Содержание

9 Расчет эффективных портфелей без ограничения прав продажи

9.1. Введение

В этой главе рассматриваются все расчеты, необходимые для применения обеих версий классической ценовой модели рынка капитала, или ЦМРК (*capital asset pricing model — CAPM*): как версии, основанной на безрисковом активе (*risk-free asset*), так и ЦМРК с нулевым "бета" по Блэку (Black, 1972), в которой не требуется допущения о безрисковости актива. Вы сами увидите, как легко выполнять соответствующие расчеты с помощью средств электронных таблиц.

Глава имеет следующую структуру. Вначале даются некоторые предварительные определения и обозначения. Затем формулируются основные теоретические положения (доказательства даны в приложении к главе). В последующих разделах рассматривается применение этих положений, а именно:

- расчет эффективных портфелей;
- расчет эффективной границы.

В этой главе больше теоретического материала, чем в большинстве других глав нашей книги. В разделе 9.3 излагаются теоремы, лежащие в основе расчетов как эффективных портфелей, так и *линии рынка ценных бумаг*, *ЛРЦБ* (*security market line — SML*), и рассматриваемые далее в главе 10. Если материал раздела 9.3 покажется вам сложным, пропустите его при первом чтении и попытайтесь разобраться в примере расчета из раздела 9.4.

9.2. Определения и обозначения

На протяжении этой главы будут использоваться описанные далее обозначения. Пусть имеется N подверженных риску активов, средний ожидаемый доход с каждого из которых обозначим как $E(r_i)$. Переменная R будет обозначать вектор-столбец ожидаемых доходов с этих активов:

$$R = \begin{bmatrix} E\left(r_1\right) = \overline{r_1} \\ E\left(r_2\right) = \overline{r_2} \\ \vdots \\ E\left(r_N\right) = \overline{r_N} \end{bmatrix}.$$

Обозначение S будет относиться к ковариационной матрице размерности $N \times N$:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{21}\ldots\sigma_{N1} \\ \sigma_{12}\sigma_{22}\ldots\sigma_{N2} \\ \vdots \\ \sigma_{1N}\sigma_{2N}\ldots\sigma_{NN} \end{bmatrix}.$$

Портфелем рисковых (подверженных риску) активов (там, где нам не грозят разночтения, будем употреблять просто слово *портфель*) будем называть вектор-столбец x, координаты которого в сумме дают 1:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = 1.$$

Каждая координата x_i представляет долю портфеля, вложенную в i-й актив.

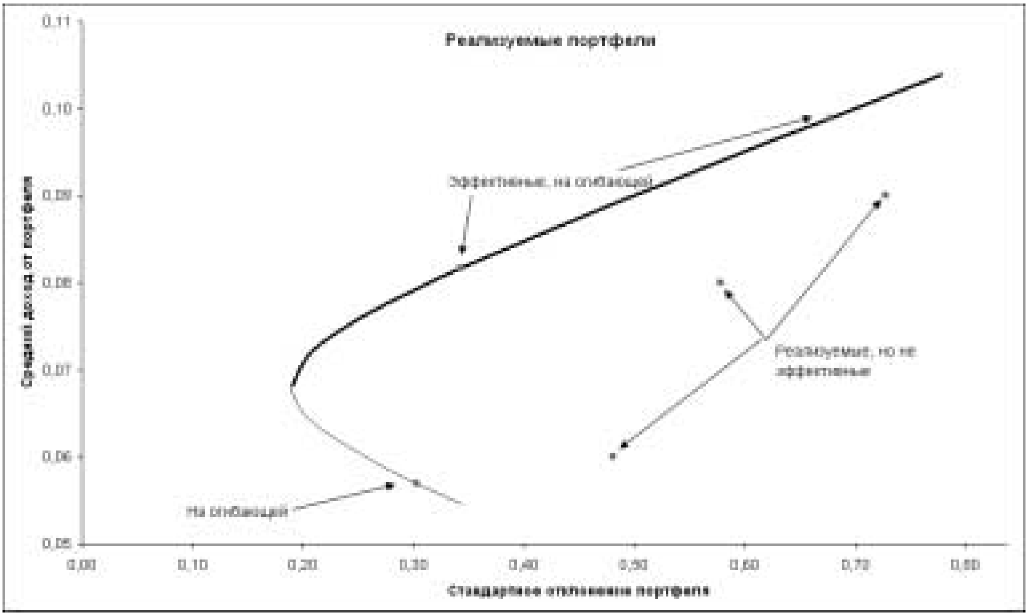
Ожидаемый (средний) доход с портфеля x — $E(r_x)$ — вычисляется путем умножения x на R:

$$E\left(r_x\right) = x^T \cdot R \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i E\left(r_i\right)$$

Дисперсия дохода с портфеля x, обозначаемая $\sigma_x^2 \equiv \sigma_{xx}$, представляет собой произведение $x^T Sx = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$.

Ковариация между доходами с двух портфелей x и y, Ковар(x, y), определяется как произведение $\sigma_{xy} = x^T Sy = \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N} x_i y_j \sigma_{ij}$. Обратите внимание, что $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$.

На приведенном далее графике наглядно показаны четыре понятия. *Реализуемым портфелем* называется любой портфель, доли активов в котором в сумме дают единицу. *Реализуемым множеством* называется множество средних доходов и дисперсий реализуемых портфелей; реализуемое множество представляет собой область внутри и справа от кривой. Реализуемый портфель находится на *огибающей* реализуемого множества, если для заданного среднего дохода его дисперсия принимает минимальное значение. Наконец, портфель x называется *эффективным портфелем*, если доход с него максимален для заданной дисперсии (или стандартного отклонения). Таким образом, портфель x является эффективным, если нет другого портфеля y, такого, что $E(R_y) > E(R_x)$ и при этом $\sigma_y \leq \sigma_x$. Множество всех эффективных портфелей называется эффективной границей; это множество изображается на графике жирной линией.



9.3. Некоторые теоремы об эффективных портфелях и ЦМРК

В приложении к этой главе приведены доказательства утверждений, которые излагаются ниже и представляют собой основу для расчетов ЦМРК. Все приведенные теоремы используются при выводе эффективной границы и линии рынка ценных бумаг; примеры конкретных числовых расчетов даются в следующих разделах и в главе 10.

Теорема 1. Пусть c — некоторая константа. Тогда обозначение $R-c$ относится к следующему вектору-столбцу:

$$R-c=\begin{bmatrix} E\left(r_1\right)-c \\ E\left(r_2\right)-c \\ \vdots \\ E\left(r_N\right)-c \end{bmatrix}.$$

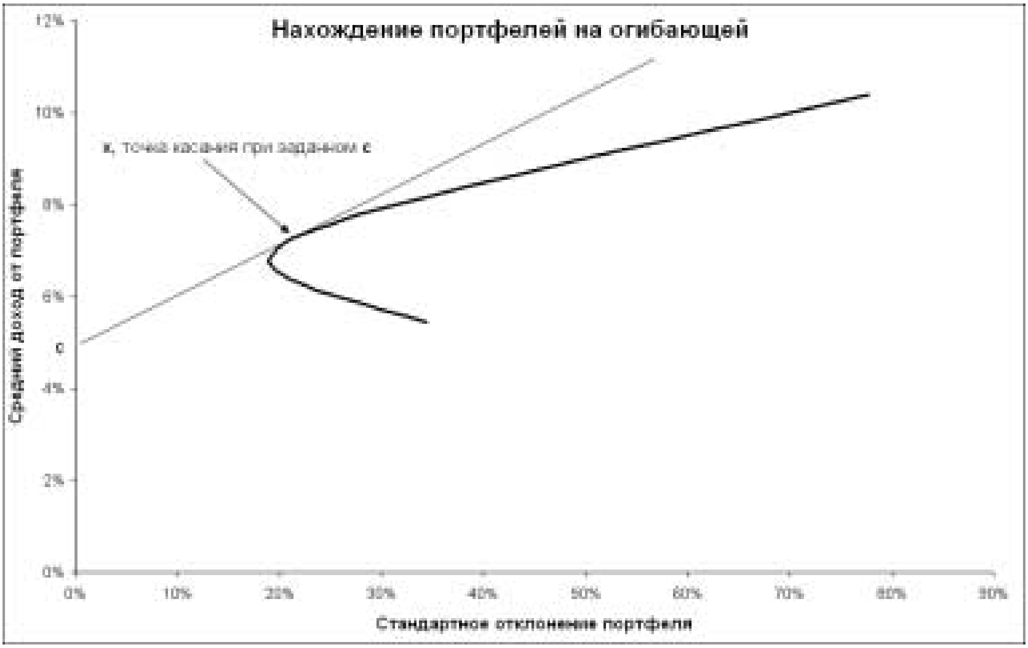
Пусть вектор z является решением системы линейных уравнений $R-c=Sz$. Тогда из этого решения можно получить портфель x на огибающей реализуемого множества:

$$z=S^{-1}\left\{R-c\right\};$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}\,, \text{ где } \quad x_i = \frac{z_i}{\sum\limits_{j=1}^{N} z_j}.$$

Более того, утверждается, что все портфели на огибающей имеют указанный вид.

Наглядное представление. Строгое доказательство данной теоремы приведено в приложении к этой главе, однако геометрический смысл ее ясен и очевиден. Предположим, мы выбрали константу c и пытаемся найти эффективный портфель x, для которого проведенная из точки c прямая касается границы реализуемого множества.



Теорема 1 как раз и описывает методику нахождения x; более того, в теореме утверждается, что все портфели на огибающей (в частности, все эффективные портфели) строятся только по этой методике. Таким образом, если x — портфель на огибающей, то существует константа c и вектор z, такие, что $Sz = R - c$ и $x = z / \sum\limits_i z_i$.

Теорема 2. Согласно этой теореме, впервые доказанной Блэком (Black, 1972), зная любые два портфеля на огибающей, можно восстановить всю огибающую. Если заданы два портфеля, $x = \{\ x_1,\ \ldots,\ x_N\ \}$ и $y = \{\ y_1,\ \ldots,\ y_N\ \}$, то все портфели на огибающей являются выпуклыми линейными комбинациями x и y. Это означает, что для любой заданной константы a приведенный далее портфель лежит на огибающей эффективной границы:

$$ax + (1-a)\,y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1-a)\,y_1 \\ ax_2 + (1-a)\,y_2 \\ \vdots \\ ax_N + (1-a)\,y_N \end{bmatrix}.$$

Теорема 3. Пусть y — любой портфель, принадлежащий огибающей. Тогда для любого другого портфеля (как на огибающей, так и вне ее) справедливо соотношение

$$E\,(r_x) = c + \beta_x\,[E\,(r_y) - c]\,,$$

где $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$.

Более того, c является средним ожидаемым доходом от портфеля z, ковариация которого с портфелем y равна нулю:

$$c = E\,(r_z)\,, \quad \text{Ковар}(y,z) = 0$$

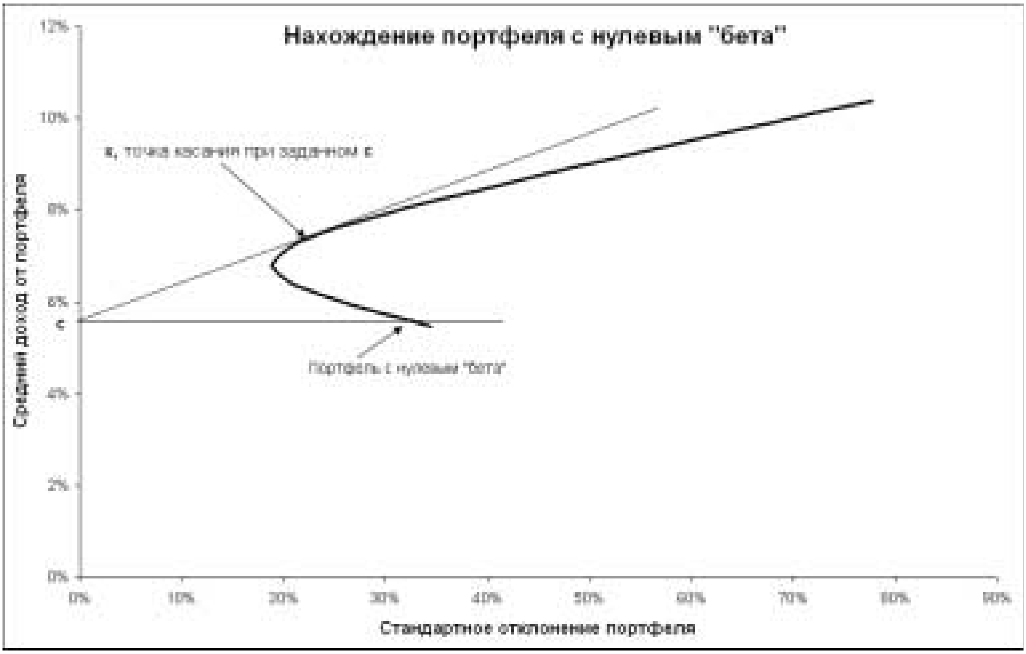
Примечания. Если y принадлежит огибающей, то регрессия любого произвольного портфеля x по y дает линейное соотношение. Эта версия ЦМРК обычно называется *ЦМРК с нулевым "бета" по Блэку* в честь Фишера Блэка (Fisher Black), в работе которого за 1972 г. получен рассматриваемый результат. В данной модели линия рынка ценных бумаг Шарпа–Линтнера–Моссена (Sharpe–Lintner–Mossin) заменена ЛРЦБ, в которой роль безрискового актива играет портфель с нулевым показателем "бета" по отношению к некоторому портфелю y, принадлежащему огибающей. Отметим, что этот результат справедлив для любого портфеля y с огибающей.

Если рыночный портфель M является эффективным ("если" здесь очень важно, как будет показано позже), то результат Блэка также справедлив для рыночного портфеля. Таким образом, ЛРЦБ справедлива при замене c на $E(r_z)$:

$$E\,(r_x) = E\,(r_z) + \beta_x\,[E\,(r_y) - E\,(r_z)]\,,$$

где $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,M)}{\sigma_M^2}$, Ковар$(z, M) = 0$.

Из всех результатов, касающихся ЦМРК, данная версия ЛРЦБ больше всего исследовалась эмпирически. В главе 10 демонстрируется вычисление β и расчет ЛРЦБ; далее рассматривается критика Ролла (Roll) в адрес эмпирических исследований. Из приведенного далее графика легко видеть, как можно найти портфель с нулевым "бета" на огибающей реализуемого множества.



Если имеется безрисковый актив, теорема 3 сводится к частному случаю линии рынка ценных бумаг для классической ценовой модели рынка капитала.

Теорема 4. Если имеется безрисковый актив с доходом r_f, то существует портфель M на огибающей, такой, что

$$E\left(r_x\right) = r_f + \beta_x \left[E\left(r_y\right) - r_f\right],$$

где $\beta_x = \dfrac{\text{Ковар}(x,M)}{\sigma_M^2}$.

Примечание. Если все инвесторы выбирают свои портфели только на основе среднего дохода и стандартного отклонения, то M — это портфель, составленный из *всех подверженных риску активов в экономике* в долях, пропорциональных рыночной цене актива. Конкретизируем данное утверждение. Предположим, имеется N подверженных риску активов; пусть рыночная цена актива i равняется V_i. Тогда рыночный портфель будет иметь следующие весовые (долевые) коэффициенты:

$$\text{Доля актива } i \text{ в } M = \frac{V_i}{\sum\limits_{h=1}^{N} V_h}.$$

Это утверждение впервые было доказано Шарпом (Sharpe, 1964), Линтнером (Lintner, 1965) и Моссеном (Mossin, 1966).

Теорема 5. Верно утверждение, обратное к теореме 4. Предположим, имеется такой портфель y, что для любого портфеля x выполняется следующее соотношение:

$$E\left(r_x\right) = c + \beta_x \left[E\left(r_y\right) - c\right],$$

где $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$.

В этом случае портфель y является эффективным.

Из всех перечисленных особо следует выделить теоремы 3 и 5. В них утверждается, что *соотношение линии рынка ценных бумаг выполняется тогда и только тогда, когда для всех портфелей можно выполнить регрессию по портфелю, принадлежащему огибающей*. Как убедительно показал Ролл (Roll, 1977, 1978), данные теоремы доказывают тот факт, что для проверки ЦМРК недостаточно просто показать, что выполняется соотношение ЛРЦБ[1]. Единственный способ — это проверить, *является ли реальный рыночный портфель эффективным в терминах среднего дохода и дисперсии*. К этой теме мы еще вернемся в главе 10.

Далее в этой главе мы исследуем практический смысл приведенных теорем на численных примерах, решенных в среде Excel.

9.4. Пример расчета эффективной границы

В этом разделе мы с помощью Excel будем рассчитывать эффективную границу. Рассмотрим пакет инвестиций, состоящий из четырех подверженных риску активов со следующими ожидаемыми доходами и ковариационной матрицей.

	A	B	C	D	E	F
4						Средний
5	Ковариационная матрица					доход
6	0,400	0,030	0,020	0,000		0,06
7	0,030	0,200	0,001	-0,060		0,05
8	0,020	0,001	0,300	0,030		0,07
9	0,000	-0,060	0,030	0,100		0,08

Наш расчет будет выполняться в два этапа. Вначале мы найдем два портфеля на огибающей реализуемого множества (раздел 9.4.1), а затем в разделе 9.4.2 построим эффективную границу.

9.4.1. Поиск двух портфелей на огибающей

Согласно теореме 2, для нахождения всей эффективной границы необходимо найти два эффективных портфеля. По теореме 1 для этого нужно решить систему $R - c = Sz$ относительно z для двух различных значений c. Для каждого из c путем решения системы находим вектор z, а затем для нахождения эффективного портфеля принимаем $x_i = z_i \Big/ \sum_h z_h$.

Значения c, для которых следует решить систему, могут выбираться более-менее произвольно; для облегчения задачи вначале решим систему для $c = 0$. Получим следующий результат.

[1] Статья Ролла 1977 г. чаще цитируется и отличается более полным изложением материала, однако его же статья 1978 г. гораздо легче для восприятия и понимания. Если вас интересуют затронутые вопросы, начните с нее.

	B	C
12	z	x
13	0,1019	0,0540
14	0,5667	0,2998
15	0,1141	0,0605
16	1,1052	0,5857

Для этого в ячейках устанавливаются формулы, приведенные ниже.

- *Для* z: `=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9)`. Диапазон A6:D9 содержит ковариационную матрицу, а в ячейках F6:F9 записаны средние доходы от активов.
- *Для* x: в каждой ячейке записывается соответствующее значение z, разделенное на сумму всех z. Например, ячейка C13 содержит формулу `=B13/СУММ(B$13:B$16)`.

Теперь решим систему относительно какой-нибудь другой константы c. Для этого потребуется еще несколько формул, как видно из следующей таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G
3							Среднее
4						Средний	минус
5	Ковариационная матрица					доход	константа
6	0,400	0,030	0,020	0,000		0,06	-0,005
7	0,030	0,200	0,001	-0,060		0,05	-0,015
8	0,020	0,001	0,300	0,030		0,07	0,005
9	0,000	-0,060	0,030	0,100		0,08	0,015
10							
11				Константа	0,065		
12		z	x		z	y	
13		0,1019	0,0540		-0,0101	-0,1163	
14		0,5667	0,2998		-0,0353	-0,4067	
15		0,1141	0,0605		0,0047	0,0544	
16		1,1052	0,5857		0,1274	1,4687	

Каждая ячейка вектора-столбца под заголовком "Среднее минус константа" содержит средний доход актива за вычетом константы c (в данном случае c = 0,065). Второй вектор z и соответствующий портфель на огибающей y имеют следующий вид.

	E	F
12	z	y
13	-0,0101	-0,1163
14	-0,0353	-0,4067
15	0,0047	0,0544
16	0,1274	1,4687

Этот вектор z вычисляется аналогично первому с той разницей, что в ячейках используется функция `МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),G6:G9)`.

В заключение расчета получим средние доходы, стандартные отклонения и ковариации доходов для портфелей x и y.

	B	C	D	E	F
19	**Трансп.x**				
20	0,0640	0,2998	0,0606	0,5857	
21					
22	**Трансп.y**				
23	-0,1163	-0,4067	0,0544	1,4687	
24					
25	**Сред(x)**	0,0693		**Сред(y)**	0,0940
26	**Дисп(x)**	0,0367		**Дисп(y)**	0,3341
27	**Сигма(x)**	0,1917		**Сигма(y)**	0,5780
28					
29	**Ковар(x,y)**	0,0498			
30	**Корр(x,y)**	0,4496			

Транспонированные векторы x и y вставлены с использованием функции ТРАНСП (функции для работы с массивами рассматриваются в главе 29). Теперь средние, дисперсии и ковариации вычисляются таким образом:

- Сред(x) — по формуле `МУМНОЖ(`*`трансп.x`*`, `*`средние`*`)`;
- Дисп(x) — по формуле `МУМНОЖ(МУМНОЖ(`*`трансп.`*`x, `*`ковар.матр.`*`), x)`;
- Сигма(x) — по формуле `КОРЕНЬ(`*`дисперсия`*`)`;
- Ковар(x, y) — по формуле `МУМНОЖ(МУМНОЖ(`*`трансп.`*`x, `*`ковар.матр.`*`), y)`;
- Корр(x, y) — по формуле `КОВАР(`*`x,y`*`)/(`*`сигма_x * сигма_y`*`)`.

В следующей таблице показано все, что мы проделали в этом разделе.

	A	B	C	D	E	F	G
3							**Среднее**
4						**Средний**	**минус**
5		**Ковариационная матрица**				**доход**	**константа**
6	0,400	0,030	0,020	0,000		0,06	-0,005
7	0,030	0,200	0,001	-0,060		0,05	-0,015
8	0,020	0,001	0,300	0,030		0,07	0,005
9	0,000	-0,060	0,030	0,100		0,08	0,015
10							
11				Константа	0,065		
12		z	x		z	y	
13		0,1019	0,0640		-0,0101	-0,1163	
14		0,5667	0,2998		-0,0353	-0,4067	
15		0,1141	0,0606		0,0047	0,0544	
16		1,1062	0,5857		0,1274	1,4687	
17							
18							
19		**Трансп.x**					
20		0,0640	0,2998	0,0606	0,5857		
21							
22		**Трансп.y**					
23		-0,1163	-0,4067	0,0544	1,4687		
24							
25		**Сред(x)**	0,0693		**Сред(y)**	0,0940	
26		**Дисп(x)**	0,0367		**Дисп(y)**	0,3341	
27		**Сигма(x)**	0,1917		**Сигма(y)**	0,5780	
28							
29		**Ковар(x,y)**	0,0498				
30		**Корр(x,y)**	0,4496				

9.4.2. Нахождение эффективной границы

Согласно теореме 2 из раздела 9.3, огибающую реализуемого множества (включающую в себя эффективную границу) можно получить, составив выпуклую линейную комбинацию двух портфелей, рассчитанных в разделе 9.4.1. Пусть p — портфель, в котором доля средств a вложена в портфель x, а доля $(1-a)$ — в портфель y. Тогда согласно материалу главы 7 среднее значение и дисперсия дохода от портфеля p составят

$$E\left(R_p\right) = aE\left(R_x\right) + (1-a)\,E\left(R_y\right);$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + (1-a)^2\,\sigma_y^2 + 2a\,(1-a)\,\text{Ковар}(x,y)}.$$

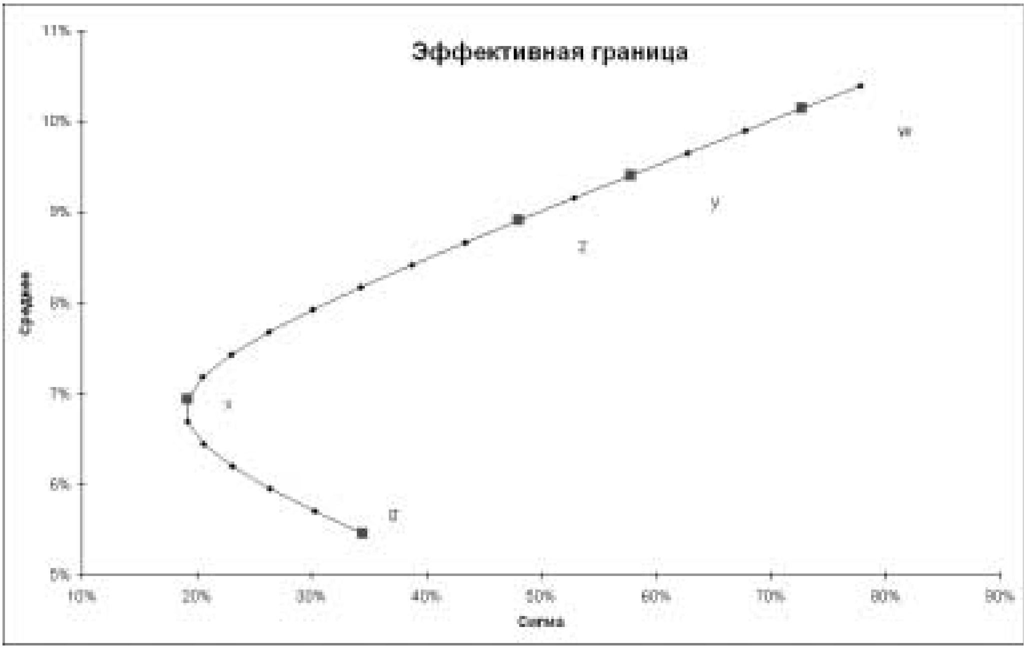
Ниже показан образец такого расчета для наших двух портфелей.

	A	B
34	**Расчет одного портфеля**	
35	Доля x	0,3
36	средний доход п.	8,66%
37	сигма п.	43,36%

На основании этого расчета можно построить следующую таблицу данных (см. главу 26).

	C	D	E	F	G	H	I
33			**ТАБЛИЦА ДАННЫХ**				
34			**ДЛЯ ГРАФИКА ЭФФЕКТИВНОЙ**				
35			**ГРАНИЦЫ**				
36			**Сигма**	**Доход**			
37			0,4336	0,0866	<-- заголовок таблицы данных		
38		-0,4	0,7778	0,1038			
39		-0,3	0,7274	0,1014	0,1014	Порт. w	
40		-0,2	0,6772	0,0989			
41		-0,1	0,6274	0,0965			
42		0	0,5780	0,0940	0,0940	Порт. y	
43		0,1	0,5291	0,0915			
44		0,2	0,4809	0,0891	0,0891	Порт. z	
45		0,3	0,4336	0,0866			
46		0,4	0,3874	0,0841			
47		0,5	0,3429	0,0817			
48		0,6	0,3010	0,0792			
49		0,7	0,2627	0,0767			
50		0,8	0,2298	0,0743			
51		0,9	0,2061	0,0718			
52		1	0,1917	0,0693	0,0693	Порт. x	
53		1,1	0,1919	0,0669			
54		1,2	0,2068	0,0644			
55		1,3	0,2309	0,0619			
56		1,4	0,2640	0,0595			
57		1,5	0,3024	0,0570			
58		1,6	0,3445	0,0545	0,0545	Порт. q	

Сама таблица данных на рисунке очерчена жирной линией. Пять точек данных в четвертом столбце представляют собой средний ожидаемый доход от портфеля, описываемого ячейками слева от них. Эти точки данных изображены на графике на следующем рисунке в виде отдельных серий данных.



Заметим, что все выпуклые линейные комбинации лежат на огибающей, но не обязательно являются эффективными. Например, z — это эффективный портфель, являющийся выпуклой комбинацией двух эффективных портфелей x и y; в данном случае доля x составляет 20%, а доля y — 80%. Портфель w также является выпуклой линейной комбинацией x и y (в данном случае весовой коэффициент при y положителен, а при x — отрицателен), а портфель q, хотя и лежит на огибающей множества реализуемых портфелей, не является эффективным. Таким образом, несмотря на то, что всякий эффективный портфель является выпуклой комбинацией некоторых двух эффективных портфелей, *обратное неверно*: не всякая выпуклая линейная комбинация двух эффективных портфелей является эффективным портфелем.

9.4.3. Одноэтапный расчет эффективных портфелей

В примерах этого раздела эффективные портфели рассчитываются путем выписывания большей части компонентов портфеля в таблице по отдельности. Однако в некоторых случаях бывает необходимо рассчитать эффективный портфель в один этап. Для этого необходимо знать несколько хитростей Excel, большинство из которых связано с правильным применением функций работы с массивами.

1. Запишем формулу `=F6:F9-F11` как функцию массива (т.е. вставим ее с помощью комбинации клавиш <Ctrl+Shift+Enter>) и получим значения всех координат вектора F6:F9 минус E11.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3							**Средние**		
4						**Средний**	**минус**		
5		**Ковариационная матрица**				**доход**	**константа**		
6	0,40	0,03	0,02	0,00		0,06	0,05		
7	0,03	0,20	0,00	-0,06		0,05	0,04		
8	0,02	0,00	0,30	0,03		0,07	0,06	<-- {=F6:F9-E11}	
9	0,00	-0,06	0,03	0,10		0,08	0,07		
10									
11				Константа	0,01				

Тот же прием можно применить и для вычисления эффективного портфеля.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13		z	x					z	y			
14		0,10197	0,05399					0,08464	0,05257			
15		0,56570	0,29951					0,47324	0,29395			
16		0,11414	0,06049	<-- {=B14:B17/СУММ($B$14:$B$17)}				0,09730	0,06044	<-- {=H14:H17/СУММ(H14:H17)}		
17		1,10518	0,58572					0,95475	0,59304			
18												
19	{=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9)}						{=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),G6:G9)}					
20												

2. Функция Excel `ТРАНСП` (`Transpose`) применяется и к ячейке, но только в качестве функции обработки массива. Следовательно, содержимое ячейки для функции `ТРАНСП` должно вводиться с помощью комбинации клавиш <Ctrl+Shift+Enter> вместо клавиши <Enter>. Пример приведен ниже.

	B	C	D	E	F	G	H	I
23	Средн x	0,0693	<-- {=МУМНОЖ(ТРАНСП(C14:C17),F6:F9)}					
24	Дисп. x	0,0367	<-- {=МУМНОЖ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C14:C17),A6:D9),C14:C17)}					
25	Ст.откл. x	0,1917	<-- =КОРЕНЬ(C24)					

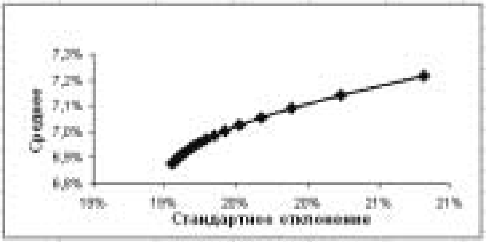
Обратите внимание на фигурные скобки ({}), которые обозначают употребление функции обработки массива (см. главу 29). Эти скобки вводить не надо — Excel вставляет их автоматически после нажатия <Ctrl+Shift+Enter>.

Если проявить немного терпения, можно построить таблицу, в которой средний доход и стандартное отклонение σ эффективного портфеля будут вычисляться в одной ячейке. В следующем примере показано вычисление среднего дохода и стандартного отклонения для портфеля y и константы $c = 0,01$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
27				{=МУМНОЖ(ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-					
28	**Эфф. портфель в один этап**			E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))),F6:F9)}					
29	Средн портф	6,95%							
30	Сигма портф	19,23%							
31									
32				{=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-					
33				E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-					
34				E11))),МУМНОЖ(A6:D9,МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-					
35				E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)))))}					
36									

В этой методике явно не хватает простоты, наглядности и понятности, но и она может оказаться полезной. С ее помощью легко построить эффективную границу как функцию задаваемой константы.

	C	D	E
39		Ст.откл.	Среднее
40	Константа	19,23%	6,95%
41	-0,06	19,05%	6,88%
42	-0,0555	19,06%	6,88%
43	-0,051	19,06%	6,88%
44	-0,0465	19,06%	6,88%
45	-0,042	19,07%	6,89%
46	-0,0375	19,07%	6,89%
47	-0,033	19,08%	6,89%
48	-0,0285	19,08%	6,90%
49	-0,024	19,09%	6,90%
50	-0,0195	19,10%	6,91%
51	-0,015	19,11%	6,91%
52	-0,0105	19,13%	6,92%
53	-0,006	19,14%	6,92%
54	-0,0015	19,16%	6,93%
55	0,003	19,18%	6,94%
56	0,0075	19,21%	6,95%
57	0,012	19,24%	6,96%
58	0,0165	19,29%	6,97%
59	0,021	19,35%	6,99%
60	0,0255	19,42%	7,00%
61	0,03	19,52%	7,03%
62	0,0345	19,67%	7,05%
63	0,039	19,89%	7,09%
64	0,0435	20,23%	7,14%
65	0,048	20,81%	7,22%



9.5. Расчет рыночного портфеля: линия рынка капитала (ЛРК)

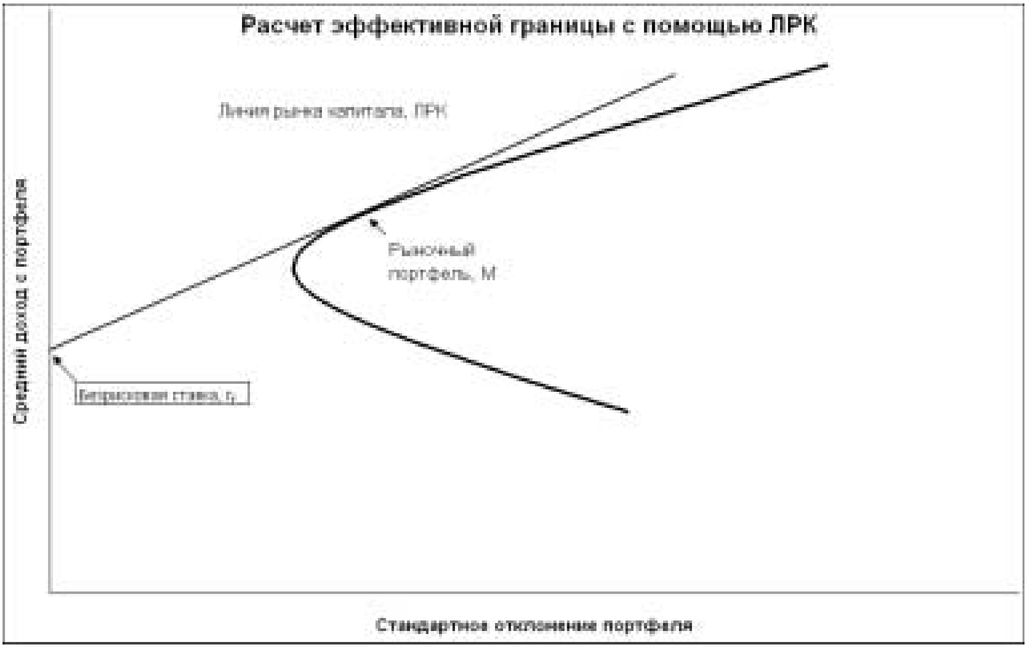
Предположим, что существует безрисковый актив, средний ожидаемый доход с которого равен r_f. Пусть M — эффективный портфель, являющийся решением следующей системы уравнений:

$$R - r_f = Sz,$$
$$M_i = \frac{z_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} z_i}.$$

Теперь рассмотрим выпуклую линейную комбинацию портфеля M и безрискового актива r_f. Положим для примера, что доля безрискового актива в этом портфеле составляет a. Из стандартных уравнений для среднего дохода и его стандартного отклонения получаем:

$$E(r_p) = ar_f + (1-a)E(r_M),$$
$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_{rf}^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\,\text{Ковар}(r_f, y)} = (1-a)\,\sigma_M.$$

Геометрическое место всех таких комбинаций при а ≥ 0 называется *линией рынка капитала*, или *ЛРК* (*capital market line — CML*). Ее можно изобразить на одном графике с эффективной границей следующим образом.



Портфель M называется *рыночным портфелем* в силу ряда причин.

- Предположим, что капиталовкладчики достигли согласия по поводу статистической информации о портфеле (т.е. вектора ожидаемых доходов R и ковариационной матрицы S). Далее предположим, что капиталовкладчики заинтересованы только в достижении максимального среднего дохода с портфеля при заданном его стандартном отклонении σ. Отсюда следует, что *все оптимальные портфели находятся на ЛРК.*
- В описанном выше случае далее следует, что портфель *М — единственный портфель подверженных риску активов, который входит во все оптимальные портфели*. Поэтому он должен включать *все подверженные риску активы, причем доля каждого из активов должна быть пропорциональна его рыночной цене*. Это можно выразить так:

  Доля актива i в портфеле $M = \frac{V_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} V_i}$, где V_i — рыночная цена i-го актива.

Зная r_f, нетрудно найти M : нужно просто решить систему для эффективного портфеля с константой $c = r_f$. При изменении r_f получаем другой “рыночный” портфель — это просто эффективный портфель с соответствующей константой. В нашем примере можно положить безрисковую ставку дохода равной $r_f = 5\%$, тогда решение системы $R - r_f = Sz$ дает следующее.

	D	E	F	G	H	I	J
11	Константа	0,05					
12		z	**M**				
13		0,0157	0,0313		**Примечание**: рыночный портфель		
14		0,1034	0,2068		**M** построен по касательной		
15		0,0303	0,0604		для заданной константы		
16		0,3629	0,7025				
17		**Сред(M)**	0,0726				
18		**Сигма(M)**	0,2121				

9.6. ЛРК при наличии безрискового актива

Теорема 4 утверждает, что при наличии безрискового актива выполняется следующее линейное соотношение (известное под названием *линии рынка капитала* — ЛРК):

$$E\left(r_x\right) = r_f + \beta_x \left[E\left(r_M\right) - r_f\right],$$

где $\beta_x = \dfrac{\text{Ковар}(x,M)}{\sigma_M^2}$.

В следующей главе рассматриваются некоторые статистические методы для нахождения ЛРК, аналогичные тем, которые используются финансовыми аналитиками.

Упражнения

1. В главе 8 от вас требовалось рассчитать ковариационную матрицу доходов для шести мебельных фирм. Средние доходы и ковариационная матрица для них соответственно равны.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3	**Ковариационная матрица**								
4		**La-Z-Boy**	**Kimball**	**Flexsteel**	**Leggett**	**Miller**	**Shaw**		**Среднее**
5	**La-Z-Boy**	0,1162	0,0398	0,1792	0,0492	0,0568	0,0989		29,24%
6	**Kimball**	0,0398	0,0649	0,0447	0,0062	0,0349	0,0269		20,68%
7	**Flexsteel**	0,1792	0,0447	0,3334	0,0775	0,0886	0,1487		25,02%
8	**Leggett**	0,0492	0,0062	0,0775	0,1033	0,0191	0,0597		31,64%
9	**Miller**	0,0568	0,0349	0,0886	0,0191	0,0594	0,0243		15,34%
10	**Shaw**	0,0989	0,0269	0,1487	0,0597	0,0243	0,1653		43,07%

а) Зная эту матрицу и предполагая, что безрисковая ставка дохода равна нулю, рассчитайте эффективный портфель из этих шести активов.

б) Решите эту же задачу при безрисковой ставке дохода в 10%.

в) С помощью этих двух портфелей постройте эффективную границу для указанных шести мебельных компаний. Начертите ее график.

г) Существует ли эффективный портфель со строго положительными долями всех активов[2]?

2. Достаточным условием для нахождения эффективных портфелей с положительными весовыми коэффициентами является диагональность ковариационной матрицы: $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. По непрерывности отсюда следует, что портфели с положительными весами получаются и в том случае, если недиагональные элементы ковариационной матрицы достаточно малы по сравнению с диагональными. Рассмотрим такое преобразование этой матрицы, при котором

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \varepsilon\sigma_{ij}^{\text{Исх}}, & \text{если } i \neq j, \\ \sigma_{ii}^{\text{Исх}}. \end{cases}$$

   При $\varepsilon = 1$ данное преобразование дает исходную ковариационную матрицу, а при $\varepsilon = 0$ — целиком диагональную матрицу.

   Для $r = 10\%$ найдите максимальное значение ε, при котором все весовые коэффициенты портфеля положительны.

3. Рассмотрим пример, приведенный в разделе 9.4. С помощью Excel определите портфель на огибающей, показатель β которого по отношению к эффективному портфелю y равен нулю. *Подсказка*: обратите внимание на то, что ввиду линейности ковариации тем же свойством обладает и β. Пусть $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ — выпуклая линейная комбинация x и y и пусть необходимо определить β_z. В этом случае

$$\beta_z = \frac{\text{Ковар}(z, y)}{\sigma_y^2} = \frac{\text{Ковар}\left[\lambda x + (1-\lambda)y, y\right]}{\sigma_y^2} =$$
$$= \lambda\frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} + \frac{(1-\lambda)\text{Ковар}(y, y)}{\sigma_y^2} = \lambda\beta_x + (1 - \lambda)\,.$$

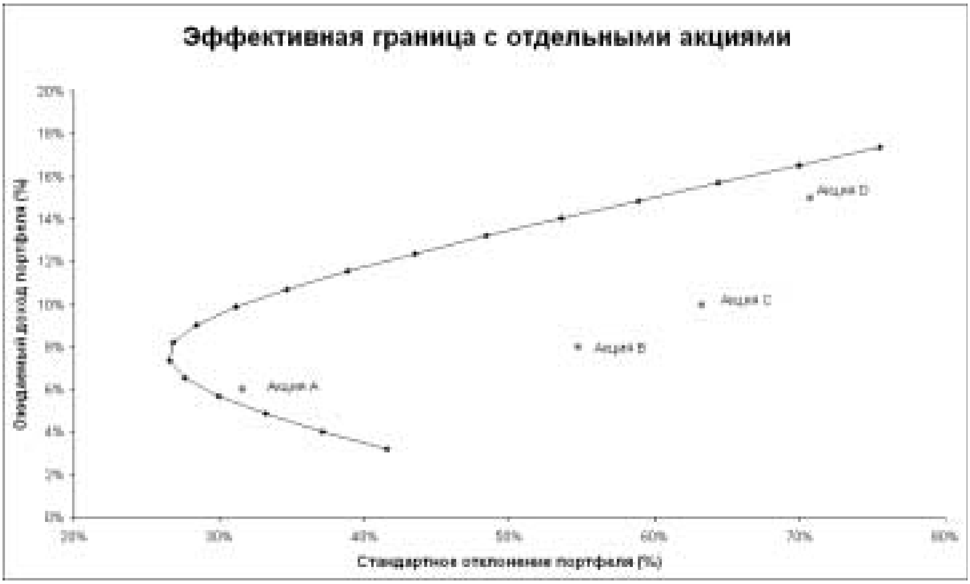
4. В этой задаче мы возвращаемся к задаче с четырьмя активами, рассмотренной в разделе 7.5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ИЗ ЧЕТЫРЕХ АКТИВОВ						
2							
3							
4	Ковариационная матрица					Средн доход	Станд откл
5	0,10	0,01	0,03	0,06		6%	31,62%
6	0,01	0,30	0,06	-0,04		8%	54,77%
7	0,03	0,06	0,40	0,02		10%	63,25%
8	0,06	-0,04	0,02	0,50		15%	70,71%

   Найдите огибающее множество для этих четырех активов и покажите, что все отдельные активы принадлежат этому множеству. У вас должен получиться примерно такой график, как показано ниже.

---

[2] Решение задачи при условии строго положительных весовых коэффициентов активов не является тривиальным. См. публикации Green, 1986 и Nielsen, 1987.



Приложение

В этом приложении собраны доказательства различных утверждений, выдвинутых в настоящей главе. Как и на протяжении главы, предполагается, что исследуются данные по N подверженным риску активам. Важно отметить, что все определения "реализуемости" и "оптимальности" даются именно по отношению к этому набору активов. Поэтому, например, слово "эффективный" в развернутом виде означает "эффективный по отношению к исследуемому набору из N активов".

Теорема 0. Множество всех реализуемых портфелей активов, подверженных риску, выпукло.

Доказательство. Портфель x является реализуемым тогда и только тогда, когда весовые коэффициенты (доли активов) в сумме дают единицу, т.е. $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, где N — количество активов. Предположим, что x и y — реализуемые портфели, а λ — некоторое число в диапазоне от 0 до 1. Очевидно, что портфель $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ также является реализуемым.

Теорема 1. Пусть c — некоторая константа. Обозначим через R вектор средних доходов. Портфель x находится на огибающей по отношению к набору из N активов тогда и только тогда, когда он является нормированным решением системы:

$$R - c = Sz$$
$$x_i = \frac{z_i}{\sum_h z_h}$$

Доказательство. Портфель x находится на огибающей реализуемого множества портфелей тогда и только тогда, когда он находится в точке касания линии, исходящей из точки c на оси y, с реализуемым множеством. Такой портфель должен доставлять максимум или минимум отношению $\frac{x(R-c)}{\sigma^2(x)}$, где $x\ (R-c)$ — скалярное произведение, выражающее средний избыточный над c доход, а $\sigma^2(x)$ — дисперсия портфеля. Пусть максимальное (или минимальное) значение этого отношения равно λ. Тогда наш портфель должен удовлетворять соотношению

$$\frac{x\,(R-c)}{\sigma^2(x)} = \lambda \Rightarrow x\,(R-c) = \sigma^2(x)\lambda = xSx^T\lambda.$$

Пусть h — некоторый актив; продифференцируем последнее соотношение по x_h. В результате получим $\overline{R_h} - c = Sx^T\lambda$. Записывая $z_h = \lambda x_h$, видим, что портфель является эффективным в том и только в том случае, если он является решением системы $R - c = Sz$. Нормирование вектора z для приведения суммы его координат к единице дает окончательный результат.

Теорема 2. Выпуклая линейная комбинация любых двух портфелей на огибающей также принадлежит огибающей реализуемого множества.

Доказательство. Пусть x и y — портфели, принадлежащие огибающей. По теореме 1 отсюда следует, что существуют два вектора, z_x и z_y, а также две константы, c_x и c_y, такие, что

- x — нормированный на единицу вектор z_x, т.е. $x_i = \frac{z_{xi}}{\sum\limits_h z_{xh}}$, а y — нормированный на единицу вектор z_y;
- выполняются соотношения $R - c_x = Sz_x$ и $R - c_y = Sz_y$.

Далее, поскольку z доставляет максимум отношению $\frac{z(R-c)}{\sigma^2(z)}$, максимум также будет давать и тот же вектор, нормированный каким-либо образом. Поэтому без потери общности можно полагать, что сумма компонент z равна 1.

Отсюда следует, что для любого действительного числа a портфель $az_x + (1-a)z_y$ является решением системы $R - [ac_x + (1-a)c_y] = Sz$. Утверждение теоремы доказано.

Теорема 3. Пусть y — портфель, лежащий на огибающей множества N активов. Тогда для любого другого портфеля x (включая, возможно, и портфель, состоящий всего из одного актива) существует константа c, такая, что выполняется следующее соотношение между средним ожидаемым доходом с портфеля x и средним ожидаемым доходом с портфеля y:

$$E\,(r_x) = c + \beta_x\,[E\,(r_y) - c]\,,$$

где $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$.

Более того, $c = E(r_z)$, где z — произвольный портфель, для которого Ковар$(z,y) = 0$.

Доказательство. Пусть y — некоторый портфель на огибающей, а x — другой произвольный портфель. Полагаем, что x и y представляют собой векторы-столбцы. Следует заметить, что

$$\beta_x \equiv \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{x^T S y}{y^T S y}.$$

Поскольку y лежит на огибающей, мы знаем, что существует вектор w и константа c, являющиеся решением системы $Sw = R - c$, и что $y = w / \sum\limits_i w_i = w/a$. Подставляя это равенство в выражение для β_x, получаем

$$\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{x^T S y}{y^T S y} = \frac{x^T (R - c)/a}{y^T (R - c)/a} = \frac{x^T \left(R - c\right)}{y^T \left(R - c\right)}.$$

Далее заметим, что поскольку $\sum\limits_i x_i = 1$, отсюда следует, что $x^T I \left(R - c\right) = E\left(r_x\right) - c$ и $y^T I \left(R - c\right) = E\left(r_y\right) - c$. Из этого соотношения получаем

$$\beta_x = \frac{E\left(r_x\right) - c}{E\left(r_y\right) - c}.$$

Это можно переписать в виде

$$E\left(r_x\right) = c + \beta_x \left[E\left(r_y\right) - c\right].$$

Для завершения доказательства предположим, что z — портфель, имеющий нулевую ковариацию с y. Тогда из предыдущих результатов следует $c = E(r_z)$. Утверждение теоремы доказано.

Теорема 4. Если в дополнение к N подверженным риску активам существует безрисковый актив с доходом r_f, то выполняется стандартное соотношение *линии рынка ценных бумаг*:

$$E\left(r_x\right) = r_f + \beta_x \left[E\left(r_y\right) - r_f\right],$$

где $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,M)}{\sigma_M^2}$.

Доказательство. Если существует безрисковая ставка дохода, то касательная к эффективной границе, проведенная от ее значения на оси y, лежит выше всех остальных реализуемых портфелей. Назовем точку касания на эффективной границе M; отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Примечание. Еще раз напомним, что выражение “рыночный портфель” в данном случае означает “портфель, являющийся рыночным в отношении совокупности N активов”.

Теорема 5. Предположим, существует портфель y, такой, что для любого портфеля x выполняется следующее соотношение:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c], \quad \beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2}.$$

Тогда портфель y принадлежит огибающей.

Доказательство. Подставляя определение β_x , получаем, что для любого портфеля x выполняется следующее соотношение:

$$\frac{x^T S y}{\sigma_y^2} = \frac{x^T R - c}{y^T R - c}.$$

Пусть x — вектор, составленный из одного только первого рискового актива: $x = \{ 1, 0, \ldots, 0 \}$. Тогда из предыдущего уравнения получаем

$$S_1 y \frac{y^T R - c}{\sigma_y^2} = E(r_1) - c.$$

Перепишем это в виде

$$S_1 a y = E(r_1) - c,$$

где S_1 — первая строка ковариационной матрицы S. Заметим, что $a = \frac{y^T R - c}{\sigma_y^2}$ — это константа, значение которой не зависит от вектора x. Если выбрать x состоящим из одного i-го подверженного риску актива, то получим

$$S_i a y = E(r_i) - c.$$

Таким образом, доказано, что вектор $z = ay$ является решением системы $Sz = R - c$; поэтому по теореме 1 нормированный вектор z принадлежит огибающей. Но нормирование вектора z как раз и дает вектор y.