Отметим, что этот результат справедлив для любого портфеля  $y$  с огибающей.

Если рыночный портфель  $M$  является эффективным (“если” здесь очень важно, как будет показано позже), то результат Блэка также справедлив для рыночного портфеля. Таким образом, ЛРЦБ справедлива при замене  $c$  на  $E(r_z)$ :

$$E(r_x) = E(r_z) + \beta_x [E(r_y) - E(r_z)],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,M)}{\sigma_M^2}$ ,  $\text{Ковар}(z, M) = 0$ .

Из всех результатов, касающихся ЦМРК, данная версия ЛРЦБ больше всего исследовалась эмпирически. В главе 10 демонстрируется вычисление  $\beta$  и расчет ЛРЦБ; далее рассматривается критика Ролла (Roll) в адрес эмпирических исследований. Из приведенного далее графика легко видеть, как можно найти портфель с нулевым “бета” на огибающей реализуемого множества.



Если имеется безрисковый актив, теорема 3 сводится к частному случаю линии рынка ценных бумаг для классической ценовой модели рынка капитала.

**Теорема 4.** Если имеется безрисковый актив с доходом  $r_f$ , то существует портфель  $M$  на огибающей, такой, что

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_y) - r_f],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ .

*Примечание.* Если все инвесторы выбирают свои портфели только на основе среднего дохода и стандартного отклонения, то  $M$  — это портфель, составленный из *всех подверженных риску активов в экономике* в долях, пропорциональных рыночной цене актива. Конкретизируем данное утверждение. Предположим, имеется  $N$  подверженных риску активов; пусть рыночная цена актива  $i$  равняется  $V_i$ . Тогда рыночный портфель будет иметь следующие весовые (долевые) коэффициенты:

$$\text{Доля актива } i \text{ в } M = \frac{V_i}{\sum_{h=1}^N V_h}.$$

Это утверждение впервые было доказано Шарпом (Sharpe, 1964), Линтнером (Lintner, 1965) и Моссенем (Mossin, 1966).

**Теорема 5.** Верно утверждение, обратное к теореме 4. Предположим, имеется такой портфель  $y$ , что для любого портфеля  $x$  выполняется следующее соотношение:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$ .

В этом случае портфель  $y$  является эффективным.

Из всех перечисленных особо следует выделить теоремы 3 и 5. В них утверждается, что *соотношение линии рынка ценных бумаг выполняется тогда и только тогда, когда для всех портфелей можно выполнить регрессию по портфелю, принадлежащему огибающей*. Как убедительно показал Ролл (Roll, 1977, 1978), данные теоремы доказывают тот факт, что для проверки ЦМРК недостаточно просто показать, что выполняется соотношение ЛРЦБ<sup>1</sup>. Единственный способ — это проверить, *является ли реальный рыночный портфель эффективным в терминах среднего дохода и дисперсии*. К этой теме мы еще вернемся в главе 10.

Далее в этой главе мы исследуем практический смысл приведенных теорем на численных примерах, решенных в среде Excel.

## 9.4. Пример расчета эффективной границы

В этом разделе мы с помощью Excel будем рассчитывать эффективную границу. Рассмотрим пакет инвестиций, состоящий из четырех подверженных риску активов со следующими ожидаемыми доходами и ковариационной матрицей.

	A	B	C	D	E	F
4						Средний
5	Ковариационная матрица					доход
6	0,400	0,030	0,000	0,000		0,06
7	0,030	0,200	0,001	-0,060		0,05
8	0,000	0,001	0,300	0,000		0,07
9	0,000	-0,060	0,000	0,100		0,08

Наш расчет будет выполняться в два этапа. Вначале мы найдем два портфеля на огибающей реализуемого множества (раздел 9.4.1), а затем в разделе 9.4.2 построим эффективную границу.

### 9.4.1. Поиск двух портфелей на огибающей

Согласно теореме 2, для нахождения всей эффективной границы необходимо найти два эффективных портфеля. По теореме 1 для этого нужно решить систему  $R - c = Sz$  относительно  $z$  для двух различных значений  $c$ . Для каждого из  $c$  путем решения системы находим вектор  $z$ , а затем для нахождения эффективного портфеля принимаем  $x_i = z_i / \sum_h z_h$ .

Значения  $c$ , для которых следует решить систему, могут выбираться более-менее произвольно; для облегчения задачи вначале решим систему для  $c = 0$ . Получим следующий результат.

<sup>1</sup> Статья Ролла 1977 г. чаще цитируется и отличается более полным изложением материала, однако его же статья 1978 г. гораздо легче для восприятия и понимания. Если вас интересуют затронутые вопросы, начните с нее.

	В	С
12	z	x
13	0,1019	0,0540
14	0,5667	0,2998
15	0,1141	0,0605
16	1,1052	0,5057

Для этого в ячейках устанавливаются формулы, приведенные ниже.

- Для  $z$ : =МУМНОЖ(МОБР(А6:D9), F6:F9). Диапазон А6:D9 содержит ковариационную матрицу, а в ячейках F6:F9 записаны средние доходы от активов.
- Для  $x$ : в каждой ячейке записывается соответствующее значение  $z$ , разделенное на сумму всех  $z$ . Например, ячейка С13 содержит формулу =В13/СУММ(В\$13:В\$16).

Теперь решим систему относительно какой-нибудь другой константы  $c$ . Для этого потребуются еще несколько формул, как видно из следующей таблицы.

	А	В	С	Д	Е	Г
3						Среднее
4						минус
5	Ковариационная матрица				доход	константа
6	0,400	0,030	0,020	0,000	0,06	-0,005
7	0,030	0,200	0,001	-0,060	0,05	-0,015
8	0,020	0,001	0,300	0,030	0,07	0,005
9	0,000	-0,060	0,030	0,100	0,08	0,015
10						
11				Константа	0,065	
12		z	x		z	y
13		0,1019	0,0540		-0,0101	-0,1163
14		0,5667	0,2998		-0,0353	-0,4067
15		0,1141	0,0605		0,0047	0,0544
16		1,1052	0,5057		0,1274	1,4687

Каждая ячейка вектора-столбца под заголовком “Среднее минус константа” содержит средний доход актива за вычетом константы  $c$  (в данном случае  $c = 0,065$ ). Второй вектор  $z$  и соответствующий портфель на огибающей  $y$  имеют следующий вид.

	Е	Г
12	z	y
13	-0,0101	-0,1163
14	-0,0353	-0,4067
15	0,0047	0,0544
16	0,1274	1,4687

Этот вектор  $z$  вычисляется аналогично первому с той разницей, что в ячейках используется функция МУМНОЖ(МОБР(А6:D9), G6:G9).

В заключение расчета получим средние доходы, стандартные отклонения и ковариации доходов для портфелей  $x$  и  $y$ .

19	Трансп.х				
20		0,0540	0,2998	0,0605	0,5957
21					
22	Трансп.у				
23		-0,1163	0,4067	0,0544	1,4687
24					
25	Сред(x)	0,0693		Сред(y)	0,0940
26	Дисп(x)	0,0367		Дисп(y)	0,3341
27	Сигма(x)	0,1917		Сигма(y)	0,5780
28					
29	Ковар(x,y)	0,0498			
30	Корр(x,y)	0,4496			

Транспонированные векторы  $x$  и  $y$  вставлены с использованием функции ТРАНСП (функции для работы с массивами рассматриваются в главе 29). Теперь средние, дисперсии и ковариации вычисляются таким образом:

- Сред( $x$ ) — по формуле МУМНОЖ(трансп.х, средние);
- Дисп( $x$ ) — по формуле МУМНОЖ(МУМНОЖ(трансп.х, ковар.матр.), х);
- Сигма( $x$ ) — по формуле КОРЕНЬ(дисперсия);
- Ковар( $x, y$ ) — по формуле МУМНОЖ(МУМНОЖ(трансп.х, ковар.матр.), у);
- Корр( $x, y$ ) — по формуле КОВАР(х, у) / (сигма\_х \* сигма\_у).

В следующей таблице показано все, что мы проделали в этом разделе.

3							
4						Средний	Средне
5						доход	индекс
6		Ковариационная матрица					константа
6	0,400	0,030	0,020	0,000	0,06	-0,005	
7	0,030	0,200	0,001	-0,060	0,06	-0,015	
8	0,020	0,001	0,300	0,030	0,07	0,005	
9	0,000	-0,060	0,030	0,100	0,08	0,015	
10							
11				Константа	0,065		
12		z	x		z	y	
13		0,1019	0,0540		-0,0101	-0,1163	
14		0,5667	0,2998		-0,0353	-0,4067	
15		0,1141	0,0605		0,0047	0,0544	
16		1,1062	0,5957		0,1274	1,4687	
17							
18							
19		Трансп.х					
20		0,0540	0,2998	0,0605	0,5957		
21							
22		Трансп.у					
23		-0,1163	0,4067	0,0544	1,4687		
24							
25		Сред(x)	0,0693		Сред(y)	0,0940	
26		Дисп(x)	0,0367		Дисп(y)	0,3341	
27		Сигма(x)	0,1917		Сигма(y)	0,5780	
28							
29		Ковар(x,y)	0,0498				
30		Корр(x,y)	0,4496				

### 9.4.2. Нахождение эффективной границы

Согласно теореме 2 из раздела 9.3, огибающую реализуемого множества (включающую в себя эффективную границу) можно получить, составив выпуклую линейную комбинацию двух портфелей, рассчитанных в разделе 9.4.1. Пусть  $p$  — портфель, в котором доля средств  $a$  вложена в портфель  $x$ , а доля  $(1 - a)$  — в портфель  $y$ . Тогда согласно материалу главы 7 среднее значение и дисперсия дохода от портфеля  $p$  составят

$$E(R_p) = aE(R_x) + (1 - a)E(R_y);$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + (1 - a)^2\sigma_y^2 + 2a(1 - a)\text{Ковар}(x, y)}.$$

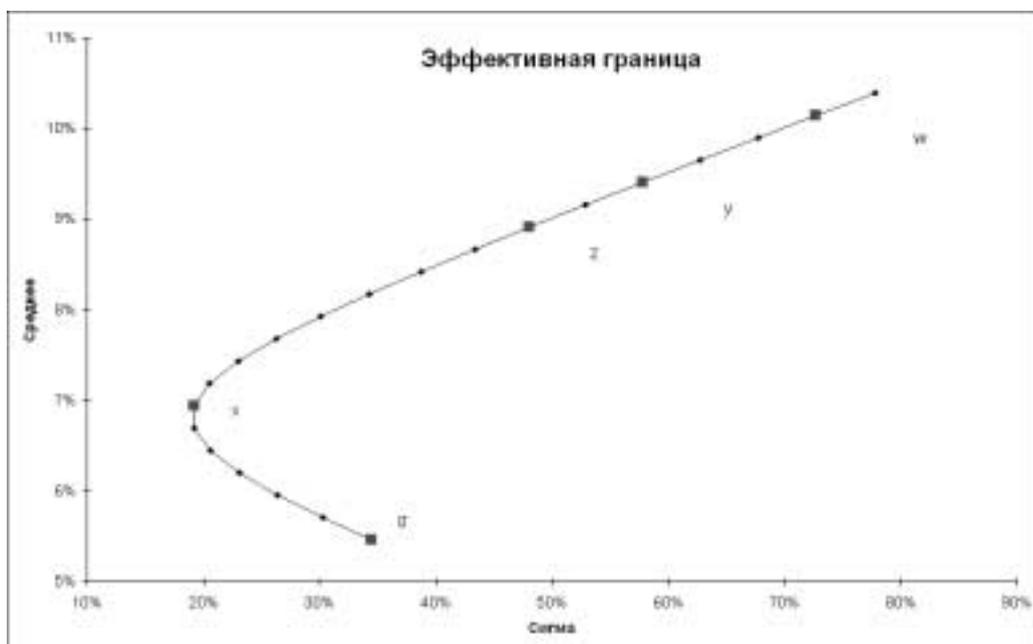
Ниже показан образец такого расчета для наших двух портфелей.

	A	B
34	Расчет одного портфеля	
35	Доля $x$	0,3
36	средний доход $\mu$	8,66%
37	сигма $\sigma$	43,35%

На основании этого расчета можно построить следующую таблицу данных (см. главу 26).

	C	D	E	F	G	H	I
33	ТАБЛИЦА ДАННЫХ						
34	ДЛЯ ГРАФИКА ЭФФЕКТИВНОЙ						
35	ГРАНЦЫ						
36		Сумма	Доход				
37		0,4335	0,0933				← заголовок таблицы данных
38	-0,4	0,7778	0,1038				
39	-0,3	0,7274	0,1014		0,1014	Порт. w	
40	-0,2	0,6772	0,0989				
41	-0,1	0,6274	0,0965				
42	0	0,5780	0,0940		0,0940	Порт. y	
43	0,1	0,5291	0,0915				
44	0,2	0,4809	0,0891		0,0891	Порт. z	
45	0,3	0,4335	0,0866				
46	0,4	0,3874	0,0841				
47	0,5	0,3429	0,0817				
48	0,6	0,3010	0,0793				
49	0,7	0,2627	0,0769				
50	0,8	0,2298	0,0743				
51	0,9	0,2051	0,0718				
52	1	0,1917	0,0693		0,0693	Порт. x	
53	1,1	0,1919	0,0669				
54	1,2	0,2058	0,0644				
55	1,3	0,2309	0,0619				
56	1,4	0,2640	0,0595				
57	1,5	0,3024	0,0570				
58	1,6	0,3445	0,0545		0,0545	Порт. q	

Сама таблица данных на рисунке очерчена жирной линией. Пять точек данных в четвертом столбце представляют собой средний ожидаемый доход от портфеля, описываемого ячейками слева от них. Эти точки данных изображены на графике на следующем рисунке в виде отдельных серий данных.



Заметим, что все выпуклые линейные комбинации лежат на огибающей, но не обязательно являются эффективными. Например,  $z$  — это эффективный портфель, являющийся выпуклой комбинацией двух эффективных портфелей  $x$  и  $y$ ; в данном случае доля  $x$  составляет 20%, а доля  $y$  — 80%. Портфель  $w$  также является выпуклой линейной комбинацией  $x$  и  $y$  (в данном случае весовой коэффициент при  $y$  положителен, а при  $x$  — отрицателен), а портфель  $q$ , хотя и лежит на огибающей множества реализуемых портфелей, не является эффективным. Таким образом, несмотря на то, что всякий эффективный портфель является выпуклой комбинацией некоторых двух эффективных портфелей, *обратное неверно*: не всякая выпуклая линейная комбинация двух эффективных портфелей является эффективным портфелем.

### 9.4.3. Одноэтапный расчет эффективных портфелей

В примерах этого раздела эффективные портфели рассчитываются путем выписывания большей части компонентов портфеля в таблице по отдельности. Однако в некоторых случаях бывает необходимо рассчитать эффективный портфель в один этап. Для этого необходимо знать несколько хитростей Excel, большинство из которых связано с правильным применением функций работы с массивами.

1. Запишем формулу =F6:F9-F11 как функцию массива (т.е. вставим ее с помощью комбинации клавиш <Ctrl+Shift+Enter>) и получим значения всех координат вектора F6:F9 минус E11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3							Средний		
4							доход	Средний	
5							доход	инв.	
6	0,40	0,03	0,02	0,00		0,06	0,05		
7	0,03	0,20	0,00	-0,06		0,05	0,04		
8	0,02	0,00	0,30	0,03		0,07	0,06	{- [=F6:F9-E11]}	
9	0,00	-0,06	0,03	0,10		0,08	0,07		
10					Константа	0,01			

Тот же прием можно применить и для вычисления эффективного портфеля.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13												
14		0,10187	0,05399					0,03454	0,05257			
15		0,59570	0,29981					0,47324	0,29395			
16		0,11414	0,06049	{- [=B14:B17/СУММ(\$B\$14:\$B\$17)}				0,09730	0,06044	{- [=H14:H17/СУММ(H14:H17)}		
17		1,10618	0,59572					0,95475	0,59304			
18												
19		[=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9)]						[=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),G6:G9)]				
20												

2. Функция Excel ТРАНСП (Transpose) применяется и к ячейке, но только в качестве функции обработки массива. Следовательно, содержимое ячейки для функции ТРАНСП должно вводиться с помощью комбинации клавиш <Ctrl+Shift+Enter> вместо клавиши <Enter>. Пример приведен ниже.

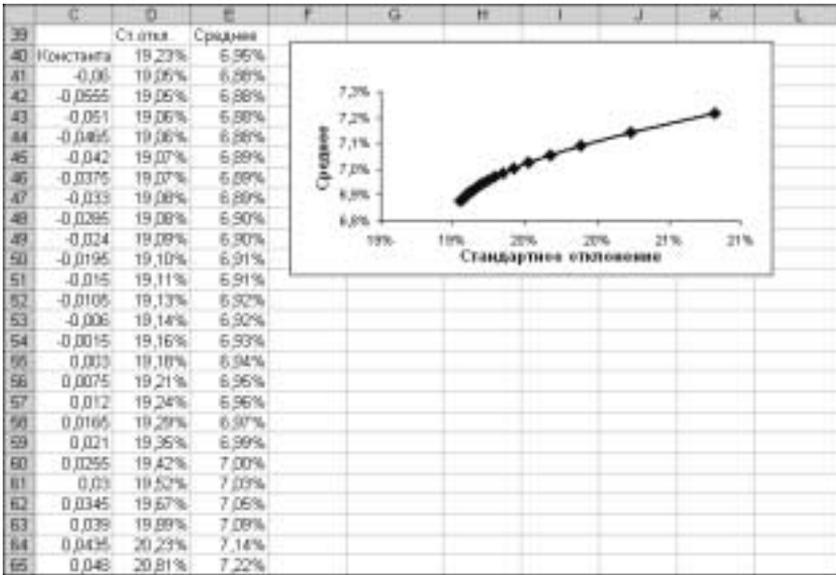
	B	C	D	E	F	G	H	I
23	Средн. x	0,0693	{- [=МУМНОЖ(ТРАНСП(C14:C17),F6:F9)}					
24	Диск. x	0,0367	{- [=МУМНОЖ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C14:C17),A6:D9),C14:C17)}					
25	Станд. x	0,1917	{- [=КОРЕНЬ(C24)}					

Обратите внимание на фигурные скобки ({}), которые обозначают употребление функций обработки массива (см. главу 29). Эти скобки вводить не надо — Excel вставляет их автоматически после нажатия <Ctrl+Shift+Enter>.

Если проявить немного терпения, можно построить таблицу, в которой средний доход и стандартное отклонение  $\sigma$  эффективного портфеля будут вычисляться в одной ячейке. В следующем примере показано вычисление среднего дохода и стандартного отклонения для портфеля  $y$  и константы  $c = 0,01$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
27									
28	Эфф. портфель в один шаг			[=МУМНОЖ(ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))),F6:F9)]					
29	Средн. портф.	0,95%							
30	Сигма портф.	19,25%							
31									
32				[=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))),МУМНОЖ(A6:D9,МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))))]					
33									
34									
35									
36									

В этой методике явно не хватает простоты, наглядности и понятности, но она может оказаться полезной. С ее помощью легко построить эффективную границу как функцию задаваемой константы.



### 9.5. Расчет рыночного портфеля: линия рынка капитала (ЛРК)

Предположим, что существует безрисковый актив, средний ожидаемый доход с которого равен  $r_f$ . Пусть  $M$  — эффективный портфель, являющийся решением следующей системы уравнений:

$$R - r_f = Sz,$$

$$M_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^N z_i}.$$

Теперь рассмотрим выпуклую линейную комбинацию портфеля  $M$  и безрискового актива  $r_f$ . Положим для примера, что доля безрискового актива в этом портфеле составляет  $a$ . Из стандартных уравнений для среднего дохода и его стандартного отклонения получаем:

$$E(r_p) = ar_f + (1 - a) E(r_M),$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2 \sigma_{r_f}^2 + (1 - a)^2 \sigma_M^2 + 2a(1 - a) \text{Ковар}(r_f, y) = (1 - a) \sigma_M}.$$

Геометрическое место всех таких комбинаций при  $a \geq 0$  называется *линией рынка капитала*, или *ЛРК* (*capital market line — CML*). Ее можно изобразить на одном графике с эффективной границей следующим образом.



Портфель  $M$  называется *рыночным портфелем* в силу ряда причин.

- Предположим, что капиталовкладчики достигли согласия по поводу статистической информации о портфеле (т.е. вектора ожидаемых доходов  $R$  и ковариационной матрицы  $S$ ). Далее предположим, что капиталовкладчики заинтересованы только в достижении максимального среднего дохода с портфеля при заданном его стандартном отклонении  $\sigma$ . Отсюда следует, что *все оптимальные портфели находятся на ЛРК*.
- В описанном выше случае далее следует, что портфель  $M$  — *единственный портфель подверженных риску активов, который входит во все оптимальные портфели*. Поэтому он должен включать *все подверженные риску активы, причем доля каждого из активов должна быть пропорциональна его рыночной цене*. Это можно выразить так:

Доля актива  $i$  в портфеле  $M = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}$ , где  $V_i$  — рыночная цена  $i$ -го актива.

Зная  $r_f$ , нетрудно найти  $M$ : нужно просто решить систему для эффективного портфеля с константой  $c = r_f$ . При изменении  $r_f$  получаем другой “рыночный” портфель — это просто эффективный портфель с соответствующей константой. В нашем примере можно положить безрисковую ставку дохода равной  $r_f = 5\%$ , тогда решение системы  $R - r_f = Sz$  дает следующее.

	D	E	F	G	H	I	J
11	Константа	0,05					
12		$\mu$	$\sigma$				
13		0,0167	0,0313				
14		0,1034	0,2068				
15		0,0303	0,0604				
16		0,3620	0,7025				
17		СредМ	0,0726				
18		СигмаМ	0,2121				

## 9.6. ЛРК при наличии безрискового актива

Теорема 4 утверждает, что при наличии безрискового актива выполняется следующее линейное соотношение (известное под названием *линии рынка капитала* — ЛРК):

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_M) - r_f],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ .

В следующей главе рассматриваются некоторые статистические методы для нахождения ЛРК, аналогичные тем, которые используются финансовыми аналитиками.

## Упражнения

- В главе 8 от вас требовалось рассчитать ковариационную матрицу доходов для шести мебельных фирм. Средние доходы и ковариационная матрица для них соответственно равны.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3	Ковариационная матрица								
4		La-Z-Boy	Kimball	Flexsteel	Leggett	Miller	Shaw		Среднее
5	La-Z-Boy	0,1162	0,0398	0,1792	0,0492	0,0568	0,0989		29,28%
6	Kimball	0,0398	0,0649	0,0447	0,0062	0,0349	0,0269		20,68%
7	Flexsteel	0,1792	0,0447	0,3334	0,0775	0,0886	0,1487		25,02%
8	Leggett	0,0492	0,0062	0,0775	0,1033	0,0191	0,0597		31,64%
9	Miller	0,0568	0,0349	0,0886	0,0191	0,0594	0,0243		15,34%
10	Shaw	0,0989	0,0269	0,1487	0,0597	0,0243	0,1653		43,07%

- Зная эту матрицу и предполагая, что безрисковая ставка дохода равна нулю, рассчитайте эффективный портфель из этих шести активов.
- Решите эту же задачу при безрисковой ставке дохода в 10%.
- С помощью этих двух портфелей постройте эффективную границу для указанных шести мебельных компаний. Начертите ее график.

- г) Существует ли эффективный портфель со строго положительными долями всех активов<sup>2</sup>?
2. Достаточным условием для нахождения эффективных портфелей с положительными весовыми коэффициентами является диагональность ковариационной матрицы:  $\sigma_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . По непрерывности отсюда следует, что портфели с положительными весами получаются и в том случае, если недиагональные элементы ковариационной матрицы достаточно малы по сравнению с диагональными. Рассмотрим такое преобразование этой матрицы, при котором

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \varepsilon \sigma_{ij}^{Исх}, & \text{если } i \neq j, \\ \sigma_{ii}^{Исх}. & \end{cases}$$

При  $\varepsilon = 1$  данное преобразование дает исходную ковариационную матрицу, а при  $\varepsilon = 0$  — целиком диагональную матрицу.

Для  $r = 10\%$  найдите максимальное значение  $\varepsilon$ , при котором все весовые коэффициенты портфеля положительны.

3. Рассмотрим пример, приведенный в разделе 9.4. С помощью Excel определите портфель на огибающей, показатель  $\beta$  которого по отношению к эффективному портфелю  $y$  равен нулю. *Подсказка:* обратите внимание на то, что ввиду линейности ковариации тем же свойством обладает и  $\beta$ . Пусть  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  — выпуклая линейная комбинация  $x$  и  $y$  и пусть необходимо определить  $\beta_z$ . В этом случае

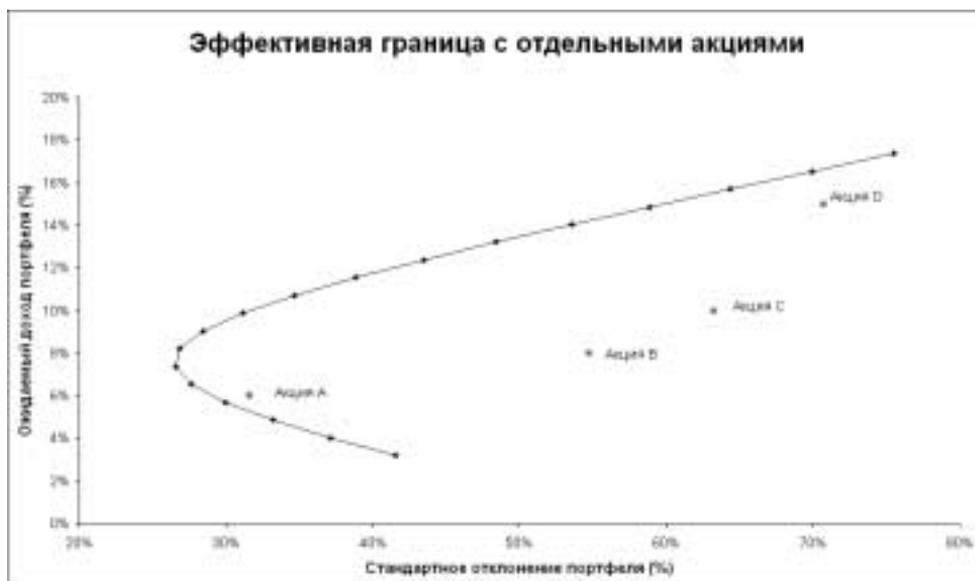
$$\begin{aligned} \beta_z &= \frac{\text{Ковар}(z, y)}{\sigma_y^2} = \frac{\text{Ковар}[\lambda x + (1 - \lambda)y, y]}{\sigma_y^2} = \\ &= \lambda \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} + \frac{(1 - \lambda)\text{Ковар}(y, y)}{\sigma_y^2} = \lambda\beta_x + (1 - \lambda). \end{aligned}$$

4. В этой задаче мы возвращаемся к задаче с четырьмя активами, рассмотренной в разделе 7.5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ИЗ ЧЕТЫРЕХ АКТИВОВ						
2							
3							
4	Ковариационная матрица					Средн. доход.	Станд. откл.
5	0,10	0,01	0,03	0,06		6%	31,62%
6	0,01	0,30	0,06	-0,04		8%	54,77%
7	0,03	0,06	0,40	0,02		10%	63,25%
8	0,06	-0,04	0,02	0,60		15%	70,71%

Найдите огибающее множество для этих четырех активов и покажите, что все отдельные активы принадлежат этому множеству. У вас должен получиться примерно такой график, как показано ниже.

<sup>2</sup> Решение задачи при условии строго положительных весовых коэффициентов активов не является тривиальным. См. публикации Green, 1986 и Nielsen, 1987.



## Приложение

В этом приложении собраны доказательства различных утверждений, выдвинутых в настоящей главе. Как и на протяжении главы, предполагается, что исследуются данные по  $N$  подверженным риску активам. Важно отметить, что все определения “реализуемости” и “оптимальности” даются именно по отношению к этому набору активов. Поэтому, например, слово “эффективный” в развернутом виде означает “эффективный по отношению к исследуемому набору из  $N$  активов”.

**Теорема 0.** Множество всех реализуемых портфелей активов, подверженных риску, выпукло.

**Доказательство.** Портфель  $x$  является реализуемым тогда и только тогда, когда весовые коэффициенты (доли активов) в сумме дают единицу, т.е.  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ , где  $N$  — количество активов. Предположим, что  $x$  и  $y$  — реализуемые портфели, а  $\lambda$  — некоторое число в диапазоне от 0 до 1. Очевидно, что портфель  $z = \lambda x + (1-\lambda)y$  также является реализуемым.

**Теорема 1.** Пусть  $c$  — некоторая константа. Обозначим через  $R$  вектор средних доходов. Портфель  $x$  находится на огибающей по отношению к набору из  $N$  активов тогда и только тогда, когда он является нормированным решением системы:

$$R - c = Sz$$

$$x_i = \frac{z_i}{\sum_h z_h}$$

**Доказательство.** Портфель  $x$  находится на огибающей реализуемого множества портфелей тогда и только тогда, когда он находится в точке касания линии, исходящей из точки  $c$  на оси  $y$ , с реализуемым множеством. Такой портфель должен доставлять максимум или минимум отношению  $\frac{x(R-c)}{\sigma^2(x)}$ , где  $x(R-c)$  — скалярное произведение, выражающее средний избыточный над  $c$  доход, а  $\sigma^2(x)$  — дисперсия портфеля. Пусть максимальное (или минимальное) значение этого отношения равно  $\lambda$ . Тогда наш портфель должен удовлетворять соотношению

$$\frac{x(R-c)}{\sigma^2(x)} = \lambda \Rightarrow x(R-c) = \sigma^2(x)\lambda = xSx^T\lambda.$$

Пусть  $h$  — некоторый актив; продифференцируем последнее соотношение по  $x_h$ . В результате получим  $\overline{R}_h - c = Sx^T\lambda$ . Записывая  $z_h = \lambda x_h$ , видим, что портфель является эффективным в том и только в том случае, если он является решением системы  $R - c = Sz$ . Нормирование вектора  $z$  для приведения суммы его координат к единице дает окончательный результат.

**Теорема 2.** Выпуклая линейная комбинация любых двух портфелей на огибающей также принадлежит огибающей реализуемого множества.

**Доказательство.** Пусть  $x$  и  $y$  — портфели, принадлежащие огибающей. По теореме 1 отсюда следует, что существуют два вектора,  $z_x$  и  $z_y$ , а также две константы,  $c_x$  и  $c_y$ , такие, что

- $x$  — нормированный на единицу вектор  $z_x$ , т.е.  $x_i = \frac{z_{xi}}{\sum_h z_{xh}}$ , а  $y$  — нормированный на единицу вектор  $z_y$ ;
- выполняются соотношения  $R - c_x = Sz_x$  и  $R - c_y = Sz_y$ .

Далее, поскольку  $z$  доставляет максимум отношению  $\frac{z(R-c)}{\sigma^2(z)}$ , максимум также будет давать и тот же вектор, нормированный каким-либо образом. Поэтому без потери общности можно полагать, что сумма компонент  $z$  равна 1.

Отсюда следует, что для любого действительного числа  $a$  портфель  $az_x + (1-a)z_y$  является решением системы  $R - [ac_x + (1-a)c_y] = Sz$ . Утверждение теоремы доказано.

**Теорема 3.** Пусть  $y$  — портфель, лежащий на огибающей множества  $N$  активов. Тогда для любого другого портфеля  $x$  (включая, возможно, и портфель, состоящий всего из одного актива) существует константа  $c$ , такая, что выполняется следующее соотношение между средним ожидаемым доходом с портфеля  $x$  и средним ожидаемым доходом с портфеля  $y$ :

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$ .

Более того,  $c = E(r_z)$ , где  $z$  — произвольный портфель, для которого  $\text{Ковар}(z, y) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $y$  — некоторый портфель на огибающей, а  $x$  — другой произвольный портфель. Полагаем, что  $x$  и  $y$  представляют собой векторы-столбцы. Следует заметить, что

$$\beta_x \equiv \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{x^T S y}{y^T S y}.$$

Поскольку  $y$  лежит на огибающей, мы знаем, что существует вектор  $w$  и константа  $c$ , являющиеся решением системы  $S w = R - c$ , и что  $y = w / \sum_i w_i = w / a$ .

Подставляя это равенство в выражение для  $\beta_x$ , получаем

$$\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{x^T S y}{y^T S y} = \frac{x^T (R - c) / a}{y^T (R - c) / a} = \frac{x^T (R - c)}{y^T (R - c)}.$$

Далее заметим, что поскольку  $\sum_i x_i = 1$ , отсюда следует, что  $x^T I (R - c) = E(r_x) - c$  и  $y^T I (R - c) = E(r_y) - c$ . Из этого соотношения получаем

$$\beta_x = \frac{E(r_x) - c}{E(r_y) - c}.$$

Это можно переписать в виде

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c].$$

Для завершения доказательства предположим, что  $z$  — портфель, имеющий нулевую ковариацию с  $y$ . Тогда из предыдущих результатов следует  $c = E(r_z)$ . Утверждение теоремы доказано.

**Теорема 4.** Если в дополнение к  $N$  подверженным риску активам существует безрисковый актив с доходом  $r_f$ , то выполняется стандартное соотношение линии рынка ценных бумаг:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_y) - r_f],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ .

**Доказательство.** Если существует безрисковая ставка дохода, то касательная к эффективной границе, проведенная от ее значения на оси  $y$ , лежит выше всех остальных реализуемых портфелей. Назовем точку касания на эффективной границе  $M$ ; отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

*Примечание.* Еще раз напомним, что выражение “рыночный портфель” в данном случае означает “портфель, являющийся рыночным в отношении совокупности  $N$  активов”.

**Теорема 5.** Предположим, существует портфель  $y$ , такой, что для любого портфеля  $x$  выполняется следующее соотношение:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c], \quad \beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2}.$$

Тогда портфель  $y$  принадлежит огибающей.

**Доказательство.** Подставляя определение  $\beta_x$ , получаем, что для любого портфеля  $x$  выполняется следующее соотношение:

$$\frac{x^T S y}{\sigma_y^2} = \frac{x^T R - c}{y^T R - c}.$$

Пусть  $x$  — вектор, составленный из одного только первого рискованного актива:  $x = \{1, 0, \dots, 0\}$ . Тогда из предыдущего уравнения получаем

$$S_1 y \frac{y^T R - c}{\sigma_y^2} = E(r_1) - c.$$

Перепишем это в виде

$$S_1 a y = E(r_1) - c,$$

где  $S_1$  — первая строка ковариационной матрицы  $S$ . Заметим, что  $a = \frac{y^T R - c}{\sigma_y^2}$  — это константа, значение которой не зависит от вектора  $x$ . Если выбрать  $x$  состоящим из одного  $i$ -го подверженного риску актива, то получим

$$S_i a y = E(r_i) - c.$$

Таким образом, доказано, что вектор  $z = a y$  является решением системы  $Sz = R - c$ ; поэтому по теореме 1 нормированный вектор  $z$  принадлежит огибающей. Но нормирование вектора  $z$  как раз и дает вектор  $y$ .