# Содержание

# 2

# Другие элементарные функции



## Введение

В главе рассматриваются четыре класса функций: полиномы, рациональные, показательные и логарифмические функции. Они дополняют библиотеку элементарных функций, описанную в главе 1. Функций такой расширенной библиотеки достаточно для решения большинства задач, рассматриваемых в книге. Линейные и квадратичные функции, рассмотренные в главе 1, являются подмножеством более широкого класса функций, называемых *полиномами*.

## 2.1. Полиномы и рациональные функции

- Полиномы
- Нахождение приближенных корней полиномов
- Полиномиальные регрессионные уравнения
- Рациональные функции
- Решение практических задач

### Полиномы

В главе 1 были описаны следующие элементарные функции:

$$f(x) = b$$ Постоянная функция

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$$ Линейная функция

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$ Квадратичная функция

Кроме этих функций, также были рассмотрены некоторые частные случаи кубической функции.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$ Кубическая функция

Эти функции использовались при решении большинства рассмотренных ранее прикладных задач, например, при расчете производственных затрат, определении дохода и чистой прибыли, анализе убыточности производства, а также при вычислении размера упаковки для выпускаемой продукции. Обратите внимание на то, что уравнения, определяющие эти функции, начиная с постоянной и заканчивая кубической, состоят из однотипных слагаемых вида $ax^n$, где $a$ — любое действительное число, а $n$ — неотрицательное целое число. Все рассмотренные выше функции являются представителями более широкого класса функций, называемых *полиномами*.

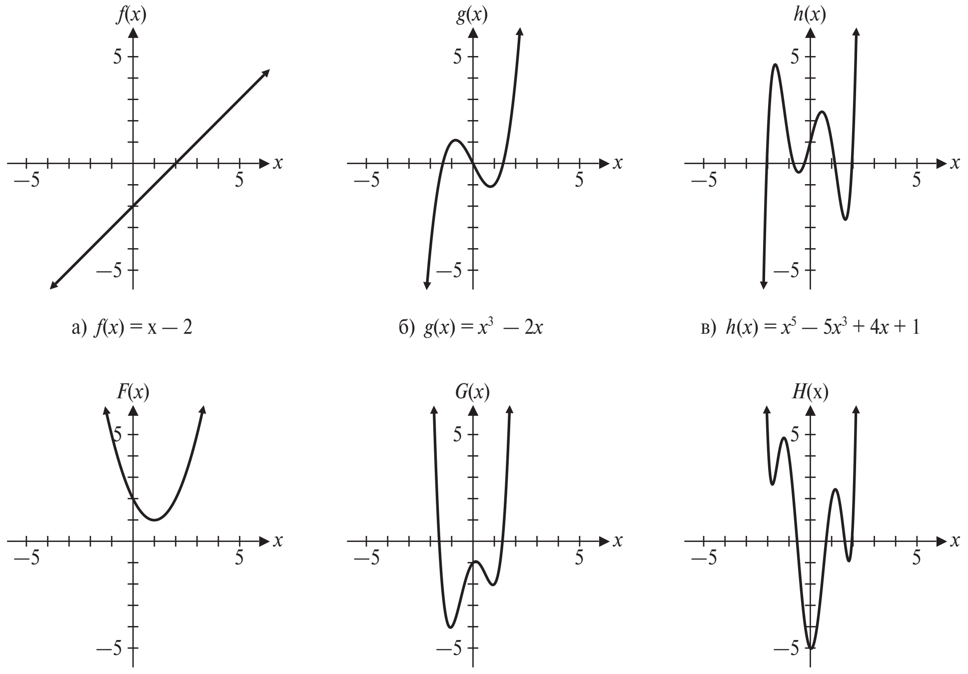
***Полином***

**Полиномом** (polynom) называют функцию, заданную уравнением вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

где $n$ — неотрицательное целое число, которое называют **степенью** полинома. Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, причем $a_n \neq 0$. **Область определения** полинома — множество всех действительных чисел.

Форма графика полинома связана с его степенью. Следует подчеркнуть, что графики полиномов нечетной степени точно так же, как и графики полиномов четной степени, ведут себя, в общих чертах, сходным образом. В схожести свойств графиков полиномов можно убедиться, изучив рис. 2.1 на котором изображены графики полиномов с 1-й по 6-ю степень.




а) $f(x) = x - 2$ б) $g(x) = x^3 - 2x$ в) $h(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + 1$

г) $F(x) = x^2 - 2x + 2$ д) $G(x) = 2x^4 - 4x^2 + x - 1$ е) $H(x) = x^6 - 7x^4 + 14x^2 - x - 5$

**Рис. 2.1.** Графики полиномиальных функций

Обратите внимание на то, что график полинома нечетной степени начинается в полуплоскости, лежащей ниже оси $x$, затем как минимум один раз пересекает ось $x$ и заканчивается в полуплоскости, лежащей выше оси абсцисс. Графики полиномов четной степени начинаются и заканчиваются в полуплоскости, лежащей выше оси $x$, и могут не пересекать ось абсцисс вовсе. Во всех уравнениях полиномов, графики которых изображены на рис. 2.1, коэффициент при наивысшей степени независимой переменной был выбран положительным. Если изменить знак коэффициента в слагаемом с наибольшей степенью $x$, то графики таких полиномов станут отражением первоначальных относительно оси $x$.

Графиком полинома является **непрерывная** линия, т.е. он не имеет разрывов, а также точек, в которых функция не определена. Это значит, что график полинома можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги. Кроме того, графики полиномов не содержат точек излома. На рис. 2.2 приведены графики двух функций. График первой функции не обладает свойством непрерывности. График второй функции является непрерывным, но имеет точку излома. Ни один из представленных на рисунке графиков не является графиком полинома.

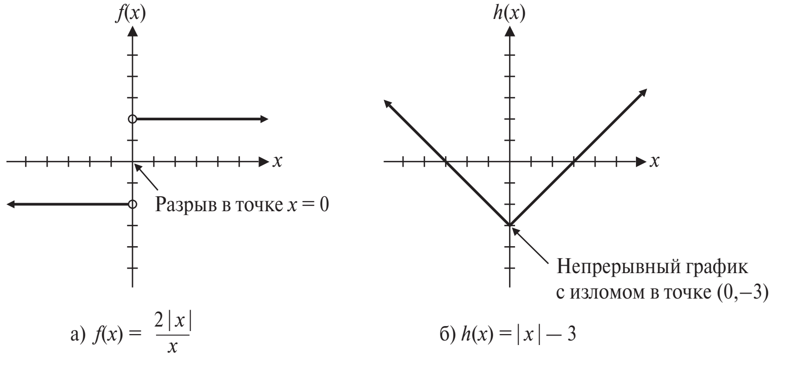



**Рис. 2.2.** Графики функций, один из которых имеет разрыв, а второй — излом

Графики полиномов, приведенные на рис. 2.1, содержат максимально возможное для полинома указанной степени количество *точек экстремума*. На графике непрерывной функции **точка экстремума** разделяет область возрастания и область убывания функции, или наоборот. В общем случае справедливо следующее утверждение.

***График полинома положительной степени $n$ может иметь максимум ($n - 1$) точку экстремума и пересекать ось $x$ максимум $n$ раз.***

**Задание 2.1.**

1. Какое минимальное количество точек экстремума могут иметь полиномы нечетной и четной степеней?
2. Какое максимальное количество точек пересечения с осью $x$ может иметь график полинома $n$-й степени?
3. Какое максимальное количество действительных решений может иметь уравнение полинома $n$-й степени?
4. Какое минимальное количество точек пересечения с осью $x$ могут иметь графики полиномов нечетной и четной степеней?
5. Какое минимальное количество действительных решений могут иметь полиномы нечетной и четной степеней? ■

Сравним графики двух полиномов в окрестности начала координат. Затем уменьшим масштаб изображения и снова сравним графики. Графики полиномов, о которых идет речь, изображены на рис. 2.3.

Анализируя рис. 2.3, можно сделать вывод, что член полинома, содержащий наивысшую степень независимой переменной, доминирует над остальными. Так, при постепенном уменьшении масштаба изображения график функции $y = x^5 - 5x^3 + 4x + 1$ становится все больше и больше похожим на график функции

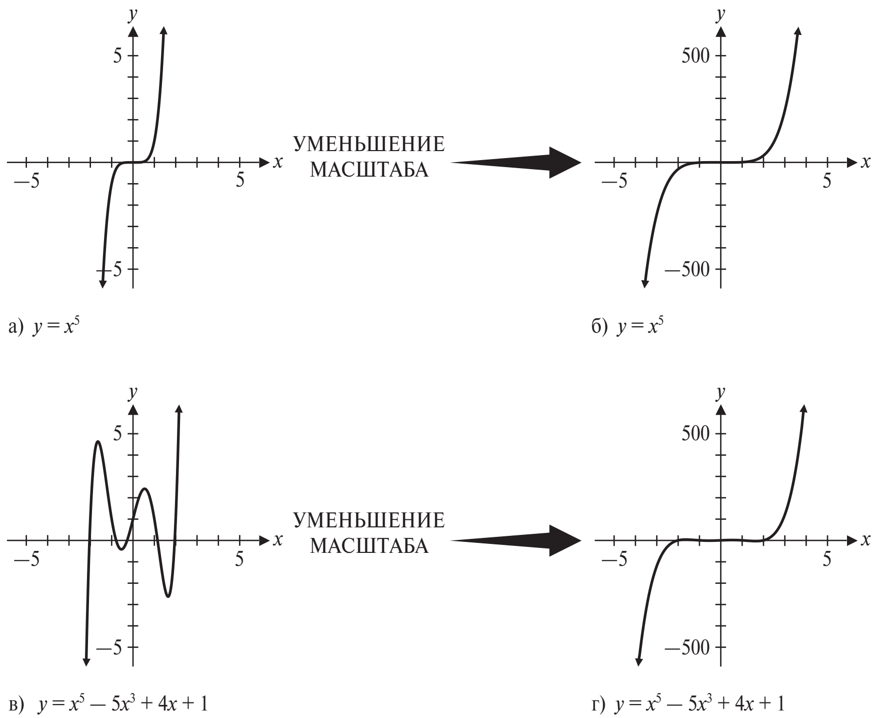



**Рис. 2.3.** Графики полиномов при уменьшении масштаба

$y = x^5$. Такое поведение характерно для полиномов любой степени и является их общим свойством.

**Задание 2.2.** Сравните графики полиномов $y = x^6$ и $y = x^6 - 7x^4 + 14x^2 - x - 5$, построив их в указанном масштабе.

1. $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$.
2. $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-500 \leqslant y \leqslant 500$. ■

## Нахождение приближенных корней полиномов

Точка пересечения графика функции $f$ с осью $x$ называется **нулем**[1] функции или **корнем** уравнения $f(x) = 0$. Приближенно вычислить нули функции до-

[1]Координаты точек пересечения графика с осью $x$ обязательно являются действительными числами. Уравнения соответствующих функций могут иметь корни, не принадлежащие множеству действительных чисел. Однако такие корни не являются точками пересечения графика функции с осью $x$. Поскольку мы условились рассматривать лишь те функции, область определения которых ограничена множеством действительных чисел, то комплексные корни уравнений соответствующих функций, которые не принадлежат множеству действительных чисел, здесь рассматриваться не будут.

статочно легко, если воспользоваться возможностями графической утилиты. Однако при этом должен быть известен интервал значений, в котором расположены координаты точек касания или пересечения графика с осью $x$. Но можно ли быть уверенным, что в найденном интервале значений находятся все нули функции? Найти интервал значений, в котором расположены все нули полинома, позволяет теорема 2.1, доказанная французским математиком О. Л. Коши (A. L. Cauchy) (1789–1857). Кроме этой теоремы, с именем Коши связан еще целый ряд теорем и математических понятий. Теорема 2.1 показывает, что классические математические инструменты могут эффективно применяться для решения современных прикладных задач.

**Теорема 2.1 (Локализация нулей полинома).** Если число $r$ является нулем многочлена

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

то[2]

$$|r| < 1 + \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$ ■

В полиноме коэффициент члена с наивысшей степенью $x$ часто называют **старшим** коэффициентом. Обратите внимание на то, что теорема 2.1 относится к полиномам, у которых старший коэффициент равен 1.

**Пример 2.1 (Приближенное вычисление нулей полинома).** Найдите приближенно (с точностью до двух значащих цифр) действительные нули полинома

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x + 6.$$

***Решение.*** Поскольку старший коэффициент полинома $P(x)$ равен 2, то теорему 2.1 непосредственно применить к полиному $P(x)$ нельзя. Однако ее можно применить к следующему полиному.

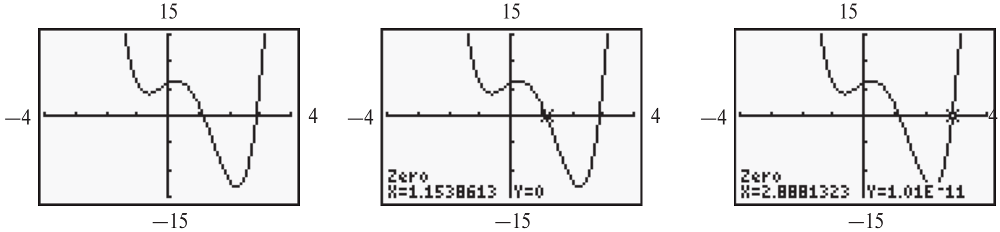
$$\begin{aligned} Q(x) = \frac{1}{2}P(x) = \frac{1}{2}\left(2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x + 6\right) = \\ = x^4 - \frac{5}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 3. \end{aligned}$$

При умножении функции на положительную константу ее график растягивается или сжимается вдоль вертикальной оси (см. раздел 1.2), а координаты точек пересечения графика с осью $x$ при этом не меняются, поэтому полиномы $P(x)$ и $Q(x)$

[2]Примечание: запись $\max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$ обозначает максимальное из чисел $|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|$.

имеют одинаковые нули. Таким образом, из теоремы 2.1 следует, что любой нуль $r$ полинома $P(x)$ должен удовлетворять условию

$$|r| < 1 + \max\left\{\left|-\frac{5}{2}\right|, |-2|, \left|\frac{3}{2}\right|, |3|\right\} = 1 + 3 = 4.$$




а) б) в)

**Рис. 2.4.** Приближенное вычисление нулей полинома с помощью графической утилиты

Иначе говоря, все нули полинома расположены в интервале значений от $-4$ до $4$. Из рис. 2.4, *а*, на котором изображен график полинома $P(x)$, видно, что полином $P(x)$ имеет два действительных нуля. При этом можно быть уверенным, что в указанном интервале значений лежат все нули полинома. Пользуясь возможностями программного пакета, можно приближенно (с точностью до двух десятичных знаков) найти действительные нули полинома, которые равны $1{,}15$ (рис. 2.4, *б*) и $2{,}89$ (рис. 2.4, *в*). Обратите внимание на то, что в указанном интервале значений независимой переменной расположены три точки экстремума полинома $P(x)$. Это максимально возможное количество точек экстремума для полинома четвертой степени. Иными словами, все точки экстремума также расположены в пределах указанного интервала. ■

**Упражнение 2.1.**
Вычислите приближенно (с точностью до двух значащих цифр) нули полинома

$$P(x) = 3x^3 + 12x^2 + 9x + 4.$$

■

## Полиномиальное регрессионные уравнения

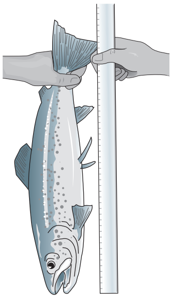
В домашнем задании, помещенном в конце главы 1, показано, что для поиска прямой линии, наиболее адекватно описывающей какой-либо набор данных, могут использоваться методы регрессионного анализа. Кроме линейных для этих целей используют функции других классов. Большинство графических утилит позволяют описать имеющийся набор данных разными функциональными зависимостями. В этом разделе рассматриваются полиномиальные регрессионные уравнения. Регрессионные уравнения других типов описаны в следующих главах.

**Пример 2.2 (Оценка веса рыбы).** Задача оценки веса рыбы по известной ее длине представляет интерес как для ученых, так и для любителей спортивной рыбалки. В табл. 2.1 приведены данные о длине и среднем весе озерной форели. Исходя из табличных данных и используя методы регрессионного анализа, найдите полиномиальную зависимость, позволяющую оценить вес озерной форели по ее размеру. Определите (с точностью до унции) вес озерной форели длиной 39, 40, 41, 42 и 43 дюйма соответственно.

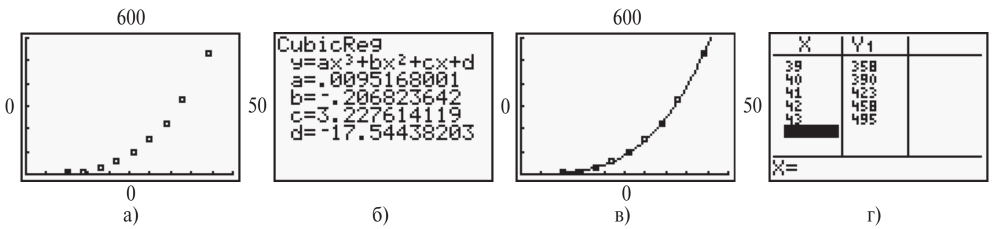
**Таблица 2.1.** Размеры озерной форели

www

| Длина, дюймы | Вес, унции | Длина, дюймы | Вес, унции |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 10 | 5 | 30 | 152 |
| 14 | 12 | 34 | 226 |
| 18 | 26 | 38 | 326 |
| 22 | 56 | 44 | 536 |
| 26 | 96 | | |



***Решение.*** На рис. 2.5, *а* на координатной плоскости изображены точки, которые соответствуют данным из табл. 2.1. По оси абсцисс отложена длина речной форели, а по оси ординат — вес рыбы. Из рисунка видно, что модель линейной регрессии в данном случае оказывается несостоятельной. И в самом деле, вряд ли можно ожидать, что между весом форели и ее длиной существует линейная зависимость. Наоборот, более вероятно, что вес рыбы связан с кубом ее длины. По этой причине кривую, описывающую табличные данные, мы будем искать среди полиномов третьей степени (рис. 2.5, *б*). (Процедура поиска полиномиального уравнения регрессии в графической утилите, детально описана в справочном руководстве.) На рис. 2.5, *в* изображен график найденного программой полинома (сплошная линия), описывающего данные (обозначены точками). Из рис. 2.5, *в* видно, что найденный кубический полином в самом деле достаточно хорошо аппроксимирует табличные данные. (Более детально критерии выбора аппроксимирующих функций, а также оценка точности выбранной регрессионной модели




а) б) в) г)

**Рис. 2.5.** Оценка веса рыбы по ее длине будут рассмотрены позже.) Вес форели указанной длины, оцененный с помощью найденной зависимости, приведен в таблице, изображенной на рис. 2.5, *г*. ■

**Упражнение 2.2.**
В табл. 2.2 приведен средний вес щуки разной длины. Аппроксимируйте табличные данные с помощью кубического полинома. Оцените (с точностью до унции) вес щуки длиной 39, 40, 41, 42, и 43 дюйма соответственно. ■

**Таблица 2.2.** Размеры щуки

www

| Длина, дюймы | Вес, унции | Длина, дюймы | Вес, унции |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
| 10 | 5 | 30 | 108 |
| 14 | 12 | 34 | 154 |
| 18 | 26 | 38 | 210 |
| 22 | 44 | 44 | 326 |
| 26 | 72 | 52 | 522 |

## Рациональные функции

Аналогично рациональным числам, которые определяются как частное двух целых чисел, *рациональные функции* определяются как частное двух полиномов. Уравнения, которые приведены ниже, определяют рациональные функции.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \frac{x-2}{x^2-x-6}, \qquad h(x) = \frac{x^3-8}{x},$$
$$p(x) = 3x^2 - 5x, \qquad q(x) = 7, \qquad r(x) = 0.$$

***Рациональная функция***
**Рациональной функцией** называется любая функция вида

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}, \quad d(x) \neq 0,$$

где $n(x)$ и $d(x)$ — полиномы. **Область определения** рациональной функции — множество всех действительных чисел, при которых $d(x) \neq 0$. Предполагается, что дробь $n(x)/d(x)$ приведена к несократимому виду.

**Пример 2.3 (Область определения функции и точки пересечения графика с осями координат).** Найдите область определения и точки пересечения с осями координат графика рациональной функции

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

***Решение.*** *Область определения*. Знаменатель равен 0 при $x = -1$. Следовательно, область определения данной функции — множество всех действительных чисел за исключением числа $-1$. Отсюда следует, что график функции $f$ не может пересекать вертикальную прямую $x = -1$.

*Точки пересечения графика с осью $x$*. Найдем значения независимой переменной $x$, при которых выполняется равенство $f(x) = 0$. Указанное равенство имеет место лишь в том случае, если $x-2 = 0$, т.е. если $x = 2$. Таким образом, число 2 — абсцисса единственной точки пересечения графика с осью $x$.

*Точки пересечения с осью $y$*. Ордината точки пересечения графика данной функции с осью $y$ равна

$$f(0) = \frac{0-2}{0+1} = -2.$$

■

**Упражнение 2.3.**
Найдите область определения и точки пересечения с осями координат графика рациональной функции: $g(x) = \frac{2x}{x-2}$. ■

В следующем примере исследуется поведение графика функции $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ в окрестности точки разрыва $x = -1$, а также поведение функции при неограниченном увеличении или уменьшении независимой переменной $x$. Используя полученную информацию, а также некоторые дополнительные сведения, мы построим эскиз графика функции $f$. В результате проведенного исследования мы ознакомимся с некоторыми характерными для графиков рациональных функций свойствами.

**Пример 2.4 (График рациональной функции).** Рассмотрим функцию $f$ из примера 2.3

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

1. Исследуйте график функции $f$ в окрестности точки разрыва $x = -1$.
2. Исследуйте поведение графика функции $f$ при неограниченном увеличении или уменьшении независимой переменной $x$.
3. Схематически изобразите график функции $f$.

***Решение.***

1. *Пусть $x$ стремится к $-1$ слева.*

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---:|
| $-2$ | 4 |
| $-1{,}1$ | 31 |
| $-1{,}01$ | 301 |
| $-1{,}001$ | 3001 |
| $-1{,}0001$ | 30 001 |
| $-1{,}00001$ | 300 001 |

Из таблицы видно, что функция $f(x)$ неограниченно возрастает, если $x$ стремится к числу $-1$ слева. Это утверждение можно записать в символьной форме.

$$f(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to -1^-$$

*Пусть $x$ стремится к $-1$ справа*:

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{f(x)}$ |
|---|---|
| 0 | $-2$ |
| $-0{,}9$ | $-29$ |
| $-0{,}99$ | $-299$ |
| $-0{,}999$ | $-2999$ |
| $-0{,}9999$ | $-29\,999$ |
| $-0{,}99999$ | $-299\,999$ |

Из таблицы видно, что функция $f(x)$ безгранично возрастает, если $x$ стремится к $-1$ справа. Это утверждение можно записать в символьной форме.

$$f(x) \to -\infty \quad \text{при} \quad x \to -1^+$$

Вертикальная прямая линия $x = -1$ называется *вертикальной асимптотой*. График функции $f$ приближается к этой линии, если $x$ приближается к $-1$. Вертикальные асимптоты, нанесенные на чертеж, облегчают построение графика функции $f$ вблизи его асимптот (рис. 2.6).

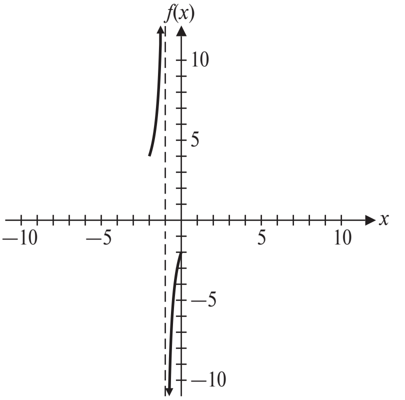



**Рис. 2.6.** Поведение графика вблизи вертикальной асимптоты $x = -1$

**2.** Разделим каждый член в числителе и знаменателе функции $f(x)$ на переменную $x$, т.е. на наивысшую степень независимой переменной, с которой она входит в числитель и знаменатель.

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1} = \frac{1 - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}.$$

При неограниченном увеличении или уменьшении переменной $x$ величины $2/x$ и $1/x$ стремятся к нулю, и, следовательно, функция $f(x)$ стремится к единице. Горизонтальная прямая линия $y = 1$ называется *горизонтальной асимптотой*. График функции $y = f(x)$ приближается к этой линии при уменьшении или увеличении независимой переменной $x$. Однако как именно график функции $y = f(x)$ приближается к горизонтальной прямой $y = 1$? Сверху? Или снизу? Или может быть одновременно с обеих сторон? Чтобы ответить на эти вопросы, проанализируем приведенные в таблице значения функции для некоторых значений независимой переменной.

*Пусть $x$ стремится к $\infty$.*

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 10 | 0,72727 |
| 100 | 0,97030 |
| 1000 | 0,99700 |
| 10 000 | 0,99970 |
| 100 000 | 0,99997 |

При неограниченном возрастании переменной $x$ график функции $y = f(x)$ приближается к прямой линии $y = 1$ снизу.

*Пусть $x$ стремится к $-\infty$.*

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-10$ | 1,33333 |
| $-100$ | 1,03030 |
| $-1000$ | 1,00300 |
| $-10\,000$ | 1,00030 |
| $-100\,000$ | 1,00003 |

При неограниченном уменьшении переменной $x$ график функции $y = f(x)$ приближается к прямой линии $y = 1$ сверху.

Чтобы облегчить построение графика функции $f(x)$ в интервале значений независимой переменной $x$, достаточно далеко отстоящих от начала координат, на рисунке сначала нужно изобразить горизонтальную асимптоту (рис. 2.7).

**3.** Теперь можно достаточно легко завершить построение эскиза графика функции $f$, нанеся на чертеж найденные в примере 2.3 точки пересечения графика с осями координат, а также некоторые другие вспомогательные точки, принадлежащие графику функции (рис. 2.8).

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-4$ | 2 |
| $-2$ | 4 |
| 0 | $-2$ |
| 2 | 0 |

■

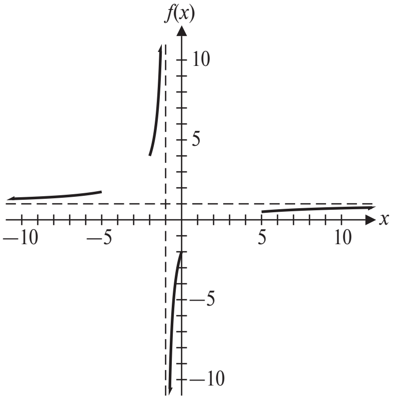



**Рис. 2.7.** Поведение графика функции $y = f(x)$ вблизи горизонтальной асимптоты $y = 1$

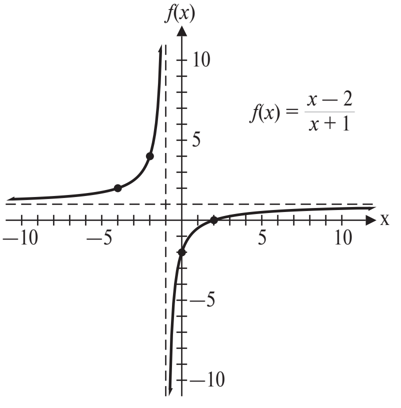



**Рис. 2.8.** Эскиз графика рациональной функции $f$

***Нахождение вертикальных и горизонтальных асимптот графиков рациональных функций***

Пусть дана рациональная функция

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)},$$

где $n(x)$ и $d(x)$ полиномы, которые не имеют общего делителя.

1. Если $a$ действительное число, такое что $d(a) = 0$, то прямая линия $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$.
2. **Горизонтальные асимптоты**, если они существуют, можно найти, разделив каждый член числителя $n(x)$ и знаменателя $d(x)$ на наивысшую степень $x$ в числителе и знаменателе, а затем выполнив последовательность действий, описанную в примере 2.4.

**Упражнение 2.4.**

Дана функция $g$ из упражнения 2.3: $g(x) = \dfrac{2x}{x-2}$.

1. Исследуйте поведение графика функции $g$ в окрестности точки разрыва $x = 2$.
2. Исследуйте поведение графика функции $g$ при неограниченном увеличении и уменьшении независимой переменной $x$.
3. Схематически изобразите график функции $g$. ■

Вертикальные и горизонтальные асимптоты, если они, конечно, существуют, значительно облегчают построение графиков рациональных функций. Ниже описана процедура поиска асимптот графиков рациональных функций, которая уже была использована в примере 2.4.

**Пример 2.5 (Построение графиков рациональных функций).** Рассмотрим следующую рациональную функцию.

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}.$$

1. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат, а также составьте уравнения вертикальных и горизонтальных асимптот графика.
2. Используя информацию, полученную при решении задачи 1, а также при необходимости вспомогательные точки, постройте график функции $f$ в масштабе $-7 \leqslant x \leqslant 7$ и $-7 \leqslant y \leqslant 7$.

***Решение.***

1. *Точки пересечения с осью* $x$. Равенство $f(x) = 0$ выполняется лишь в том случае, если $3x = 0$, т.е. если $x = 0$. Следовательно, график пересекает ось $x$ в единственной точке, абсцисса которой равна 0.

   *Точки пересечения с осью* $y$. Вычислим значение $f(0)$.

   $$f(0) = \frac{3 \cdot 0}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

   Следовательно, график пересекает ось $y$ в точке, ордината которой равна 0.

   *Вертикальные асимптоты*. Разложим знаменатель на множители.

   $$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{3x}{(x-2)(x+2)}.$$

   Знаменатель равен 0 при $x = -2$ и x = 2. Следовательно, вертикальными асимптотами графика являются прямые $x = -2$ и $x = 2$.

   *Горизонтальные асимптоты*. Разделим каждый член числителя и знаменателя на $x^2$, наивысшую степень $x$ в числителе и знаменателе.

   $$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

   При неограниченном уменьшении или увеличении переменной $x$ числитель стремится к нулю, а знаменатель — к единице. Иначе говоря, функция $f(x)$ стремится к нулю. Следовательно, горизонтальной асимптотой графика является прямая $y = 0$.

2. Используя информацию, полученную при решении задачи 1, а также нанеся на чертеж дополнительные точки, приведенные в таблице, закончим построение графика. График функции $f(x)$ изображен на рис. 2.9.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-4$ | $-1$ |
| $-2{,}3$ | $-5{,}3$ |
| $-1{,}7$ | $4{,}6$ |
| $0$ | $0$ |
| $1{,}7$ | $-4{,}6$ |
| $2{,}3$ | $5{,}3$ |
| $4$ | $1$ |

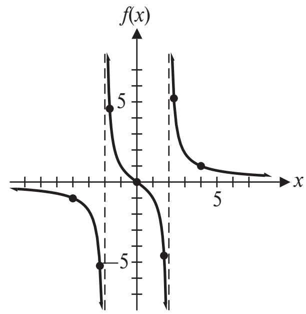



**Рис. 2.9.** График рациональной функции ■

**Упражнение 2.5.**
Дана рациональная функция: $g(x) = \frac{3x+3}{x-9}$.

1. Найдите все точки пересечения графика функции с осями координат, а также составьте уравнения вертикальных и горизонтальных асимптот графика.
2. Используя информацию, полученную при решении задачи 1, а также при необходимости вспомогательные точки, схематически изобразите график функции $g$ в масштабе: $-10 \leqslant x \leqslant 10$ и $-10 \leqslant y \leqslant 10$. ■

## Решение практических задач

Рациональные функции естественным образом возникают при решении разного рода прикладных задач.

**Пример 2.6 (Обучение сотрудников).** В компании, выпускающей компьютерные комплектующие, было замечено, что пройдя обучение в течение $t$ дней, новый сотрудник производит за рабочую смену в среднем $N(t)$ компонентов. Обозначенная зависимость описывается следующей функцией.

$$N(t) = \frac{50t}{t+4} \quad \text{при } t \geqslant 0.$$

Схематически изобразите график функции $N$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 100$. Постройте вертикальные и горизонтальные асимптоты графика. К какому значению стремится функция $N(t)$ при неограниченном возрастании переменной $t$?

***Решение.***

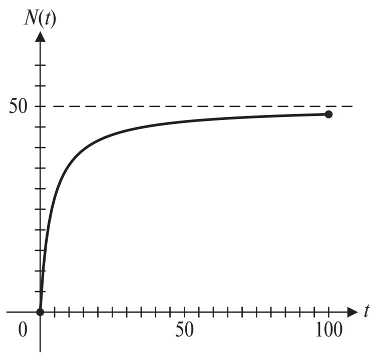
*Вертикальные асимптоты*. В интервале $t \geqslant 0$ график асимптот не имеет.

*Горизонтальные асимптоты*.

$$N(t) = \frac{50t}{t+4} = \frac{50}{1+\dfrac{4}{t}}.$$

Функция $N(t)$ стремится к 50 при неограниченном увеличении переменной $t$. Таким образом, горизонтальной асимптотой графика является прямая $y = 50$.

*Эскиз графика*. График функции схематически изображен на следующем рисунке.




Функция $N(t)$ стремится к 50 при неограниченном увеличении переменной $t$. Оказывается, что опытный сотрудник может изготовить на протяжении одного дня 50 компонентов. ■

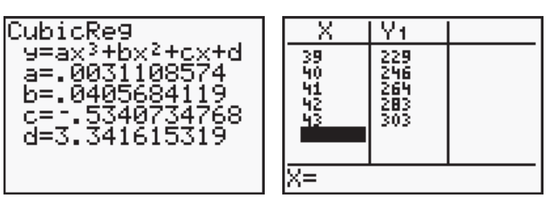
**Упражнение 2.6.** Решите пример 2.6 при условии, что зависимость имеет следующий вид.

$$N(t) = \frac{25t+5}{t+5} \quad \text{при } t \geqslant 0.$$ ■

## Ответы к упражнениям

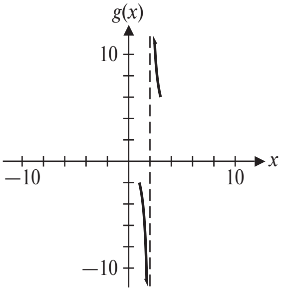
**2.1.** $-3{,}19$.

**2.2.**

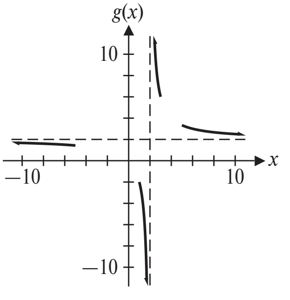


**2.3.** Область определения: все действительные числа за исключением 2; абсцисса точки пересечения графика с осью $x$: 0; ордината точки пересечения графика с осью $y$: 0.

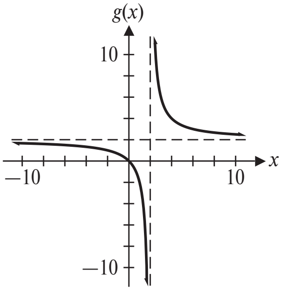
**2.4.** **1)** Вертикальная асимптота: $x = 2$.




**2)** Горизонтальная асимптота: $y = 2$.




**3)**

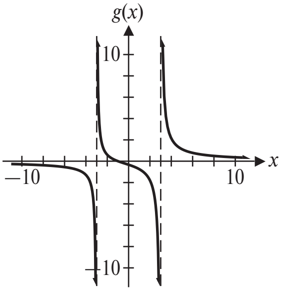



**2.5.** **1)** Абсцисса точки пересечения графика с осью $x$: $-1$; ордината точки пересечения графика с осью $y$: $-\frac{1}{3}$.

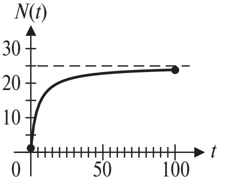
Вертикальные асимптоты: $x = -3$ и $x = 3$.

Горизонтальная асимптота: $y = 0$.

**2)**




**2.6.** В интервале $t \geqslant 0$ график вертикальных асимптот не имеет; горизонтальной асимптотой является прямая $y = 25$. Функция $N(t)$ стремится к 25 при неограниченном увеличении переменной $t$. Оказывается, что опытный сотрудник может изготовить на протяжении одного дня 25 компонентов.




## Практикум 2.1

**А** *В задачах 1–6 для каждого полинома найдите следующие характеристики.*

1) *Степень полинома.*
2) *Максимально возможное для полинома данной степени количество точек экстремума.*
3) *Максимально возможное для полинома данной степени количество точек пересечения графика с осью $x$.*
4) *Минимальное количество точек пересечения графика с осью $x$, которое может иметь полином данной степени.*
5) *Максимально возможное количество точек пересечения графика с осью $y$, которое может иметь полином данной степени.*
6) *Минимальное количество точек пересечения графика с осью $y$, которое может иметь полином данной степени.*

**1.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

**2.** $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

**3.** $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, $a \neq 0$.

**4.** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.

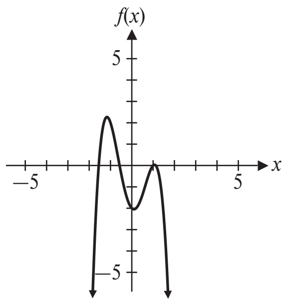
**5.** $f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$, $a \neq 0$.

**6.** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

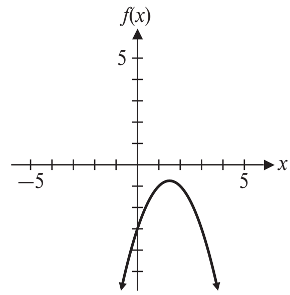
*Каждый график в задачах 7–14 представляет полиномиальную функцию. Ответьте на следующие вопросы.*

1) *Сколько точек экстремума имеет график полинома?*
2) *Полиному какой наименьшей степени может соответствовать приведенный график?*
3) *Какой знак имеет старший коэффициент полинома?*

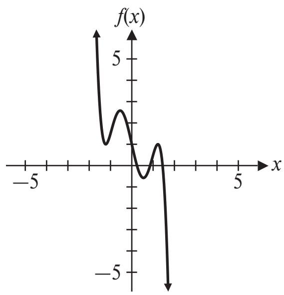
**7.**



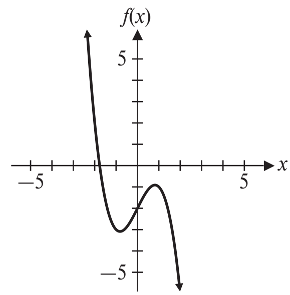

**8.**



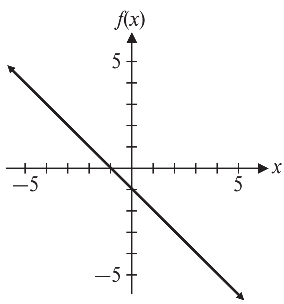

**9.**



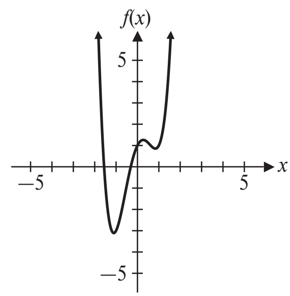

**10.**



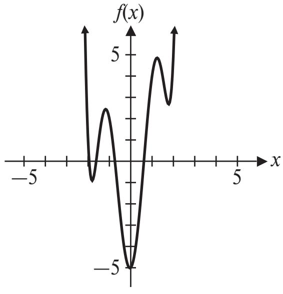

**11.**



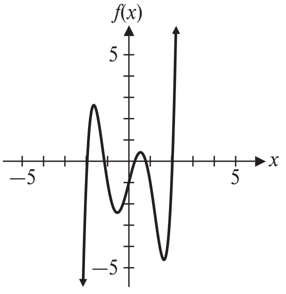

**12.**



**13.**




**14.**




**Б** *В задачах 15–20 для каждой рациональной функции выполните следующие задания.*

1) *Найдите точки пересечения графика с осями координат.*
2) *Определите область существования функции.*
3) *Составьте уравнения вертикальных и горизонтальных асимптот графика функции.*
4) *Схематически изобразите асимптоты пунктирными линиями. Затем нарисуйте график функции $y = f(x)$ в масштабе $-10 \leqslant x \leqslant 10$ и $-10 \leqslant y \leqslant 10$.*
5) *Используя графическую утилиту, постройте график функции $y = f(x)$ в масштабе, предложенном по умолчанию.*

**15.** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$.

**16.** $f(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$.

**17.** $f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$.

**18.** $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.

**19.** $f(x) = \dfrac{4-2x}{x-4}$.

**20.** $f(x) = \dfrac{3-3x}{x-2}$.

**21.** Уменьшая масштаб изображения, сравните между собой графики функций $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 2$ и $y = 2x^4$ (см. рис. 2.3). Какие при этом можно сделать выводы?

**22.** Уменьшая масштаб изображения, сравните между собой графики функций $f(x) = x^3 - 2x + 2$ и $y = x^3$. Какие при этом можно сделать выводы?

**23.** Уменьшая масштаб изображения, сравните между собой графики функций $f(x) = -x^5 + 4x^3 - 4x + 1$ и $y = -x^5$. Какие при этом можно сделать выводы?

**24.** Уменьшая масштаб изображения, сравните между собой графики функций $f(x) = -x^5 + 5x^3 + 4x - 1$ и $y = -x^5$. Какие при этом можно сделать выводы?

**25.** Сравните графики функций $y = 2x^4$ и $y = 2x^4 - 5x^2 + x + 2$, построенные в следующем масштабе.

**а)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$. **б)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-500 \leqslant y \leqslant 500$.

**26.** Сравните графики функций $y = x^3$ и $y = x^3 - 2x + 2$, построенные в следующем масштабе.

**а)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$. **б)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-500 \leqslant y \leqslant 500$.

**27.** Сравните графики функций $y = -x^5$ и $y = -x^5 + 4x^3 - 4x + 1$, построенные в следующем масштабе.

**а)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$. **б)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-500 \leqslant y \leqslant 500$.

**28.** Сравните графики функций $y = -x^5$ и $y = -x^5 + 5x^3 - 5x + 2$, построенные в следующем масштабе.

**а)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$. **б)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-500 \leqslant y \leqslant 500$.

*В задачах 29–34 воспользуйтесь теоремой 2.1 и определите для каждого полинома на оси $x$ интервал значений, в котором расположены все его нули. Приближенно, с точностью до двух десятичных знаков, вычислите все действительные нули каждого полинома.*

**29.** $2x^3 - x^2 - 7x + 3$. **30.** $3x^3 + 10x^2 + 6x - 2$.

**31.** $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$. **32.** $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

**33.** $x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 15$. **34.** $x^5 + 14x^4 - 10x^2 - 15$.

**35.** Постройте на координатной плоскости прямую линию $y = 0{,}5x + 3$. Укажите на этой прямой две разные точки. Постройте модель линейной регрессии для множества данных, которое образовано координатами этих двух точек. Предложите свои уравнения прямых и проделайте с ними описанную выше процедуру. Объясните, какая существует взаимосвязь между найденной моделью линейной регрессии и прямой, которая проходит через две точки, по которым построена модель.

**36.** Постройте на координатной плоскости график параболы $y = x^2 - 5x$. Укажите на параболе три разные точки. Постройте модель квадратичной регрессии для множества данных, которое образовано координатами этих трех точек. Предложите свои уравнения парабол и проделайте с ними описанную выше процедуру. Объясните, какая существует взаимосвязь между найденной моделью квадратичной регрессии и параболой, которая проходит через три точки, по которым построена модель.

**B** *Для каждой рациональной функции в задачах 37–42 выполните следующие задания.*

1) *Найдите все точки пересечения ее графика с осями координат.*
2) *Найдите все вертикальные и горизонтальные асимптоты графика.*
3) *Изобразите схематически асимптоты пунктирными линиями. Затем постройте график функции $f$ в масштабе $-10 \leqslant x \leqslant 10$ и $-10 \leqslant y \leqslant 10$.*
4) *Используя графическую утилиту, постройте график функции $y = f(x)$ в масштабе, предложенном по умолчанию.*

**37.** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - x - 6}$. **38.** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + x - 6}$.

**39.** $f(x) = \dfrac{6 - 2x^2}{x^2 - 9}$. **40.** $f(x) = \dfrac{3 - 3x^2}{x^2 - 4}$.

**41.** $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2 + x - 6}$. **42.** $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 + x - 12}$.

**43.** Напишите уравнение полинома наименьшей степени, график и точки пересечения которого с осями координат изображены на рис. 2.10.

**44.** Напишите уравнение полинома наименьшей степени, график и точки пересечения которого с осями координат изображены на рис. 2.11.

**45.** Напишите уравнение полинома наименьшей степени, график и точки пересечения которого с осями координат изображены на рис. 2.12.

**46.** Напишите уравнение полинома наименьшей степени, график и точки пересечения которого с осями координат изображены на рис. 2.13.

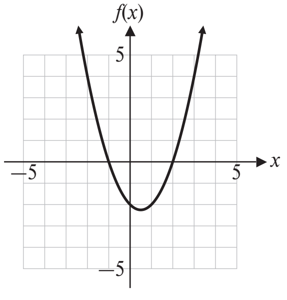



**Рис. 2.10.** Иллюстрация к задаче 43

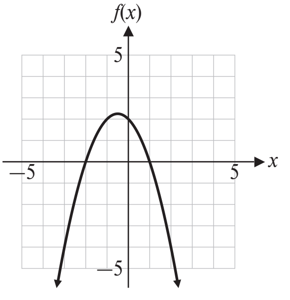



**Рис. 2.11.** Иллюстрация к задаче 44

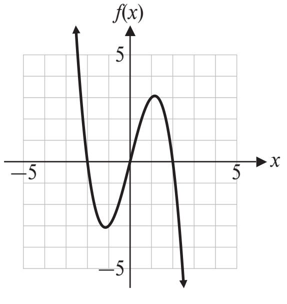



**Рис. 2.12.** Иллюстрация к задаче 45

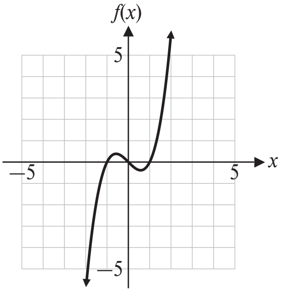



**Рис. 2.13.** Иллюстрация к задаче 46

## Применение математики

### Экономика и бизнес

**47.** *Средние затраты*. Постоянные затраты компании, которая производит сноуборды, составляют 200 долл. в день. При выпуске 20 сноубордов за день общие затраты составляют 3800 долл.

**а)** Составьте уравнение функции затрат при условии, что величина общих затрат за день $C(x)$ линейно связана с количеством сноубордов $x$, произведенных в течение дня.

**б)** Средние затраты на производство сноуборда при выпуске $x$ сноубордов за день выражаются формулой $\overline{C}(x) = C(x)/x$. Найдите уравнение функции средних затрат.

**в)** Постройте эскиз графика функции средних затрат на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 30$. Схематически изобразите асимптоты графика.

**г)** К какому значению стремится величина средних затрат на производство сноуборда при растущем объеме производства.

**48.** *Средние затраты*. Постоянные затраты компании, производящей доски для серфинга, составляют 300 долл. в день. При выпуске 20 досок для серфинга за день общие затраты составляют 5100 долл.

**а)** Составьте уравнение функции затрат, предполагая, что величина общих затрат за день $C(x)$ линейно связана с количеством $x$ продукции, произведенной в течение дня.

**б)** Средние затраты на производство доски для серфинга при выпуске $x$ досок в день выражается формулой $\overline{C}(x) = C(x)/x$. Найдите уравнение функции средних затрат.

**в)** Постройте эскиз графика функции средних затрат на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 30$. Схематически изобразите асимптоты графика.

**г)** К какому значению стремится величина средних затрат на производство доски для серфинга при растущем объеме производства.

**49.** *Техническое обслуживание*. Первоначальная стоимость офисного копировального аппарата составляет 2500 долл. В соответствии с договором техническое обслуживание копировального аппарата в течение первого года эксплуатации обходится в 200 долл. За каждый последующий год стоимость технического обслуживания аппарата увеличивается на 50 долл. Таким образом суммарная стоимость копировального аппарата через $n$ лет его эксплуатации рассчитывается согласно следующей формуле.

$$C(n) = 2500 + 175n + 25n^2.$$

Среднегодовая стоимость копировального аппарата через $n$ лет после его покупки выражается формулой $\overline{C}(n) = C(n)/n$.

**а)** Найдите рациональную функцию $\overline{C}$.

**б)** Схематически изобразите график функции $\overline{C}$ на отрезке $2 \leqslant n \leqslant 20$.

**в)** Через какой интервал времени функция среднегодовой стоимости достигнет минимального значения? Чему равно это минимальное значение? (*Подсказка.* Используя эскиз графика, построенный при решении п. *б*, определите интервал значений независимой переменной, в котором функция принимает минимальное значение. Вычислите значения функции $\overline{C}(n)$ для целых значений независимой переменной, лежащих в этом интервале, и найдите среди них минимальное.) Интервал времени, через который функция среднегодовой стоимости оборудования достигает минимального значения, часто называют **интервалом между техническим обслуживанием** оборудования.

**г)** Используя графическую утилиту, постройте график функции среднегодовой стоимости оборудования $\overline{C}$. Попеременно переходя в режимы изменения масштаба изображения и определения координат указанных точек, определите, через какой интервал времени функция среднегодовой стоимости достигает минимального значения.

**50.** *Минимальные средние затраты*. Финансовые аналитики компании, производящей проигрыватели музыкальных компакт-дисков, определили, что величина затрат на производство $x$ проигрывателей в течение дня выражается следующим уравнением.

$$C(x) = x^2 + 2x + 2000.$$


Величина средних затрат на производство проигрывателя при выпуске $x$ проигрывателей в день выражается формулой $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

**а)** Найдите рациональную функцию $\overline{C}$.

**б)** Схематически изобразите график функции $\overline{C}$ на отрезке $5 \leqslant x \leqslant 150$.

**в)** При каком уровне дневного производства проигрывателей (с точностью до ближайшего целого значения) величина средних затрат на единицу продукции достигает минимального значения? Чему равно это минимальное значение (с точностью до цента)? (*Подсказка.* Используя эскиз графика, построенный при решении п. *б*, определите интервал значений независимой переменной, в котором функция принимает минимальное значение. Вычислите значения функции $\overline{C}(x)$ для целых значений независимой переменной, лежащих в этом интервале, и найдите среди них минимальное.)

**г)** Используя графическую утилиту, постройте график функции средних затрат $\overline{C}$. Попеременно переходя в режимы изменения масштаба изображения и определения координат указанных точек, определите, при каком дневном объеме производства (ответ округлите до ближайшего целого значения) величина средних затрат на выпуск проигрывателя достигает минимального значения. Чему равно минимальное значение средних затрат с точностью до цента?

**51.** *Минимальные средние затраты*. По просьбе ветеринарной клиники консалтинговая фирма, используя статистические методы, составила следующее уравнение затрат.

$$C(x) = 0{,}00048(x - 500)^3 + 60\,000$$
$$\text{при } 100 \leqslant x \leqslant 1000$$

Здесь $C(x)$ — величина месячных затрат (долл.) на услуги, оказанные в $x$ случаях. Средние затраты на оказание услуг определяются следующей формулой.

$$\overline{C}(x) = C(x)/x.$$

**а)** Напишите уравнение функции средних затрат $\overline{C}$.

**б)** Используя графическую утилиту, постройте график функции $\overline{C}$.

**в)** Изменяя масштаб изображения и определения координат указанных точек графической утилиты определите, при каком количестве обращений в ветеринарную клинику месячная величина средних затрат на оказанные услуги достигает минимального значения. Каково это минимальное значение?

**52.** *Минимальные средние затраты*. Финансовый отдел больницы, используя статистические методы, вывел следующее уравнение затрат на оказание медицинской помощи.

$$C(x) = 20x^3 - 360x^2 + 2300x - 1000$$
$$\text{при } 1 \leqslant x \leqslant 12.$$

Здесь $C(x)$ — месячные затраты (тыс. долл.) на помощь, оказанную в $x$ случаях (тыс.). Средние затраты на оказание помощи выражаются формулой $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

**а)** Напишите уравнение функции средних затрат $\overline{C}$.

**б)** Используя графическую утилиту, постройте график функции $\overline{C}$.

**в)** Переключаясь между режимами изменения масштаба изображения и определения координат указанных точек графической утилиты определите, при каком количестве обращений за помощью в больницу месячная величина средних затрат на оказание помощи достигает минимального значения. Чему равно это минимальное значение с точностью до доллара?

**53.** *Точка равновесия*. Музыкальные компакт-диски реализуются через сеть розничных магазинов. Проанализировав рынок, маркетинговая компания составила таблицы зависимости спроса и предложения от цены (табл. 2.3 и табл. 2.4 соответственно). В первой таблице через переменной $x$ обозначено количество компакт-дисков, приобретаемых ежедневно по цене $p$ долларов за штуку. Во второй таблице через $x$ обозначено количество компакт-дисков, предлагаемых к ежедневной продаже, по цене $p$ долларов.

**а)** Найдите уравнение линейной регрессии, наиболее точно описывающее данные табл. 2.3, а также уравнение квадратичной регрессии, наиболее полно описывающее данные табл. 2.4.

**б)** Определите координаты точки пересечения графиков уравнений, найденных при решении п. *а*. Определите равновесную цену с точностью до цента и равновесное количество (т.е. величину спроса и предложения при равновесной цене на конкурентном рынке) с точностью до целого значения.

**Таблица 2.3.** Цена и спрос

| $x$ | $p = D(x)$, долл. |
|---|---|
| 25 | 19,50 |
| 100 | 14,25 |
| 175 | 10,00 |
| 250 | 8,25 |

**Таблица 2.4.** Цена и предложение

| $x$ | $p = S(x)$, долл. |
|---|---|
| 25 | 2,10 |
| 100 | 3,80 |
| 175 | 8,50 |
| 250 | 15,70 |

**54.** *Точка равновесия*. Прочитайте условие задачи 53. Обобщите их на данные приведенных ниже таблиц. В этот раз для описания данных табл. 2.5 используйте уравнение квадратичной регрессии, а данных табл. 2.5 — уравнение линейной регрессии.

**Таблица 2.5.** Цена и спрос

| $x$ | $p = D(x)$, **долл.** |
|---|---|
| 0 | 24 |
| 40 | 23 |
| 65 | 20 |
| 115 | 11 |

**Таблица 2.6.** Цена и предложение

| $x$ | $p = S(x)$, **долл.** |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 40 | 10 |
| 65 | 12 |
| 115 | 16 |

## Биологические науки

**55.** *Здравоохранение.* В табл. 2.7 приведена общая сумма расходов правительства Соединенных Штатов Америки на здравоохранение (млрд. долл.), а также размер расходов в расчете на душу населения (долл.) в указанные годы, начиная с 1970 г.

**а)** Обозначьте через $x$ количество лет, которое прошло с 1970 г., и найдите кубическое регрессионное уравнение, описывающее рост общих расходов правительства США на здравоохранение.

**б)** Используя полином, найденный при решении п. *а*, оцените общие расходы на здравоохранение в 2010 г. Ответ округлите до ближайших десяти миллиардов долларов.

**Таблица 2.7.** Общие расходы на здравоохранение

www

| Год | Общие расходы, млрд. долл. | Расходы на душу населения, долл. |
|---|---|---|
| 1970 | 73,2 | 341 |
| 1975 | 132,9 | 592 |
| 1980 | 247,3 | 1052 |
| 1985 | 428,2 | 1666 |
| 1990 | 699,4 | 2689 |
| 1995 | 993,7 | 3638 |

**56.** *Здравоохранение*. Обратитесь к данным табл. 2.7.

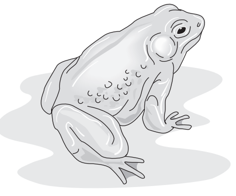
**а)** Обозначьте через $x$ количество лет, которое прошло с 1970 г., и найдите кубический полином регрессии, описывающий расходы на здравоохранение в расчете на душу населения.

**б)** Используя полином, найденный в пункте 1, оцените величину расходов на здравоохранение в расчете на душу населения в 2010 г. Ответ округлите до ближайших десяти миллиардов долларов.

**57.** *Физиология*. Изучая зависимость скорости сокращения мышц лягушки от величины воздействующей на них нагрузки, исследователи Б. Фемз (B. O. Fems) и Дж. Марш (J. Marsh) установили, что она снижается при увеличении нагрузки.

В частности, ими была найдена следующая зависимость скорости сокращения мышц $v$ (см/с) от нагрузки $x$ (г):

$$v(x) = \frac{26 + 0{,}06x}{x} \quad \text{при } x \geqslant 5.$$



**а)** Определите, к какому значению стремится функция $v(x)$ при увеличении переменной $x$.

**б)** Нарисуйте эскиз графика функции $v$.

## Социальные науки

**58.** *Теория обучения*. В 1917 г. Луис Леон Тёрстоун (L. L. Thurstone), основоположник психометрии, предложил описывать зависимость между числом успешно выполняемых за единицу времени действий и количеством занятий по обучению таким действия $x$ следующей рациональной функцией.

$$f(x) = \frac{a(x + c)}{(x + c) + b}.$$

Предположим, что процесс приобретения навыка набора текста описывается следующей функцией.

$$f(x) = \frac{55(x + 1)}{x + 8} \quad \text{при } x \geqslant 0,$$

где $f(x)$ — количество корректно набираемых слов спустя $x$ недель практических занятий.

**а)** Определите, к какому значению стремится функция $f(x)$ при увеличении переменной $x$.

**б)** Нарисуйте эскиз графика функции $f$, а также схематически изобразите его вертикальные и горизонтальные асимптоты.

**59.** *Супружество*. В табл. 2.8 приведены данные о количестве заключенных и расторгнутых браков на 1000 человек за указанные годы, начиная с 1960 г.

**а)** Пусть $x$ — количество лет, которое прошло с 1960 г. Найдите уравнение полинома кубической регрессии, описывающее количество заключаемых браков.

**б)** Используя полином, найденный при решении п. *а*, оцените количество браков (с точностью до первого знака после десятичной запятой), которые будут заключены в 2005 и 2010 гг.

**60.** *Расторжение брака*. Обратитесь к данным табл. 2.8.

**а)** Пусть $x$ — количество лет, которое прошло с 1950 г. Найдите кубическое регрессионное уравнение, описывающее количество расторгнутых браков.

**Таблица 2.8.** Количество заключенных и расторгнутых браков (в расчете на 1000 человек)

www

| Год | Количество заключенных браков | Количество расторгнутых браков |
|---|---|---|
| 1960 | 8,5 | 2,2 |
| 1965 | 9,3 | 2,5 |
| 1970 | 10,6 | 3,5 |
| 1975 | 10,0 | 4,8 |
| 1980 | 10,6 | 5,2 |
| 1985 | 10,1 | 5,0 |
| 1990 | 9,8 | 4,7 |
| 1995 | 8,9 | 4,4 |

**б)** Используя полином, найденный при решении п. *а*, оцените количество браков (с точностью до первого знака после десятичной запятой), которые будут расторгнуты в 2005 г.

## 2.2. Показательная функция

- Показательная функция
- Показательная функция с основанием $e$
- Решение задач, описывающих процессы роста и распада, с помощью показательных функций
- Сложные проценты
- Непрерывное начисление сложных процентов

В разделе рассматривается важный класс функций, называемых *показательными*. Эти функции служат решением многих прикладных задач, а также широко используются при моделировании различного рода процессов. Так, показательными функциями описываются увеличение суммы на депозитном счете при начислении сложных процентов, рост численности населения планеты, темпы размножения животных и бактерий, процесс радиоактивного распада химических элементов, скорость развития технологий, в частности, компьютерных, а также приобретения профессиональных навыков.

### Показательная функция

Прежде всего, обратим внимание на то, что функции

$$f(x) = 2^x \quad \text{и} \quad g(x) = x^2$$

не являются тождественными. Более того, это совершенно разные функции. Функция $g$ — это уже знакомая нам квадратичная функция. В ней показатель степени —

константа, а независимая переменная служит основанием степени. В уравнении, определяющем функцию $f$, константой является основание степени, а независимая переменная входит в показатель степени. Функция $f$ является представителем нового класса функций, называемых *показательными*. В общем случае показательная функция может быть определена следующим образом.

| ***Показательная функция*** |
|---|
| Функция, заданная уравнением $$f(x) = b^x, \quad \text{где } b > 0,\, b \neq 1,$$ называется **показательной функцией** с основанием $b$. **Область определения** функции $f$ — множество всех действительных чисел; **область значений** функции $f$ — множество всех положительных действительных чисел. |

Поскольку комплексные числа, например, $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$, выходят за рамки материала, рассматриваемого в данном учебном пособии, в дальнейшем будем считать, что основание показательной функции $b$ является положительным. Показательная функция с основанием $b$, равным единице, рассматриваться не будет, поскольку она эквивалентна постоянной функции, которая была описана в предыдущей главе: $f(x) = 1^x = 1$.

Многие учащиеся без малейших колебаний нарисуют от руки эскиз графика показательной функции, заданной, например, уравнением $y = 2^x$ или $y = 2^{-x}$. (*Примечание*: $2^{-x} = 1/2^x = (1/2)^x$.) Очевидно, что сначала нужно составить таблицу значений функции для нескольких целых значений независимой переменной $x$. Полученные пары значений представляют координаты точек, отображаемых в декартовой системе координат и соединяемые плавной линией, как показано на рис. 2.14. Приведенный способ построения графика показательной функции имеет всего один недостаток — значения функции $2^x$ определены не для всех действительных значений независимой переменной. Детально выражения $2^5$, $2^{-3}$, $2^{2/3}$, $2^{-3/5}$, $2^{1,4}$ и $2^{-3,14}$ (т.е. выражения вида $2^p$, где $p$ — рациональное число) описаны в приложении А.7 (т. 2). Но какой математический смысл выражения $2^{\sqrt{2}}$? Ответить на этот вопрос не так-то легко, обладая лишь знаниями, полученными до сих пор. Строгое определение смысла, который вкладывается в запись $2^{\sqrt{2}}$, приводится в более специализированных изданиях. В них показано, что выражение вида $2^x$ обозначает положительное действительное число при любых действительных значениях переменной $x$, а график функции $y = 2^x$ на самом деле имеет вид, показанный на рис. 2.14.

С познавательной точки зрения полезно сравнить графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$. Для этого построим их в одной системе координат, как показано на

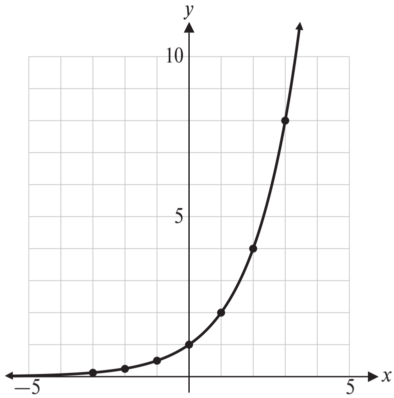



**Рис. 2.14.** График функции $y = 2^x$

рис. 2.15, *а*. График функции

$$f(x) = b^x, \quad \text{где } b > 1 \text{ (рис. 2.15, } б\text{)},$$

очень напоминает график функции $y = 2^x$, а график функции

$$f(x) = b^x \quad \text{при } 0 < b < 1 \text{ (рис. 2.15, } б\text{)}$$

очень похож на график функции $y = 2^{-x}$. Обратите внимание на то, что для графиков рассмотренных функций горизонтальной асимптотой является ось $x$.

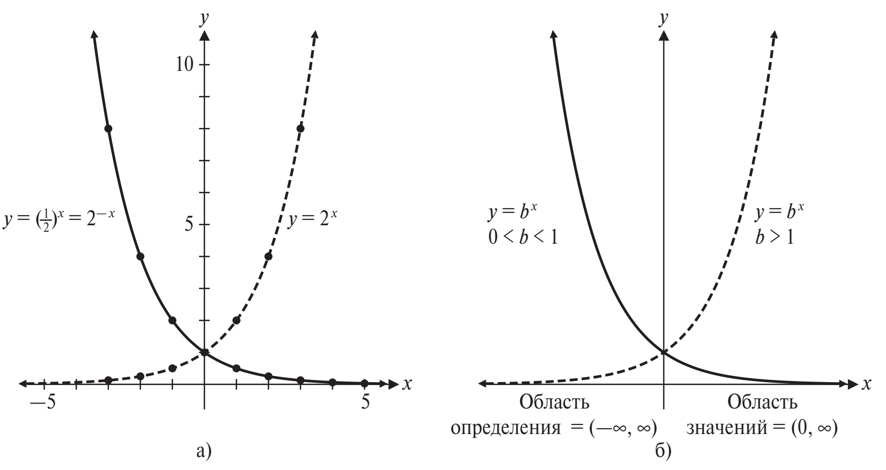



**Рис. 2.15.** Показательные функции

Графики, изображенные на рис. 2.15, обладают рядом важных свойств, общими для всех показательных функций. Эти свойства приведены ниже без доказательства.

***Основные свойства графиков показательных функций, $f(x) = b^x$, где $b > 0$ и $b \neq 1$***

1. График любой показательной функции проходит через точку с координатами $(0,\ 1)$ (причем $b^0 = 1$ при любых разрешенных значениях основания $b$).
2. Графиком любой показательной функции является непрерывная кривая. Иначе говоря, график показательной функции не имеет точек разрыва или точек, в которых значение функции изменяется скачком.
3. Ось $x$ является горизонтальной асимптотой графиков всех показательных функций.
4. Если $b > 1$, то при возрастании $x$ функция $f(x) = b^x$ возрастает.
5. Если $0 < b < 1$, то при возрастании $x$ функция $f(x) = b^x$ убывает.

Построение графика показательной функции не представляет особых трудностей, если под рукой есть калькулятор, на панели которого имеется клавиша, обозначенная $\boxed{y^x}$, или ее эквивалент. Процесс построения графика показательной функции с помощью калькулятора описанан в примере 2.7.

**Пример 2.7 (Построение графиков показательных функций).** Изобразите схематически график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right) 4^x$ на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

***Решение.*** Используя калькулятор, составим таблицу значений функции при некоторых целых значениях независимой переменной. Полученные точки графика нанесем на координатную плоскость и соединим их плавной кривой, как показано на рис. 2.16.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-2$ | 0,031 |
| $-1$ | 0,125 |
| 0 | 0,50 |
| 1 | 2,00 |
| 2 | 8,00 |

■

**Упражнение 2.7.**
Изобразите график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right) 4^{-x}$ на отрезке $-2 \leqslant x \leqslant 2$. ■

**Задание 2.3.**
Постройте в одной той же системе координат графики функций $f(x) = 2^x$ и $g(x) = 3^x$. При каких значениях независимой переменной $x$ графики этих функций пересекаются? При каких значениях независимой переменной $x$ график функции $f$ лежит выше графика функции $g$, а при каких — ниже? Как ведут себя графики функций при неограниченном увеличении переменной $x$: приближаются или удаляются друг от друга? А как они ведут себя при неограниченном уменьшении переменной $x$? Обсудите ответы. ■

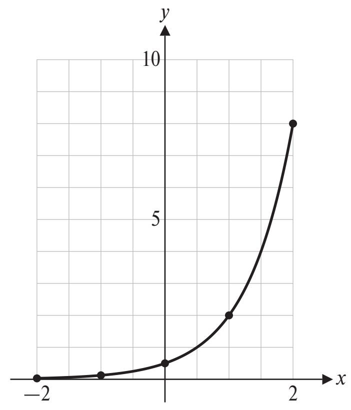



**Рис. 2.16.** График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right) 4^x$

Показательные функции, область которых включает иррациональные числа, обладают такими же свойствами, как и показательные функции с рациональными значениями степени, подробно описанными в приложении А.7 (т. 2). Ниже приведено описание этих и еще двух, не менее важных, свойств показательных функций, область определения которых представлена множеством действительных чисел.

***Свойства показательных функций***

Для положительных $a$ и $b$, где $a \neq 1$ и $b \neq 1$, а также любых действительных чисел $x$ и $y$ справедливы следующие соотношения.

**1.** Свойства степеней.

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \boldsymbol{\frac{4^{2y}}{4^{5y}} \boxed{= 4^{2y-5y}} = 4^{-3y}}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad (ab)^x = a^x b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

**2.** $a^x = a^y$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
(Например, если $7^{5t+1} = 7^{3t-3}$, то $5t + 1 = 3t - 3$, т.е. $t = -2$.)

**3.** Например, если $x \neq 0$, то $a^x = b^y$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
(Если $a^5 = 2^5$, то $a = 2$.)

## Показательная функция с основанием $e$

Какое из значений основания $b$ показательной функции $y = b^x$ используется чаще остальных? Если вы посмотрите на панель калькулятора, то, скорее всего, обнаружите клавиши, обозначенные $\boxed{10^x}$ и $\boxed{e^x}$. Причина, по которой основание

10 имеет столь большое значение, понятна — мы пользуемся десятичной системой счисления. А какому значению соответствует символ $e$ и почему основание $e$ стоит в одном ряду с основанием 10? Оказывается, что показательная функция с основанием $e$ используется чаще, чем остальные показательные функции вместе взятые. Причина заключается в том, что при использовании показательной функции с основанием $e$ некоторые формулы, численные решения некоторых математических моделей реальных процессов, а также многие сложные математические проблемы принимают наиболее простую форму. Именно поэтому показательная функция с основанием $e$ встречается чрезвычайно часто в выражениях и формулах, описывающих прикладные задачи. Фактически показательная функция с основанием $e$, $y = e^x$, настолько широко распространена, что для нее даже придумали специальное название — *экспонента*.

Число $e$ является иррациональным, т.е. его, как и число $\pi$, нельзя точно представить в виде конечной десятичной дроби. При достаточно больших значениях $x$ приближенное значение числа $e$ можно вычислить с любой заданной точностью при помощи следующего выражения.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{2.1}$$

К какой величине стремится значение выражения (2.1) при неограниченном увеличении $x$? Прежде чем прочесть ответ, попытайтесь найти его самостоятельно. Быть может, вы считаете, что значения выражения (2.1) стремятся к единице, поскольку к единице стремятся значения, которые принимает выражение $1 + \frac{1}{x}$?

Проверим это предположение. Для этого непосредственно вычислим значения выражения (2.1) для некоторых увеличивающихся значений $x$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.9.

**Таблица 2.9.** Результаты вычислений числа $e$

| $x$ | $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 10 | 2,59374... |
| 100 | 2,70481... |
| 1000 | 2,71692... |
| 10 000 | 2,71814... |
| 100 000 | 2,71827... |
| 1 000 000 | 2,71828... |

Интересно отметить, что выражение (2.1) ни при каких значениях $x$ не принимает значений, близких к единице. Наоборот, оказывается, что значения, которые принимает выражение (2.1), стремятся к числу, близкому к 2,7183. Фактически при неограниченном возрастании величины $x$ значения выражения (2.1) стремятся к иррациональному числу, называемому числом $e$. Значение иррационального числа $e$ с точностью до 12 десятичных знаков приведено ниже.

$$\boldsymbol{e = 2{,}718281828459}.$$

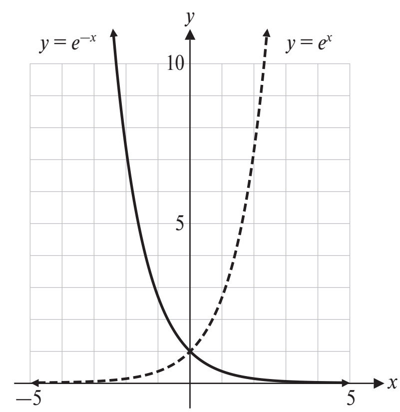
Сравните это значение со значением выражения $e^1$, вычисленным с помощью калькулятора. Единого мнения относительно того, кто открыл константу $e$, до сих пор не существует. Названо оно в честь великого швейцарского математика Леонарда Эйлера (Leonhard Euler) (1707–1783).

***Показательная функция с основанием e***

Показательные функции с основанием $e$ и $1/e$ определяются уравнениями $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ соответственно.

Область определения функций: $(-\infty,\ \infty)$.

Область значений функций: $(0,\ \infty)$.




**Задание 2.4.**

Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f(x) = e^x$, $g(x) = 2^x$ и $h(x) = 3^x$. При каких значениях $x$ графики функций пересекаются? Графики каких функций лежат выше и ниже графиков двух остальных функций соответственно при условии, что переменная $x$ принимает положительные значения? Как изменится ответ, если переменная $x$ принимает отрицательные значения? ■

## Решение задач, описывающих процессы роста и распада, с помощью показательных функций

Решение большинства задач, в которых смоделированы процессы роста или распада, требует использования показательной функции с основанием $e$. В данном разделе приведены два примера решения подобных задач. Намного больше задач такого типа предлагается для самостоятельного решения в практикуме 2.2.

**Пример 2.8 (Экспоненциальный рост).** Холера — кишечное заболевание, которое вызывается бактериями холеры. Бактерии размножаются путем деления клеток. Рост количества бактерий в зараженном организме приближенно можно описать следующим показательным уравнением.

$$N = N_0 e^{1{,}386t},$$

где $N$ — количество бактерий в организме через $t$ часов после заражения, а $N_0$ — количество бактерий в организме в момент заражения (начало отсчета времени $t = 0$). При условии, что в начальный момент времени в организме присутствует 25 бактерий холеры, определите (с точностью до одной бактерии), сколько их будет насчитываться в организме через указанное время.

**1.** 0,6 ч. **2.** 3,5 ч.

***Решение.*** Подставляя в приведенное выше уравнение $N_0 = 25$, получаем следующую формулу.

$$N = 25e^{1{,}386t}$$

График этого уравнения изображен на рис. 2.17

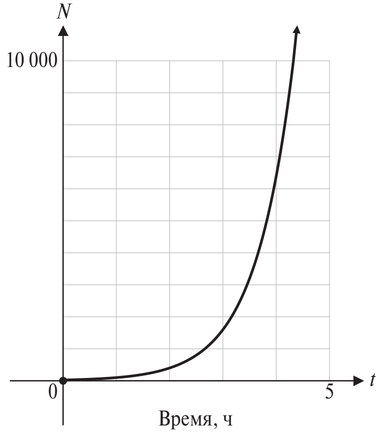



**Рис. 2.17.** Количество бактерий холеры через $t$ часов после заражения

**1.** Находим значение $N$ при $t = 0{,}6$.

$$N = 25e^{1{,}386(0{,}6)} = 57 \text{ бактерий}$$ Используйте калькулятор

**2.** Находим значение $N$ при $t = 3{,}5$.

$$N = 25e^{1{,}386(3{,}5)} = 3197 \text{ бактерий}$$ Используйте калькулятор ■

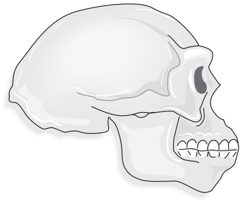
**Упражнение 2.8.**

Пусть количество бактерий холеры увеличивается по экспоненциальному закону, рассмотренному в примере 2.8. При условии, что в момент заражения в организме присутствует 55 бактерий, определите (с точностью до одной бактерии), сколько их будет присутствовать в организме через указанное время.

**1.** 0,85 ч. **2.** 7,25 ч. ■

**Пример 2.9 (Радиоактивный распад).** Под воздействием космических лучей в земной атмосфере образуются нейтроны. В результате столкновения нейтронов с атомами азота образуется радиоактивный изотоп углерода $^{14}$C. Этот изотоп проникает в ткани живых организмов (в первую очередь растений) вместе с углекислым газом. На протяжении всей жизни растения или животного содержание изотопа углерода $^{14}$C в его тканях поддерживается на постоянном уровне. Сразу же после смерти организма содержание изотопа $^{14}$C в его тканях начинает уменьшаться по следующему закону.

$$A = A_0 e^{-0{,}000124t},$$



где $A$ — содержание углерода в организме через $t$ лет после его смерти, $A_0$ — содержание углерода в организме в момент смерти $t = 0$. Предположим, что в пробе, взятой из черепной кости непосредственно после смерти человека, содержалось 500 мг изотопа $^{14}$C, определите, сколько миллиграммов этого изотопа останется в этой пробе через указанное время.

**1.** 15 000 лет. **2.** 45 000 лет.

Ответ вычислите с точностью до двух десятичных знаков.

***Решение.*** Подставляя значение $A_0 = 500$ в уравнение экспоненциального распада, получаем следующий результат.

$$A = 500e^{-0{,}000124t}$$

График уравнения изображен на рис. 2.18

**1.** Находим значение $A$ при $t = 15\,000$.

$$A = 500e^{-0{,}000124(15\,000)} = 77{,}84 \text{ мг} \qquad \text{Используем калькулятор}$$

**2.** Находим значение $A$ при $t = 45\,000$.

$$A = 500e^{-0{,}000124(45\,000)} = 1{,}89 \text{ мг} \qquad \text{Используем калькулятор}$$

■

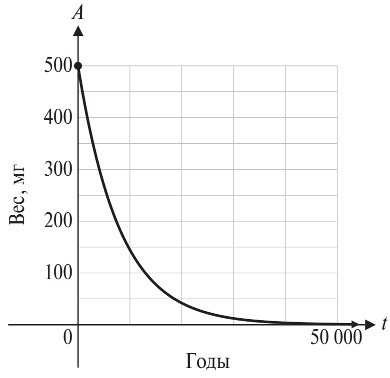



**Рис. 2.18.** Содержание изотопа $^{14}$C в черепной кости через $t$ лет после смерти человека

**Упражнение 2.9.** Вернемся к рассмотрению модели экспоненциального распада, описанной в примере 2.9. Определите, сколько миллиграммов изотопа $^{14}$C содержалось в пробе, взятой из черепной кости непосредственно после смерти человека, если через 18 000 лет в пробе содержится 25 мг изотопа. Ответ округлите до миллиграмма. ■

**Задание 2.5.**

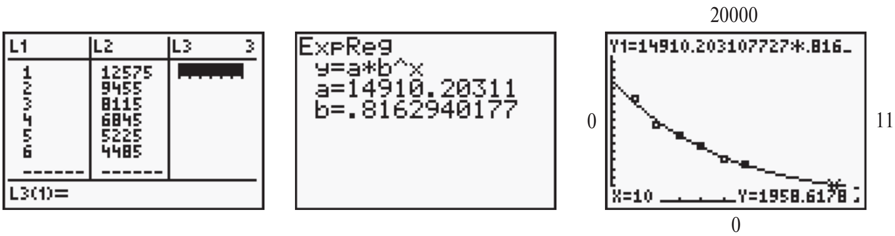
1. Постройте в одной и той же системе координат графики трех уравнений экспоненциального распада $A = A_0 e^{-0{,}35t}$, $t \geqslant 0$ при $A_0 = 10$, 20, и 30 соответственно.
2. Найдите асимптоты графиков, построенных при решении п. *a*.
3. Опишите, как ведут себя функции, заданные уравнениями из п. *a*, при больших временных значениях. ■

**Пример 2.10 (Амортизация).** В табл. 2.10 приведены данные о рыночной стоимости микроавтобуса (долл.) через $x$ лет после его покупки. Определите коэффициенты показательного регрессионного уравнения вида $y = ab^x$, наиболее адекватно описывающей табличные данные. Используя это уравнение, вычислите текущую цену микроавтобуса. Оцените его рыночную стоимость через 10 лет после покупки. Ответы округлите до ближайшего доллара.

***Решение.*** Введем данные, приведенные в табл. 2.10, в графическую утилиту (рис. 2.19, *а*), а затем, используя соответствующие команды, найдем коэффициенты искомого уравнения регрессии (рис. 2.19, *б*). С помощью найденного уравнения, находим текущую цену микроавтобуса: $y_1(0) = 14\,910$ долл. Исходные данные и график уравнения регрессии, отображенные в окне графической утилиты, показаны на рис. 2.19, *в*. Пользуясь соответствующими командами графической

**Таблица 2.10.** Рыночная стоимость микроавтобуса

| $x$ | **Стоимость, долл.** |
|---|---|
| 1 | 12 575 |
| 2 | 9455 |
| 3 | 8115 |
| 4 | 6845 |
| 5 | 5225 |
| 6 | 4485 |




а) б) в)

**Рис. 2.19.** Вычисление стоимости микроавтобуса

утилиты, определим ординату точки графика, абсцисса которой равна 10, и тем самым найдем стоимость микроавтобуса через 10 лет после его покупки. Она равна 1959 долл. ■

**Упражнение 2.10.** В табл. 2.11 приведены данные о роночной стоимости автомобиля класса ‘люкс’ (долл.) через $x$ лет после его покупки. Определите коэффициенты показательного регрессионного уравнения вида $y = ab^x$, наиболее адекватно описывающей табличные данные. Пользуясь найденным уравнением, вычислите текущую цену автомобиля. Оцените его рыночную стоимость через 10 лет после приобретения. Ответы округлите до целых чисел. ■

**Таблица 2.11.** Стоимость автомобиля класса “люкс”

| $x$ | **Стоимость, долл.** |
|---|---|
| 1 | 23 125 |
| 2 | 19 050 |
| 3 | 15 625 |
| 4 | 11 875 |
| 5 | 9450 |
| 6 | 7125 |

## Сложные проценты

В этом разделе рассматривается рост денежной суммы в результате начисления на нее сложных процентов. **Процентом** называется плата за пользование отданными в ссуду деньгами. Обычно процент вычисляется как сотая доля от основной суммы (называется также **процентной ставкой**) за определенный период времени. Если при наступлении срока выплаты процентов причитающиеся начисления повторно инвестируются по той же ставке, то в будущем периоде процент начисляется как на основную сумму, так и на уже начисленные проценты. Проценты, выплачиваемые на повторно инвестированные суммы, называются **сложными**. Сложные проценты вычисляются по следующей формуле.

***Сложные проценты***

Если **основная сумма** $\boldsymbol{P}$ (**текущая стоимость**) инвестируется под сложные проценты по годовой **процентной ставке** $r$ (выраженной в виде десятичного числа), начисляемой $m$ раз в год, то **сумма** $A$ (**будущая стоимость**), которая будет лежать на счете через $t$ лет, выражается формулой

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

[*Примечание*. Принятые выше обозначения не позволяют заменить символ $P$ символом $A_0$.]

**Пример 2.11 (Начисление денег по сложным процентам).** На банковский счет положена денежная сумма размером 1000 долл. Сложные проценты выплачиваются ежемесячно из расчета 10% годовых. Какая сумма денег будет на счете через 10 лет? Ответ округлите до цента.

***Решение.*** Воспользуемся формулой начисления сложных процентов.

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = \\ &= 1000\left(1 + \frac{0{,}10}{12}\right)^{12\cdot 10} = \\ &= 2707{,}04 \text{ долл.} \end{aligned}$$

Используйте калькулятор

График уравнения $A = 1000\left(1 + \frac{0{,}10}{12}\right)^{12t}$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 20$ изображен на рис. 2.20. ■

**Упражнение 2.11.** Определите, какая сумма будет на счете через 5 лет, если на сумму размером 5000 долл. ежедневно начисляются сложные проценты по процентной ставке 9% годовых. Ответ округлите до цента. ■

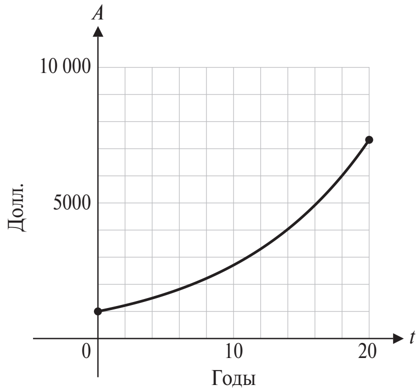



**Рис. 2.20.** Результаты начисления сложных процентов

**Задание 2.6.**
Предположим, что на депозитный счет в банке положена сумма 1000 долл. под 5% годовых. Оцените в уме сумму денег, которая будет на счете к концу первого года, при условии, что сложные проценты начисляются 1) ежеквартально, 2) ежемесячно, 3) ежедневно и 4) ежечасно. Затем воспользуйтесь формулой начисления сложных процентов и для каждого варианта определите размер суммы на счете к концу первого года с точностью до цента. Оцените точность вычислений, произведенных в уме. ■

## Непрерывное начисление сложных процентов

Вернемся к рассмотрению формулы начисления сложных процентов.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Предложим, что основная сумма $P$, годовая процентная ставка $r$ и срок вклада $t$ остаются неизменными, а количество периодов времени в году, по истечении которых начисляются сложные проценты, $m$, неограниченно растет. Как при этом будет изменяться накопленная сумма $A$: неограниченно возрастать или стремиться к некоторому предельному значению?

Для начала положим $P$ равным 100 долл., $r = 0{,}08$ и $t = 2$ года. При помощи калькулятора составим таблицу значений накопленной суммы для некоторых значений величины $m$ (табл. 2.12). Из табл. 2.12 следует, что накопленная сумма имеет наибольший прирост, если сложные проценты начисляются не раз в год, а раз в полгода. При дальнейшем увеличении $m$ рост накопленной суммы замедляется. Оказывается, что при увеличении $m$ накопленная сумма $A$ приближается к величине 117,35 долл.

**Таблица 2.12.** Начисление сложных процентов

| **Периодичность начисления сложных процентов** | $m$ | $A = 100\left(1 + \frac{0{,}08}{m}\right)^{2m}$**, долл.** |
|---|---|---|
| Ежегодно | 1 | 116,6400 |
| Раз в полгода | 2 | 116,9859 |
| Ежеквартально | 4 | 117,1659 |
| Еженедельно | 52 | 117,3367 |
| Ежедневно | 365 | 117,3490 |
| Ежечасно | 8760 | 117,3510 |

Можно показать, что при увеличении количества периодов времени $m$, по истечении которых начисляются сложные проценты, накопленная сумма, выражающаяся формулой

$$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt},$$

стремится к величине $Pe^{rt}$. Последнее выражение известно как формула непрерывного начисления сложных процентов. Эта формула широко используется в бизнесе, банковской сфере и экономике в целом.

***Формула непрерывного начисления сложных процентов***

Если на основную стоимость $P$, инвестированную по годовой процентной ставке $r$ (выраженной в виде десятичного числа), непрерывно начисляются сложные проценты, величина накопленной суммы $A$ по истечении $t$ лет определяется формулой

$$A = Pe^{rt}.$$

**Пример 2.12 (Ежедневное и непрерывное начисление сложных процентов).** Какая сумма денег будет накоплена на счете через два года, если текущая стоимость вложенных средств составляет 5000 долл., ежегодная процентная ставка равна 8%, а сложные проценты начисляются:

**1.** ежедневно; **2.** непрерывно.

Ответ округлите до цента.

***Решение.***

**1.** Воспользуемся формулой начисления сложных процентов.

$$A = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

Подставим в нее следующие значения: $P = 5000$; $r = 0{,}08$; $m = 365$ и $t = 2$.

$$A = 5000\left(1+\frac{0{,}08}{365}\right)^{365\cdot 2} = 5867{,}45 \text{ долл.}$$ Используйте калькулятор

**2.** Воспользуемся формулой непрерывного начисления сложных процентов

$$A = Pe^{rt}.$$

Подставим в нее следующие значения: $P = 5000$; $r = 0{,}08$; $t = 2$.

$$A = 5000e^{0{,}08\cdot 2} = 5867{,}55 \text{ долл.}$$ Используйте калькулятор ■

**Упражнение 2.12.** Определите размер денежной суммы, которая будет накоплена за 1,5 года при условии, что текущая стоимость вклада равна 8000 долл., процентная ставка составляет 9% годовых, а сложные проценты начисляются по следующим правилам.

**1.** ежедневно; **2.** непрерывно.

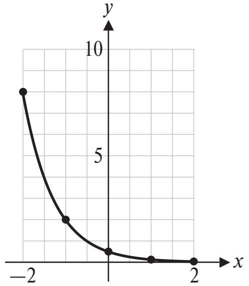
Ответы вычислите с точностью до цента. ■

Для удобства формулы расчета накопленной стоимости при начислении на основную сумму простых процентов, сложных процентов, а также непрерывном начислении сложных процентов, обобщены ниже.

| ***Формулы начисления процентов*** | |
|---|---|
| Простые проценты | $A = P(1 + rt)$ |
| Сложные проценты | $A = P\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{mt}$ |
| Непрерывное начисление сложных процентов | $A = Pe^{rt}$ |

## Ответы к упражнениям

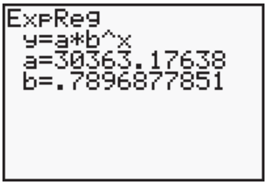
**2.7.**




**2.8.** **1)** 179 бактерий; **2)** 1 271 659 бактерий.

**2.9.** 233 мг.

**2.10.** Покупная цена: 30 363 долл.; стоимость через 10 лет: 2864 долл.



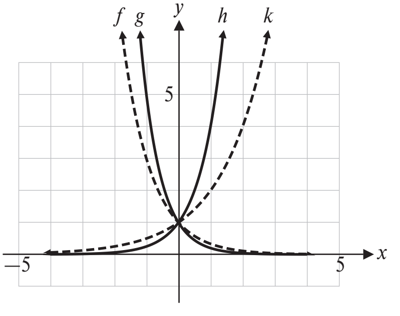

**2.11.** 7841,13 долл.

**2.12.** **1)** 9155,23 долл. **2)** 9156,29 долл.

## Практикум 2.2

**А**

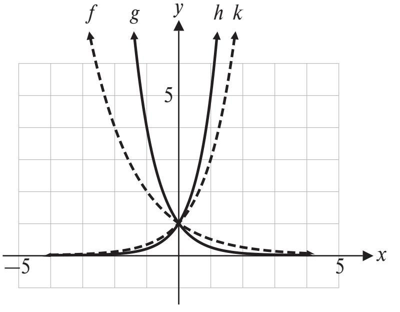
**1.** С каждым приведенным ниже уравнением сопоставьте функции $f$, $g$, $h$ и $k$, графики которых изображены на рисунке.




**а)** $y = 2^x$. **б)** $y = (0{,}2)^x$.

**в)** $y = 4^x$. **г)** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

**2.** Сопоставьте с каждым приведенным ниже уравнением одну из функций $f$, $g$, $h$ и $k$, графики которых изображены на рисунке.




**а)** $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. **б)** $y = (0{,}5)^x$.

**в)** $y = 5^x$. **г)** $y = 3^x$.

*В задачах 3–14 постройте графики данных функций в указанных интервалах значений независимой переменной.*

**3.** $y = 5^x$; $[-2;\ 2]$.

**4.** $y = 3^x$; $[-3;\ 3]$.

**5.** $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$; $[-2;\ 2]$.

**6.** $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$; $[-3;\ 3]$.

**7.** $f(x) = -5^x$; $[-2;\ 2]$.

**8.** $g(x) = -3^x$; $[-3;\ 3]$.

**9.** $y = -e^{-x}$; $[-3;\ 3]$.

**10.** $y = -e^x$; $[-3;\ 3]$.

**11.** $y = 100e^{0,1x}$; $[-5;\ 5]$.

**12.** $y = 10e^{0,2x}$; $[-10;\ 10]$.

**13.** $g(t) = 10e^{-0,2t}$; $[-5;\ 5]$.

**14.** $f(t) = 100e^{-0,1t}$; $[-5;\ 5]$.

*В задачах 15–20 упростите указанные выражения.*

**15.** $\left(4^{3x}\right)^{2y}$.

**16.** $10^{3x-1}10^{4-x}$.

**17.** $\dfrac{e^{x-3}}{e^{x-4}}$.

**18.** $\dfrac{e^x}{e^{1-x}}$.

**19.** $\left(2e^{1,2t}\right)^3$.

**20.** $\left(3e^{-1,4x}\right)^2$.

**Б** *В задачах 21–28 опишите, путем каких преобразований из графика функции $f$ можно получить график функции $g$ (см. раздел 1.2).*

**21.** $g(x) = -2^x$; $f(x) = 2^x$.

**22.** $g(x) = 2^{x-2}$; $f(x) = 2^x$.

**23.** $g(x) = 3^{x+1}$; $f(x) = 3^x$.

**24.** $g(x) = -3^x$; $f(x) = 3^x$.

**25.** $g(x) = e^x + 1$; $f(x) = e^x$.

**26.** $g(x) = e^x - 2$; $f(x) = e^x$.

**27.** $g(x) = 2e^{-(x+2)}$; $f(x) = e^{-x}$

**28.** $g(x) = 0{,}5e^{-(x-1)}$; $f(x) = e^{-x}$.

*Проверьте правильность своих ответов к задачам 21–28. Для этого постройте графики каждой пары функций в одном и том же окне используемой вами графической утилиты.*

**29.** График функции $f$ известен и приведен на рисунке ниже. Изобразите схематически графики следующих функций.

**а)** $y = f(x) - 1$.

**б)** $y = f(x + 2)$.

**в)** $y = 3f(x) - 2$.

**г)** $y = 2 - f(x - 3)$.

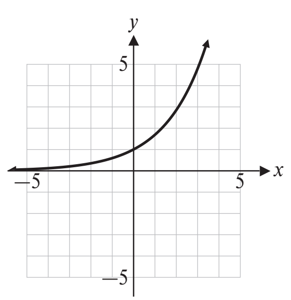



Рисунок к задачам 29 и 30

**30.** График функции $f$ известен и приведен на рисунке выше. Изобразите схематически графики следующих функций.

**а)** $y = f(x) + 2$. **б)** $y = f(x-3)$.
**в)** $y = 2f(x) - 4$. **г)** $y = 4 - f(x+2)$.

*В задачах 31–40 постройте графики данных функций в указанном интервале значений независимой переменной.*

**31.** $f(t) = 2^{t/10}$; $[-30;\ 30]$.

**32.** $G(t) = 3^{t/100}$; $[-200;\ 200]$.

**33.** $y = -3 + e^{1+x}$; $[-4;\ 2]$.

**34.** $y = 2 + e^{x-2}$; $[-1;\ 5]$.

**35.** $y = e^{|x|}$; $[-3;\ 3]$.

**36.** $y = e^{-|x|}$; $[-3;\ 3]$.

**37.** $C(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $[-5;\ 5]$.

**38.** $M(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}$; $[-5;\ 5]$.

**39.** $y = e^{-x^2}$; $[-3;\ 3]$.

**40.** $y = 2^{-x^2}$; $[-3;\ 3]$.

*** 41.** Найдите все действительные числа $a$, для которых справедливо равенство $a^2 = a^{-2}$. Объясните, почему приведенное равенство не противоречит второму свойству показательных функций.

*** 42.** Найдите все действительные числа $a$ и $b$ такие, что $a \neq b$, для которых справедливо равенство $a^4 = b^4$. Объясните, почему приведенное равенство не противоречит третьему свойству показательных функций.

*В задачах 43–48 решите указанные уравнения относительно $x$.*

**43.** $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$.

**44.** $5^{3x} = 5^{4x-2}$.

**45.** $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$.

**46.** $7^{x^2} = 7^{2x+3}$.

**47.** $5^3 = (x+2)^3$.

**48.** $(1-x)^5 = (2x-1)^5$.

**B** *В задачах 49–52 решите указанные уравнения относительно переменной $x$. (Помните: $e^x \neq 0$ и $e^{-x} \neq 0$ при любых значениях $x$.)*

**49.** $(x-3)e^x = 0$.

**50.** $2xe^{-x} = 0$.

**51.** $3xe^{-x} + x^2e^{-x} = 0$.

**52.** $x^2e^x - 5xe^x = 0$.

*В задачах 53–56 постройте графики указанных функций в заданном интервале значений независимой переменной.*

**53.** $h(x) = x\,(2^x)$; $[-5;\ 0]$.

**54.** $m(x) = x\,(3^{-x})$; $[0;\ 3]$.

**55.** $N = \dfrac{100}{1+e^{-t}}$; $[0;\ 5]$.

**56.** $N = \dfrac{200}{1+3e^{-t}}$; $[0;\ 5]$.

*В задачах 57–60 вычислите с точностью до двух десятичных знаков действительные нули указанных функций.*

**57.** $f(x) = 4^x - 7$.

**58.** $f(x) = 5 - 3^{-x}$.

**59.** $f(x) = 2 + 3x + 10^x$.

**60.** $f(x) = 7 - 2x^2 + 2^{-x}$.

# Применение математики

## Экономика и бизнес

**61.** *Финансы*. Предположим, что сумма размером 2500 долл. инвестирована под 7% годовых. При условии, что сложные проценты наращиваются ежеквартально, определите, какая сумма будет накоплена на счете счете через указанный строк.

**а)** $\frac{3}{4}$ года. **б)** 15 лет.

Ответ округлите до цента.

**62.** *Финансы*. Предположим, что сумма размером 4000 долл. инвестирована под 6% годовых. При условии, что сложные проценты наращиваются еженедельно, определите какая сумма будет накоплена на счете через указанный срок.

**а)** $\frac{1}{2}$ года. **б)** 10 лет.

Ответ округлите до цента.

**63.** *Начисление процентов*. На депозитный счет с годовой ставкой 8,35% внесена сумма размером 7500 долл. При условии, что сложные проценты начисляются непрерывно, определите, какая сумма будет накоплена на счете через указанный срок.

**а)** 5,5 лет. **б)** 12 лет.

**64.** *Начисление процентов*. На депозитный счет с годовой ставкой 7,45% внесена сумма размером 5250 долл. При условии, что сложные проценты насчитываются непрерывно, определите сумму на счете через:

**а)** 6,25 года; **б)** 17 лет.

**65.** *Финансы*. Для покупки нового автомобиля вкладчику за 5 лет нужно накопить на счете 15 000 долларов. Какую сумму ему следует положить на счет с непрерывно начисляемой годовой ставкой 6,75%, чтобы успеть в срок. Ответ укажите с точностью до доллара.

**66.** *Финансы*. У супружеской пары родился ребенок. Какую сумму родители должны положить в банк сейчас, чтобы через 17 лет иметь возможность потретить на образование ребенка 40 000 долл. На основную сумму ежедневно насчитываются сложные проценты с годовой ставкой 5,5%. Ответ укажите с точностью до доллара.

**67.** **www** *Начисление процентов*. Служба *BanxQuote* представляет собой сеть веб-сайтов, на которых в режиме реального времени отображаются предложения по предоставлению услуг крупнейшими игроками мирового финансового рынка. Ниже приведены размеры процентных ставок на годовые депозитные сертификаты некоторых американских банков. Информация взята из их официальных веб-сайтов.

**а)** Банк *Stonebridge*: сложная годовая ставка 6,93%, начисляемая ежемесячно.

**б)** Банк *DeepGreen*: сложная годовая ставка 6,96%, начисляемая ежедневно.

**в)** Банк *Provident*: сложная годовая ставка 6,80%, начисляемая непрерывно.

Определите, какая сумма будет накоплена на счете в каждом банке к концу первого года, если первоначальная сумма вклада составляет 10 000 долл.

**68.** **WWW** *Начисление процентов*. Прочтите условие задачи 67. Службой *BanxQuote* предоставлена следующая информация о размере процентных ставок, выплачиваемых различными банками по 30-месячных депозитных сертификатах.

**а)** Банк *Oriental Bank & Trust*: сложная годовая ставка 6,50%, начисляемая ежеквартально.

**б)** Банк BMW *Bank of North America*: сложная годовая ставка 6,36%, начисляемая ежемесячно.

**в)** Банк *BankFirst Corporation*: сложная годовая ставка 6,30%, начисляемая ежедневно.

Определите, какая сумма будет накоплена на счете в каждом банке через 2,5 года, если первоначальная сумма вклада составляет 10 000 долл.

**69.** *Текущая стоимость*. По истечении срока погашения, который составляет $5\frac{1}{2}$ года, по простому векселю выплате подлежит сумма размером 50 000 долл. Определите первоначальную стоимость векселя, при условии, что годовая процентная ставка по векселю равна 8%, а сложные проценты начисляются непрерывно.

**70.** *Текущая стоимость*. По истечению срока погашения, который составляет 10 лет, по простому векселю выплате подлежит сумма размером 30 000 долл. Определите первоначальную стоимость векселя, при условии что годовая процентная ставка по векселю равна 7%, а сложные проценты начисляются непрерывно.

**71.** *Реклама*. Чтобы ознакомить с новым продуктом максимальное количество потенциальных покупателей, производитель проводит телевизионную рекламную компанию, которая охватывает население некого города и его пригородов. Целевая телевизионная аудитория составляет два миллиона зрителей. Уравнение, описывающее зависимость количества людей $N$, которые узнали о новом продукте, от продолжительности (в днях) проведения рекламной кампании, $t$ имеет вид.

$$N = 2\left(1 - e^{-0,037t}\right)$$

Постройте график найденной функции на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 50$. Определите, к какому значению стремится $N$ при безграничном возрастании $t$?

**72.** *Кривая обучаемости*. Компания производит компьютеры. Сотрудники компании, занятые на производстве монтажных плат, проходят предварительное обучение на рабочем месте. Используя методы статистического анализа, была построена так называемая кривая обучаемости, которая характеризует процесс постепенного приобретения опыта среднестатистическим сотрудником компании. Зависимость имеет следующий вид:

$$N = 40\left(1 - e^{-0,12t}\right),$$

где $N$ — количество монтажных плат, которое сотрудник компании в состоянии произвести в течение дня после $t$ дней обучения. Постройте график функции на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 30$. Используя найденное уравнение, определите максимально возможное количество монтажных плат, которое в состоянии произвести среднестатистический сотрудник компании после 1 дня обучения?

**73.** *Заработная плата в спорте*. В табл. 2.13 приведена средняя заработная плата (в тысячах долларов) игроков Национальной хоккейной лиги (National Hockey League — NHL) и Национальной баскетбольной ассоциации (National Basketball Association — NBA) в указанные годы, начиная с 1990 г.

**а)** Обозначим через $x$ количество лет, прошедшее с 1990 года. Найдите коэффициенты показательного регрессионного уравнения вида $y = ab^x$, наиболее точно описывающее динамику роста средней заработной платы игроков *NHL*. Оцените среднюю заработную плату, игроков в 1998 и 2010 году. Ответ округлите до тысячи долларов.

**б)** Средняя заработная плата игроков *NHL* в 1998 году составила 1 167 000 долл. Как данная величина соотносится с величиной средней заработной платы, оцененной в п. *а*)? Какие изменения следует внести в прогноз средней заработной платы игроков *NHL* в 2010 году? Аргументируйте свой ответ.

**Таблица 2.13.** Средняя заработная плата, тыс. долл.

www

| Год | NHL | NBA |
|---|---|---|
| 1990 | 211 | 750 |
| 1991 | 271 | 900 |
| 1992 | 368 | 1100 |
| 1993 | 467 | 1300 |
| 1994 | 562 | 1700 |
| 1995 | 733 | 1900 |
| 1996 | 892 | 2000 |

**74.** Обратитесь к данным табл. 2.13.

**а)** Пусть $x$ — количество лет, прошедшее с 1990 года. Найдите коэффициенты показательного регрессионного уравнения вида $y = ab^x$, наиболее точно описывающей динамику увеличения средней заработной платы игроков *NBA*. Оцените средние заработные платы баскетболистов (с точностью до тысячи долларов) в 1997 и 2010 году.

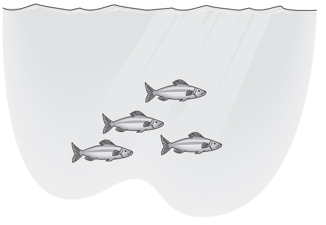
***б)** Средняя заработная плата игроков *NBA* в 1997 году составила 2 200 000 долл. Как данная величина соотносится с величиной, найденной в п. *а*? Какие изменения следует внести в прогноз относительно величины средней заработной платы игроков *NBA* в 2010 году? Аргументируйте свой ответ.

## Биологические науки

**75.** *Биология морей*. Жизнь в морях возможна благодаря микроскопическим растениям, которые обитают в так называемой световой зоне, или, другими словами, приповерхностном слое воды, в котором поглощается 99% интенсивности света, падающего на поверхность воды. Воды некоторых морей содержат большое количество осадка, и толщина световой зоны в них составляет всего лишь

15–20 футов. В некоторых темных гаванях поглощение света слоем воды толщиной $d$ футов приближенно можно описать уравнением вида:

$$I = I_0 e^{-0,23d}.$$



Определите, какой процент интенсивности падающего на поверхность воды света достигнет указанной глубины.

**а)** 10 футов. **б)** 20 футов.

**76.** *Биология морей*. Прочтите условие задачи 75. Считается, что вода в Саргассовом море, расположенном в Вест-Индии, одна из самых прозрачных в мире. Интенсивность света $I$ на глубине $d$ футов от поверхности в этом море приближенно можно оценить при помощи формулы:

$$I = I_0 e^{-0,00942d},$$

где $I_0$ — интенсивность света, падающего на поверхность воды. Определите, сколько процентов от интенсивности падающего на поверхность воды света, достигнет глубины:

**а)** 50 футов; **б)** 100 футов.

**77.** **WWW** *Эпидемия ВИЧ/СПИД*. В Объединенной программе Организации Объединенных Наций по борьбе с эпидемией ВИЧ/СПИД утверждается, что к 1999 году вирусом иммунодефицита человека (Human Immunodeficiency Virus — HIV) во всем мире будет инфицировано 47,3 миллиона человек. Согласно проведенным исследованиям в ближайшие годы заболевание будет продолжать непрерывно распространяться на 11,6% в год. В качестве начальной точки отсчета выберем 1998 год. (Предполагается, что темпы распространения заболевания в ближайшей перспективе не изменятся.)

**а)** Составьте уравнение, описывающее рост численности ВИЧ-инфицированных по сравнению с 1998 годом.

**б)** Используя найденное уравнение, оцените (с точностью до ближайшей тысячи) количество людей, которое будет инфицировано к концу 2005 года или к концу 2010 года.

**в)** Изобразите схематически график найденного уравнения на временном отрезке с 1998 по 2010 год.

**78.** **WWW** *Эпидемия ВИЧ/СПИД*. В Объединенной программе Организации Объединенных Наций по борьбе с эпидемией ВИЧ/СПИД утверждается, что к 1999 году количество умерших от синдрома приобретенного иммунодефицита (Acquired Immune Deficiency Syndrome — AIDS) во всем мире составит 13,9 миллионов человек. Согласно сделанным прогнозам, смертность, вызванная заболеванием, в ближайшие годы будет непрерывно расти на 16,5% в год. В качестве точки начала отсчета выберем 1998 год. (Предполагается, что уровень смертности в ближайшей перспективе не изменится.)

**а)** Составьте уравнение, которое описывает уровень смертности в мире, вызванной синдромом приобретенного иммунодефицита, начиная с 1998 года.

**б)** Используя найденное уравнение, определите, сколько всего человек в мире умрет от заболевания к концу 2005 года или к концу 2010 года? (Ответ укажите с точностью до ста тысяч человек.)

**в)** Изобразите график найденного уравнения на временном отрезке с 1998 по 2010 год.

## Социальные науки

**79.** *Рост численности начеления.* С момента возникновения человечества и до 1830 года численность населения планеты впервые достигла миллиарда человек. Население Земли увеличилось до двух миллиардов всего лишь за 100 лет (к 1930 году). За следующие 60 лет (к 1990 году) население планеты увеличилось еще на 3 миллиарда. В 1995 году численность населения земного шара оценивалось в 5,7 миллиарда человек. Согласно прогнозам Международного банка (World Bank), которые были сделаны в 1994 году, до 2030 года ежегодный непрерывный прирост населения планеты будет составлять 1,14%.

**а)** Постройте модель, описывающую динамику роста численности населения планеты, приняв в качестве начальной точки отсчета 1995 год.

**б)** Исходя из полученной модели, спрогнозируйте численность населения планеты (с точностью до ста миллионов) в 2010 году и в 2030 году.

**в)** Изобразите график уравнения, найденного в п. *а*, на временном отрезке с 1995 по 2030 год.

**80.** *Рост численности населения в Эфиопии.* В 1995 году население Эфиопии оценивалось в 88 миллионов человек. По прогнозам банка *World Bank*, сделанным в 1994 году, до 2030 года ежегодно численность населения этой страны будет непрерывно возрастать на 1,67%.

**а)** Постройте модель, описывающую динамику роста численности населения Эфиопии, приняв в качестве начальной точки отсчета 1995 год.

**б)** Исходя из полученной модели, спрогнозируйте численность населения страны (с точностью до миллиона) в 2010 году. В 2030 году.

**в)** Изобразите схематически график уравнения, найденного в п. *а* на временном отрезке начиная с 1995 по 2030 год.

**81.** *Рост количества пользователей Интернета.* С 1994 по 2000 год количество хостов в Интернете стремительно увеличилось (см. табл. 2.14).

**а)** Обозначим через $x$ количество лет, которое прошло с 1994 года. Найдите коэффициенты показательного регрессионного уравнения вида $y = ab^x$, наиболее точно описывающего табличные данные. С помощью найденного уравнения оцените количество хостов, которое ожидается в Интернет к 2010 году. (Ответ округлите до миллиона.)

**Таблица 2.14.** Количество хостов в Интернете

www

| Год | Количество хостов, млн. |
|---|---|
| 1994 | 2,4 |
| 1995 | 4,9 |
| 1996 | 9,5 |
| 1997 | 16,1 |
| 1998 | 29,7 |
| 1999 | 43,2 |
| 2000 | 72,4 |

*Источник данных*: организация *Internet Software Consortium*.

**б)** Объясните, какие выводы следуют из найденной модели, при условии, что количество хостов будет расти с той же скоростью.

**82.** *Ожидаемая продолжительность жизни*. В табл. 2.15 приведены значения ожидаемой продолжительности жизни (в годах) жителей Соединенных Штатов Америки, родившихся с 1970 по 1997 год. Обозначим через $x$ количество лет, которое прошло с 1970 года. Найдите показательное регрессионное уравнение, наиболее точно описывающее табличные данные. С помощью найденного уравнения оцените среднюю ожидаемую продолжительность жизни человека, который родится в 2010 году.

**Таблица 2.15.** Средняя ожидаемая продолжительность жизни

www

| Год рождения | Продолжительность жизни, лет |
|---|---|
| 1970 | 70,8 |
| 1975 | 72,6 |
| 1980 | 73,7 |
| 1985 | 74,7 |
| 1990 | 75,4 |
| 1995 | 75,9 |
| 1997 | 76,5 |

## 2.3. Логарифмическая функция

- Обратная функция
- Логарифмическая функция
- Свойства логарифмических функций
- Вычисление логарифмов при помощи калькулятора
- Решение практических задач

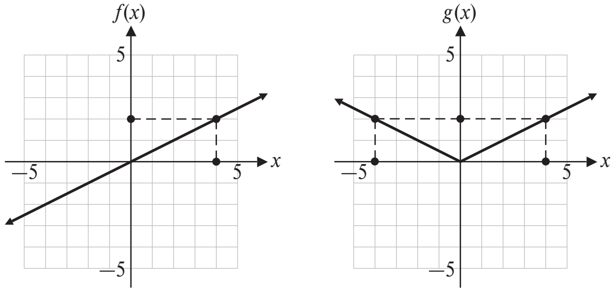
Найдите на панели калькулятора клавиши $\boxed{10^x}$ и $\boxed{e^x}$, соответствующие одноименным показательным функциям. Рядом с ними расположены клавиши $\boxed{\text{LOG}}$ и $\boxed{\text{LN}}$, которыми обозначены одноименные *логарифмические функции* (logarithmic functions). Логарифмические и показательные функции, которые соответствуют расположенным по соседству клавишам, тесно связаны между собой. Действительно, показательная и соответствующая ей логарифмическая функция, являются *обратными* по отношению друг к другу. Понятие обратной функции (inverse function) детально рассматривается в этом разделе. Оно будет использовано при определении логарифмической функции как обратной по отношению к показательной. Вслед за определением будут рассмотрены основные свойства логарифмических функций. Далее вы познакомитесь с примерами вычисления значений логарифмических функций при заданном значении $x$ с помощью калькулятора. В конце раздела приведены примеры решения практических задач, которое сводится к вычислению логарифмических выражений.

Логарифмические функции играют важную роль. В частности, логарифмическими функциями описывают различные процессы. Решения многих прикладных задач сводятся к вычислению логарифмических выражений. Например, шкала, которой пользуются при измерении интенсивности звука (в децибелах), задается в логарифмических единицах измерения. Сила землетрясений измеряется по шкале Рихтера, которая также является логарифмической. В финансах часто возникает задача нахождения периодов времени, по истечении которого удваивается сумма инвестиций, на которую непрерывно или заданное количество раз в год начисляются сложные проценты. Искомая величина задается показательным уравнением, решением которого будет логарифмическое выражение.

### Обратная функция

Рассмотрим графики функций $f(x) = \frac{x}{2}$ и $g(x) = \frac{|x|}{2}$. Они изображены на рис. 2.21.

Поскольку $f$ и $g$ — функции, то любому элементу из области определения каждой функции соответствует единственное число из области значений соответствующей функции. А для какой из этих функций справедливо обратное утверждение: каждому значению функции соответствует единственный элемент из области




а) $f(x) = \frac{x}{2}$ б) $g(x) = \frac{|x|}{2}$

**Рис. 2.21.** Обратные функции

определения? Такое утверждение справедливо лишь для функции $f$. Так, значению функции $f$, равному 2, соответствует единственный элемент — число $-4$. Значению функции $g$, равному 2, соответствуют два числа: $-4$ и 4. Функцию $f$ называют *однозначной* (one-to-one). В общем случае можно дать следующее определение однозначной функции.

> ***Однозначная функция***
> Функция $f$ называется **однозначной**, если каждому ее значению соответствует единственное значение независимой переменной.

Можно показать, что любая непрерывная функция, которая монотонно возрастает или убывает на всей области ее существования, является однозначной. Если непрерывная функция ведет себя немонотонно, например, возрастает в каком-либо одном интервале значений независимой переменной и убывает в остальных интервалах, то такая функция не может быть однозначной. Примеры графиков таких функций приведены на рис. 2.17.

**Задание 2.7.**
Постройте графики функций $f(x) = 2^x$ и $g(x) = x^2$. Для каждой функции определите, при каких значениях независимой переменной значение функции равно 4? Какая из этих функций является однозначной? Объясните, почему. ■

Используя понятие однозначной функции $f$, можно определить новую функцию, *обратную* функции $f$.

> ***Обратная функция***
> Если $f$ — однозначная функция, то функция, обратная функции $f$, образуется путем перестановки независимых и зависимых переменных функции $f$. Иначе говоря, если точка $(a,\ b)$ принадлежит графику функции $f$, точка $(b,\ a)$ принадлежит графику функции, обратной $f$.
> (*Примечание*. Если функция $f$ не является однозначной, то она **не имеет обратной функции**.)

В любой библиотеке элементарных функций существует целый ряд важных функций, которые являются обратными к другим базовым функциям, входящим в эту же библиотеку. В данной книге в качестве примера рассматривается *логарифмическая функция*, которая является обратной по отношению к показательной.

## Логарифмическая функция

Пусть дана показательная функция $f$, заданная уравнением:

$$y = 2^x. \tag{2.2}$$

После перестановки независимой и зависимой переменной получим функцию, обратную по отношению к функции $f$.

$$x = 2^y. \tag{2.3}$$

Полученная таким образом обратная функция называется логарифмической функцией по основанию 2 и записывается следующим образом.

$$y = \log_2 x \text{ тогда и только тогда, когда } x = 2^y.$$

Поскольку эти две записи эквивалентны, то, чтобы построить график функции $y = \log_2 x$, достаточно построить график функции $x = 2^y$. Любая упорядоченная пара чисел, принадлежащая графику показательной функции, принадлежит и графику логарифмической функции. Для этого достаточно всего лишь переставить числа, составляющие упорядоченную пару. Например, если точка с координатами $(3,\ 8)$ удовлетворяет уравнению (2.2), точка с координатами $(8,\ 3)$ удовлетворяет уравнению (2.3). Графики функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ изображены на рис. 2.22. Обратите внимание на то, что, если сложить чертеж вдоль прямой линии $y = x$, которая обозначена на рис. 2.22 пунктиром, то графики функций совпадут. Для графиков этих функций прямая $y = x$ является линией симметрии.

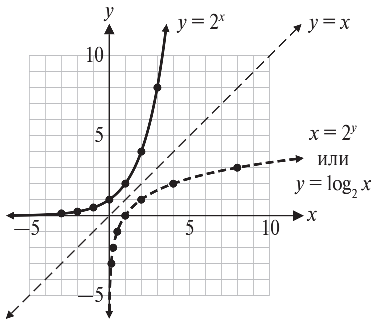



**Рис. 2.22.** Графики показательной и логарифмической функций

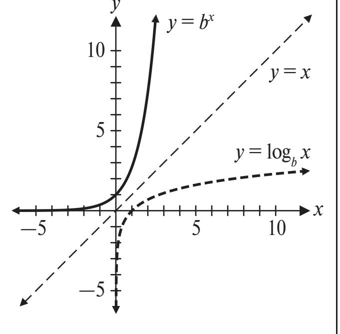
| Показательная функция | | Логарифмическая функция | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y = 2^x$ | $x = 2^y$ | $y$ |
| $-3$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $-3$ |
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $-2$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| $0$ | $1$ | $1$ | $0$ |
| $1$ | $2$ | $2$ | $1$ |
| $2$ | $4$ | $4$ | $2$ |
| $3$ | $8$ | $8$ | $3$ |

[ Упорядоченные пары значений полностью обратимы ]

Вообще говоря, поскольку график показательной функции вида $f(x) = b^x$ при $b \neq 1$, $b > 0$ монотонно возрастает либо монотонно убывает (в зависимости от значения основания) на всей области определения функции (см. раздел 2.2), значит, показательная функция имеет обратную.

***Логарифмическая функция***

Функция, обратная показательной, называется **логарифмической**. Если $b > 0$ и $b \neq 1$, то логарифмическая форма записи $y = \log_b x$ эквивалентна показательной форме записи $x = b^y$. **Логарифмом числа** $x$ по основанию $b$ называется показатель степени, в которую следует возвести число $b$, чтобы получить число $x$. (*Помните*: логарифм — это показатель степени.) **Область определения** логарифмической функции — множество всех положительных действительных чисел, которые являются **областью значений** соответствующей показательной функции; **область значений** логарифмической функции — множество всех действительных чисел, которые являются **областью определения** соответствующей показательной функции. Типичный график показательной функции, а также график обратной по отношению к ней логарифмической функции изображены на рисунке.




В приведенных ниже примерах преобразуйте исходные логарифмические выражения в эквивалентные показательные выражения, или наоборот.

**Пример 2.13 (Преобразование логарифмических выражений в эквивалентные показательные выражения).** Преобразуйте данные логарифмические выражения в эквивалентные показательные выражения:

**1.** $\log_5 25 = 2.$ **2.** $\log_9 3 = \dfrac{1}{2}.$ **3.** $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2.$

***Решение.***

**1.** Выражение $\log_5 25 = 2$ эквивалентно выражению $25 = 5^2$.

**2.** Выражение $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ эквивалентно выражению $3 = 9^{1/2}$.

**3.** Выражение $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$ эквивалентно выражению $\frac{1}{4} = 2^{-2}$. ■

**Упражнение 2.13.**
Преобразуйте указанные логарифмические выражения в эквивалентные показательные выражения:

**1.** $\log_3 9 = 2.$ **2.** $\log_4 2 = \dfrac{1}{2}$ **3.** $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right) = -2.$ ■

**Пример 2.14 (Преобразование показательных выражений в логарифмические выражения).** Преобразуйте данные показательные выражения в эквивалентные логарифмические выражения:

**1.** $64 = 4^3.$ **2.** $6 = \sqrt{36}.$ **3.** $\dfrac{1}{8} = 2^{-3}.$

***Решение.***

**1.** Выражение $64 = 4^3$ эквивалентно выражению $\log_4 64 = 3$.

**2.** Выражение $6 = \sqrt{36}$ эквивалентно выражению $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$.

**3.** Выражение $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ эквивалентно выражению $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$. ■

**Упражнение 2.14.**
Преобразуйте показательные выражения в эквивалентные логарифмические выражения.

**1.** $49 = 7^2.$ **2.** $3 = \sqrt{9}.$ **3.** $\dfrac{1}{3} = 3^{-1}.$ ■

Ниже приведено несколько примеров, решив которые, вы получите более полное представление о логарифмической функции, а также более наглядно представите ее взаимосвязь с показательной функцией. В каждом примере дано логарифмическое выражение типа $y = \log_b x$. Необходимо найти одну из величин: $x$, $b$ или $y$. Значение двух остальных величин известно. Значения подобраны так, что задача имеет точное решение, определяемое без использования калькулятора.

**Пример 2.15 (Решения логарифмического уравнения $y = \log_b x$).** Найдите значения одной из величин: $y$, $b$ или $x$.

**1.** Вычислите значение $y$: $y = \log_4 16$.

2. Найдите значение $x$: $\log_2 x = -3$.
3. Определите значение $y$: $y = \log_8 4$.
4. Вычислите значение $b$: $\log_b 100 = 2$.

***Решение.***

1. Логарифмическое уравнение $y = \log_4 16$ эквивалентно показательному уравнению $16 = 4^y$. Отсюда находим, что
$$y = 2.$$
2. Логарифмическое уравнение $\log_2 x = -3$ эквивалентно показательному уравнению $x = 2^{-3}$. Отсюда находим, что
$$x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$
3. Логарифмическое уравнение $y = \log_8 4$ эквивалентно показательному уравнению
$$4 = 8^y \quad \text{или} \quad 2^2 = 2^{3y}.$$
Отсюда находим, что
$$3y = 2,$$
$$y = \frac{2}{3}.$$
4. Логарифмическое уравнение $\log_b 100 = 2$ эквивалентно показательному уравнению $100 = b^2$. Отсюда находим, что
$$b = 10.$$
Основание логарифма не может быть отрицательным ■

**Упражнение 2.15.**

Найдите значение одной из величин: $y$, $b$ или $x$.

1. Вычислите значение $y$: $y = \log_9 27$.
2. Найдите значение $x$: $\log_3 x = -1$.
3. Определите значение $b$: $\log_b 1000 = 3$. ■

## Свойства логарифмических функций

Логарифмические функции обладают многими примечательными и необычайно полезными свойствами. Опишем восемь основных свойств логарифмических функций в виде теоремы 2.2.

**Теорема 2.2 (Свойства логарифмических функций).** Пусть $b$, $M$ и $N$ — положительные действительные числа, причем $b \neq 1$, а $p$ и $x$ — действительные числа. Тогда справедливы следующие соотношения.

**1.** $\log_b 1 = 0$.

**2.** $\log_b b = 1$.

**3.** $\log_b b^x = x$.

**4.** $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$.

**5.** $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$.

**6.** $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$.

**7.** $\log_b M^p = p \log_b M$.

**8.** $\log_b M = \log_b N$ тогда и только тогда, когда $M = N$. ■

Из приведенных в виде теоремы 2.2 свойств логарифмических функций первые четыре следуют непосредственно из определения логарифмической функции. Упрощенное доказательство свойства 5 приведено ниже. Остальные свойства доказываются аналогичным образом. Итак, пусть

$$u = \log_b M \quad \text{и} \quad v = \log_b N.$$

Преобразуем эти логарифмические выражения в эквивалентные им показательные выражения.

$$M = b^u \quad \text{и} \quad N = b^v.$$

Теперь посмотрите на последовательность приведенных ниже преобразований и убедитесь, что вам понятен каждый логический переход.

$$\log_b MN = \log_b b^u b^v = \log_b b^{u+v} = u + v = \log_b M + \log_b N.$$

**Пример 2.16 (Применение свойств логарифмических функций).**

**1.** $\log_b \dfrac{wx}{yz} = \log_b wx - \log_b yz = \log_b w + \log_b x - (\log_b y + \log_b z) =$

$= \log_b w + \log_b x - \log_b y - \log_b z$.

**2.** $\log_b (wx)^{3/5} = \frac{3}{5} \log_b wx = \frac{3}{5}(\log_b w + \log_b x)$. ■

**Упражнение 2.16.**
Упростите данные логарифмические выражения аналогично примеру 2.16.

**1.** $\log_b \dfrac{R}{ST}$.

**2.** $\log_b \left(\dfrac{R}{S}\right)^{2/3}$. ■

Приведенные ниже примеры и упражнения выглядят несколько надуманно. Тем не менее они помогут вам более глубоко изучить основные свойства логарифмических функций.

**Пример 2.17 (Решение логарифмических уравнений).** Найдите значения $x$, для которых справедливо равенство:

$$\frac{3}{2}\log_b 4 - \frac{2}{3}\log_b 8 + \log_b 2 = \log_b x.$$

***Решение.***

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\log_b 4 - \frac{2}{3}\log_b 8 + \log_b 2 &= \log_b x, \\
\log_b 4^{3/2} - \log_b 8^{2/3} + \log_b 2 &= \log_b x, && \text{Свойство 7} \\
\log_b 8 - \log_b 4 + \log_b 2 &= \log_b x, \\
\log_b \frac{8 \cdot 2}{4} &= \log_b x, && \text{Свойства 5 и 6} \\
\log_b 4 &= \log_b x, \\
x &= 4. && \text{Свойство 8}
\end{aligned}$$

■

**Упражнение 2.17.**
Найдите значения $x$, для которых справедливо равенство:

$$3\log_b 2 + \frac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20 = \log_b x.$$

■

**Пример 2.18 (Решение логарифмических уравнений).** Решите уравнение

$$\log_{10} x + \log_{10}(x+1) = \log_{10} 6.$$

***Решение.***

$$\begin{aligned}
\log_{10} x + \log_{10}(x+1) &= \log_{10} 6, \\
\log_{10}[x(x+1)] &= \log_{10} 6, && \text{Свойство 5} \\
x(x+1) &= 6, && \text{Свойство 8} \\
x^2 + x - 6 &= 0, && \text{Разложим на множители} \\
(x+3)(x-2) &= 0, \\
x = -3 \quad \text{и} \quad x &= 2.
\end{aligned}$$

Значение $x$, равное $-3$, следует исключить, поскольку функция $\log_{10}(x+1)$ существует, только если $x > -1$, т.е. на интервале $(-1,\ \infty)$. Следовательно, значение $x = 2$ является единственным решением уравнения. ■

**Упражнение 2.18.**
Решите уравнение
$$\log_3 x + \log_3(x - 3) = \log_3 10.$$
■

**Задание 2.8.**
Ниже приведено несколько пар логарифмических выражений. Объясните, как связаны между собой выражения каждой пары. Если выражения, составляющие пару, эквивалентны, докажите, что это так. Если нет — приведите примеры эквивалентных выражений.

**1.** $\log_b M - \log_b N$; $\dfrac{\log_b M}{\log_b N}$.

**2.** $\log_b M - \log_b N$; $\log_b \dfrac{M}{N}$.

**3.** $\log_b M + \log_b N$; $\log_b MN$.

**4.** $\log_b M + \log_b N$; $\log_b(M + N)$. ■

## Вычисление логарифмов при помощи калькулятора

Из всех возможных значений наиболее часто приходится работать с логарифмами, имеющими основание $e$ или 10. Прежде чем приступить к решению прикладных задач, следует научиться находить приближенное значение логарифма любого положительного числа по основанию 10 или $e$. Важное значение имеет и обратная задача — определение числа по известному значению его логарифма с основанием 10 или $e$. В недалеком прошлом значения логарифмов находили при помощи специальных таблиц. В настоящее время для выполнения этой задачи используют калькуляторы. Вычисление значений логарифмов при помощи калькулятора намного быстрее и точнее, чем нахождение значения того же логарифма в специальных таблицах.

**Десятичным логарифмом** (или **логарифмом Бриггса**) называется логарифм числа по основанию 10. **Натуральным логарифмом** (или **логарифмом Непера**) называется логарифм числа по основанию $e$. Большинство моделей калькуляторов имеет клавиши, обозначенные символами 'log' (или 'LOG') и 'ln' (или 'LN'). Первый набор символов обозначает десятичный логарифм (логарифм по основанию 10), а второй — натуральный логарифм (логарифм по основанию $e$). Фактически оба символа, 'log' и 'ln', широко используются в математической литературе. Всякий раз, когда в книге встречается логарифм, основание которого не указано, такую запись следует интерпретировать следующим образом.

| | |
|---|---|
| ***Обозначения логарифмов*** | |
| **Десятичный логарифм:** | $\lg x = \log_{10} x$. |
| **Натуральный логарифм:** | $\ln x = \log_e x$. |

Вычисление значения логарифма при помощи калькулятора — задача достаточно простая. На некоторых моделях калькуляторов для этого достаточно ввести число, принадлежащее области определения логарифмической функции, и нажать клавишу $\boxed{\text{LOG}}$ или $\boxed{\text{LN}}$. При использовании других моделей калькуляторов последовательность действий выглядит несколько иначе: сначала нужно нажать клавишу $\boxed{\text{LOG}}$ или $\boxed{\text{LN}}$, затем ввести число, принадлежащее области определения логарифмической функции, а затем нажать клавишу $\boxed{\text{ENTER}}$. Чтобы узнать, какой способ вычисления значений логарифмов реализован на вашем калькуляторе, обратитесь к руководству пользователя, которое прилагается к калькулятору.

**Пример 2.19 (Вычислите значения логарифмов при помощи калькулятора).** Используя калькулятор, вычислите значение указанных логарифмов с точностью до шести десятичных знаков:

**1.** $\lg 3184$. **2.** $\ln 0{,}000349$. **3.** $\lg(-3{,}24)$.

***Решение.***

**1.** $\lg 3184 = 3{,}502973$. **2.** $\ln 0{,}000349 = -7{,}960439$.

**3.** $\lg(-3{,}24) = \text{Error}$[3] Число $-3{,}24$ не принадлежит области определения логарифмической функции ■

**Упражнение 2.19.**
При помощи калькулятора вычислите значение данных логарифмов с точностью до шести десятичных знаков.

**1.** $\lg 0{,}013529$. **2.** $\ln 28{,}69328$. **3.** $\ln(-0{,}438)$. ■

Теперь мы рассмотрим вторую из упомянутых выше задач: задачу определения числа по известному значению его логарифма. При решении подобного рода задач широко используется взаимосвязь, существующая между логарифмическими и показательными функциями. Эта взаимосвязь следует непосредственно из определения логарифмической функции, которое было приведено в начале раздела.

| ***Взаимосвязь между логарифмическими и показательными функциями*** | | |
|---|---|---|
| Функция $\lg x = y$ | соответствует функции | $x = 10^y$. |
| Функция $\ln x = y$ | соответствует функции | $x = e^y$. |

**Пример 2.20 (Поиск числа $x$ по известному значению его логарифма $\log_b x = y$).** Найдите значение $x$ с точностью до четырех десятичных знаков при условии, что известны значения следующих логарифмов.

---

[3]В некоторые калькуляторы заложено более сложное определение логарифмической функции, значениями которой могут быть комплексные числа. При вычислении значения логарифма отрицательного числа, например $\lg(-3{,}24)$, ответ на экране такого калькулятора будет представлен в виде упорядоченной пары действительных чисел. Такой результат является признаком того, что число, логарифм которого вычисляется, не принадлежит области существования традиционной логарифмической функции, определение которой дано в книге.

**1.** $\lg x = -2{,}315$. **2.** $\ln x = 2{,}386$.

***Решение.***

**1.** $\lg x = -2{,}315$ Преобразуем логарифмическое выражение в эквивалентное показательное выражение.

$x = 10^{-2{,}315}$ Воспользуемся калькулятором.

$= 0{,}0048$.

**2.** $\ln x = 2{,}386$ Преобразуем логарифмическое выражение в эквивалентное показательное выражение.

$x = e^{2{,}386}$ Воспользуемся калькулятором.

$= 10{,}8699$. ■

**Упражнение 2.20.**
Найдите значение $x$ с точностью до четырех десятичных знаков при условии, что известны значения следующих логарифмов.

**1.** $\ln x = -5{,}062$. **2.** $\lg x = 2{,}0821$. ■

**Пример 2.21 (Решение показательных уравнений).** Найдите значение $x$ с точностью до четырех десятичных знаков.

**1.** $10^x = 2$. **2.** $e^x = 3$. **3.** $3^x = 4$.

***Решение.***

**1.** $10^x = 2$ Вычислим десятичный логарифм обеих частей уравнения.

$\lg 10^x = \lg 2$ Воспользуемся свойством 3.

$x = \lg 2$ Воспользуемся калькулятором.

$= 0{,}3010$.

**2.** $e^x = 3$ Вычислим натуральный логарифм обеих частей уравнения.

$\ln e^x = \ln 3$ Воспользуемся свойством 3.

$x = \ln 3$ Воспользуемся калькулятором.

$= 1{,}0986$.

**3.** $3^x = 4$ Вычислим натуральный либо десятичный логарифм обеих частей уравнения (например, десятичный логарифм).

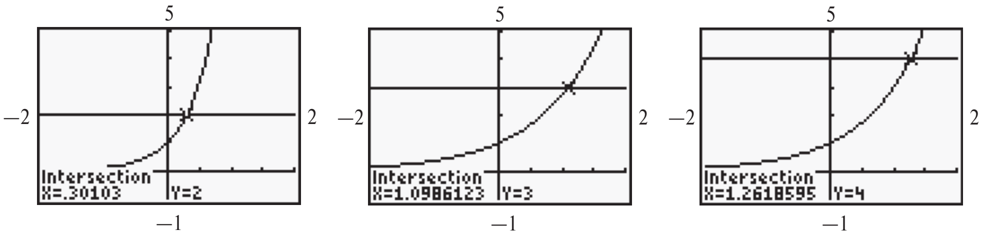
$\lg 3^x = \lg 4$ Воспользуемся свойством 7.

$x \lg 3 = \lg 4$ Решим уравнение относительно переменной $x$.

$x = \dfrac{\lg 4}{\lg 3} =$ Воспользуемся калькулятором.

$= 1{,}2619$. ■

Существует также и графический способ решения показательных уравнений. Чтобы решить такое уравнение, нужно построить графики обеих частей показательного уравнения и найти точки их пересечения. Графический способ решения уравнений из примера 2.21 проиллюстрирован на рис. 2.23.




а) $y_1 = 10^x$, $y_2 = 2$ б) $y_1 = e^x$, $y_2 = 3$ в) $y_1 = 3^x$, $y_2 = 4$

**Рис. 2.23.** Графический способ решения показательных уравнений

**Упражнение 2.21.**
Найдите значение $x$ с точностью до четырех десятичных знаков:

**1.** $10^x = 7$. **2.** $e^x = 6$. **3.** $4^x = 5$. ■

**Задание 2.9.**
Объясните, как с помощью калькулятора, на панели которого имеется клавиша, обозначающая натуральный либо десятичный логарифм, найти значение логарифмического выражения $y = \log_5 38{,}25$. [*Указание*. Сначала преобразуйте логарифмическое выражение в эквивалентное показательное выражение.] ■

## Решение практических задач

Привлекательность разного рода инвестиций весьма удобно оценивать по их **времени удвоения**, т.е. периода времени, по истечении которого основная сумма удваивается. Решая пример 2.22, вы убедитесь, что в задачах на определение времени удвоения вложенных средств логарифмические функции находят чрезвычайно широкое применение.

**Пример 2.22 (Время удвоения капитала).** Через какой период времени капиталовложения удвоятся, если на их сумму ежегодно начисляются сложные проценты со ставкой 20%? Ответ округлите до следующего полного года.

***Решение.*** Воспользуемся формулой начисления сложных процентов, которая обсуждалась в разделе 2.2:

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \qquad \text{Формула начисления сложных процентов}$$

Очевидно, что задача состоит в нахождении значения величины $t$ при заданных значениях остальных величин: $r = 0{,}20$, $m = 1$ и $A = 2P$. Следовательно, задача сводится к решению показательного уравнения.

| | |
|---|---|
| $2P = P(1 + 0{,}2)^t,$ | |
| $2 = 1{,}2^t,$ | Решим уравнение относительно $t$. |
| $1{,}2^t = 2,$ | Для этого следует вычислить натуральный или десятичный логарифм обеих частей уравнения. |
| $\ln 1{,}2^t = \ln 2,$ | Вычислили натуральный логарифм. |
| $t \ln 1{,}2 = \ln 2,$ | Воспользуемся свойством 7. |
| $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}2} =$ | Воспользуемся калькулятором. |
| $= 3{,}8$ года | [Примечание: $(\ln 2)/(\ln 1{,}2) \neq \ln 2 - \ln 1{,}2$.] |
| $\approx 4$ года. | Ответ округляем до следующего полного года. |

Таким образом, если проценты выплачиваются в конце 3-го года, то к этому времени сумма капиталовложеений еще не успеет вырасти в два раза; если же проценты выплачиваются в конце 4-го года, то сумма, накопленная сумма, будет превосходить основную сумму чуть больше чем в два раза. ■

Уравнение из примера 2.22 можно решить графическим способом. Для этого следует построить графики обеих частей уравнения $2 = 1{,}2^t$ и найти точку их пересечения (рис. 2.24).

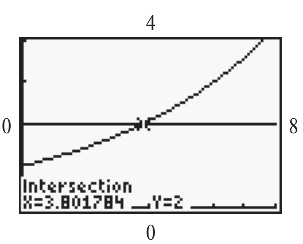



**Рис. 2.24.** Определение точки пересечения графиков правой, $y_1 = 1{,}2^x$, и левой, $y_2 = 2$, частей уравнения

**Упражнение 2.22.**
Через какой интервал времени основная сумма будет удвоена, если на нее ежегодно начисляются сложные проценты с годовой процентной ставкой 13%? Ответ округлите до следующего полного года. ■

Любопытно, а с практической точки зрения и поучительно, будет построить график зависимости времени удвоения суммы вложенных средств от величины ежегодно начисляемых сложных процентов. Выполним следующие преобразования.

$$\begin{aligned}
A &= P(1+r)^t,\\
2P &= P(1+r)^t,\\
2 &= (1+r)^t,\\
(1+r)^t &= 2,\\
\ln(1+r)^t &= \ln 2,\\
t\ln(1+r) &= \ln 2,\\
t &= \frac{\ln 2}{\ln(1+r)}.
\end{aligned}$$

График последнего уравнения приведен на рис. 2.25. Время удвоения, отложенное по оси ординат, измеряется в годах. Годовая процентная ставка, отложенная по оси абсцисс, меняется в диапазоне от 1 до 70% и на рисунке представлена в виде десятичного числа. Сложные проценты начисляются ежегодно. Обратите внимание на то, что время удвоения уменьшается чрезвычайно быстро при изменении величины процентной ставки от 1 до 20% (или от 0,01 до 0,20 при выражении десятичным числом).

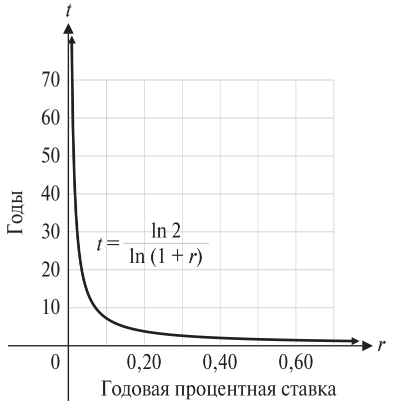



**Рис. 2.25.** График зависимости времени удвоения вложенных средств от величины процентной ставки

## Ответы к упражнениям

**2.13. 1)** $9 = 3^2$. **2)** $2 = 4^{1/2}$. **3)** $\dfrac{1}{9} = 3^{-2}$.

**2.14. 1)** $\log_7 49 = 2$. **2)** $\log_9 3 = \dfrac{1}{2}$. **3)** $\log_3\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1$.

**2.15.** **1)** $y = \frac{3}{2}$. **2)** $x = \frac{1}{3}$. **3)** $b = 10$.

**2.16.** **1)** $\log_b R - \log_b S - \log_b T$. **2)** $\frac{2}{3}(\log_b R - \log_b S)$.

**2.17.** $x = 2$.

**2.18.** $x = 5$.

**2.19.** **1)** $-1{,}868734$. **2)** 3,356663. **3)** Значение не определено.

**2.20.** **1)** 0,0063. **2)** 120,8092.

**2.21.** **1)** 0,8451. **2)** 1,7918. **3)** 1,1610.

**2.22.** 9 лет.

## Практикум 2.3

**А** *В задачах 1–6 преобразуйте указанные логарифмические выражения в эквивалентные показательные выражения.*

**1.** $\log_3 27 = 3$. **2.** $\log_2 32 = 5$.

**3.** $\log_{10} 1 = 0$. **4.** $\log_e 1 = 0$.

**5.** $\log_4 8 = \frac{3}{2}$. **6.** $\log_9 27 = \frac{3}{2}$.

*В задачах 7–12 преобразуйте указанные показательные выражения в эквивалентные логарифмические выражения.*

**7.** $49 = 7^2$. **8.** $36 = 6^2$.

**9.** $8 = 4^{3/2}$. **10.** $9 = 27^{2/3}$.

**11.** $A = b^u$. **12.** $M = b^x$.

*В задачах 13–24, не пользуясь калькулятором, вычислите значения указанных выражений.*

**13.** $\log_{10} 1$. **14.** $\log_e 1$.

**15.** $\log_e e$. **16.** $\log_{10} 10$.

**17.** $\log_{0,2} 0{,}2$. **18.** $\log_{13} 13$.

**19.** $\log_{10} 10^3$. **20.** $\log_{10} 10^{-5}$.

**21.** $\log_2 2^{-3}$. **22.** $\log_3 3^5$.

**23.** $\log_{10} 1000$. **24.** $\log_6 36$.

*В задачах 25–30 упростите указанные логарифмические выражения, используя свойства логарифмических функций (см. пример 2.16).*

**25.** $\log_b \frac{P}{Q}$. **26.** $\log_b FG$.

**27.** $\log_b L^5$. **28.** $\log_b w^{15}$.

**29.** $\log_b \frac{p}{qrs}$. **30.** $\log_b PQR$.

**Б** *В задачах 31–42, не пользуясь калькулятором, найдите значения $x$, $y$ или $b$.*

**31.** $\log_3 x = 2$.

**32.** $\log_2 x = 2$.

**33.** $\log_7 49 = y$.

**34.** $\log_3 27 = y$.

**35.** $\log_b 10^{-4} = -4$.

**36.** $\log_b e^{-2} = -2$.

**37.** $\log_4 x = \dfrac{1}{2}$.

**38.** $\log_{25} x = \dfrac{1}{2}$.

**39.** $\log_{1/3} 9 = y$.

**40.** $\log_{49} \left(\dfrac{1}{7}\right) = y$.

**41.** $\log_b 1000 = \dfrac{3}{2}$.

**42.** $\log_b 4 = \dfrac{2}{3}$.

*В задачах 43–54 максимально упростите указанные логарифмические выражения, используя свойства логарифмических функций (см. пример 2.16).*

**43.** $\log_b \dfrac{x^5}{y^3}$.

**44.** $\log_b(x^2y^3)$.

**45.** $\log_b \sqrt[3]{N}$.

**46.** $\log_b \sqrt[5]{Q}$.

**47.** $\log_b \left(x^2 \sqrt[3]{y}\right)$.

**48.** $\log_b \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}$.

**49.** $\log_b(50 \cdot 2^{-0,2t})$.

**50.** $\log_b(100 \cdot 1{,}06^t)$.

**51.** $\log_b[P(1+r)^t]$.

**52.** $\log_e Ae^{-0,3t}$.

**53.** $\log_e 100e^{-0,01t}$.

**54.** $\log_{10}(67 \cdot 10^{-0,12x})$.

*В задачах 55–62 найдите значение $x$.*

**55.** $\log_b x = \dfrac{2}{3}\log_b 8 + \dfrac{1}{2}\log_b 9 - \log_b 6$.

**56.** $\log_b x = \dfrac{2}{3}\log_b 27 + 2\log_b 2 - \log_b 3$.

**57.** $\log_b x = \dfrac{3}{2}\log_b 4 - \dfrac{2}{3}\log_b 8 + 2\log_b 2$.

**58.** $\log_b x = 3\log_b 2 + \dfrac{1}{2}\log_b 25 - \log_b 20$.

**59.** $\log_b x + \log_b(x-4) = \log_b 21$.

**60.** $\log_b(x+2) + \log_b x = \log_b 24$.

**61.** $\log_{10}(x-1) - \log_{10}(x+1) = 1$.

**62.** $\log_{10}(x+6) - \log_{10}(x-3) = 1$.

*В задачах 63 и 64 постройте графики указанных логарифмических уравнений, предварительно преобразовав их в показательные.*

**63.** $y = \log_2(x-2)$.

**64.** $y = \log_3(x+2)$.

*** 65.** Объясните, с помощью каких простых преобразований (см. раздел 1.2) из графика функции $y = \log_2 x$ можно получить график функции, заданной уравнением из задачи 63.

*** 66.** Объясните, с помощью каких простых преобразований (см. раздел 1.2) из графика функции $y = \log_3 x$ можно получить график функции, заданной уравнением из задачи 64.

**67.** Найдите область определения и область значений функции $y = 1 + \ln(x+1)$.

**68.** Найдите область определения и область значений функции $y = \lg(x-1) - 1$.

*В задачах 69 и 70 при помощи калькулятора найдите значение указанных выражений с точностью до пяти десятичных знаков.*

**69. а)** $\lg 3527{,}2$. **б)** $\ln 0{,}0069132$.
**в)** $\ln 277{,}63$. **г)** $\ln 0{,}040883$.

**70. а)** $\lg 72{,}604$. **б)** $\lg 0{,}033041$.
**в)** $\ln 40\,257$. **г)** $\ln 0{,}0059263$.

*В задачах 71 и 72 найдите значение $x$ с точностью до четырех десятичных знаков.*

**71. а)** $\lg x = 1{,}1285$. **б)** $\lg x = -2{,}0497$.
**в)** $\ln x = 2{,}7763$. **г)** $\ln x = -1{,}8879$.

**72. а)** $\lg x = 2{,}0832$. **б)** $\lg x = -1{,}1577$.
**в)** $\ln x = 3{,}1336$. **г)** $\ln x = -4{,}3281$.

*В задачах 73–80 найдите решения указанных уравнений с точностью до четырех десятичных знаков.*

**73.** $10^x = 12$. **74.** $10^x = 153$.

**75.** $e^x = 4{,}304$. **76.** $e^x = 0{,}3059$.

**77.** $1{,}03^x = 2{,}475$. **78.** $1{,}075^x = 1{,}837$.

**79.** $1{,}005^{12t} = 3$. **80.** $1{,}02^{4t} = 2$.

*Проверьте правильность своих ответов на задачи 73–80, решив их графически.*

*В задачах 81–88, используя калькулятор, постройте по точкам графики указанных логарифмических функций. Определите интервалы возрастания и убывания данных функций.*

**81.** $y = \ln x$. **82.** $y = -\ln x$.

**83.** $y = |\ln x|$. **84.** $y = \ln|x|$.

**85.** $y = 2\ln(x+2)$. **86.** $y = 2\ln x + 2$.

**87.** $y = 4\ln x - 3$. **88.** $y = 4\ln(x-3)$.

*Убедитесь в правильности графиков логарифмических функций, созданных при решении задач 81–88, построив их в графической утилите.*

## B

*** 89.** Объясните, почему логарифм единицы с любым допустимым основанием равен нулю.

*** 90.** Объясните, почему единица не может быть основанием логарифма.

**91.** Преобразуйте логарифмическое выражение $\log_{10} y - \log_{10} c = 0{,}8x$ в эквивалентное показательное выражение.

**92.** Преобразуйте логарифмическое выражение $\log_e x - \log_e 25 = 0{,}2t$ в эквивалентное показательное выражение.

**93.*** Пусть $p(x) = \ln x$, $q(x) = \sqrt{x}$ и $r(x) = x$. Постройте графики всех трех функций в одном и том же окне графической утилиты на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 16$. Объясните, что подразумевают, когда говорят, что какая-либо функция больше другой в каком-либо интервале значений независимой переменной. Перечислите приведенные выше функции в порядке их уменьшения на отрезке $1 < x \leqslant 16$.

**94.*** Пусть $p(x) = \lg x$, $q(x) = \sqrt[3]{x}$ и $r(x) = x$. Постройте графики всех трех функций в одном и том же окне графической утилиты на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 16$. Объясните, что подразумевают, когда говорят, что какая-либо функция больше другой в каком-либо интервале значений независимой переменной. Перечислите приведенные выше функции в порядке их уменьшения на отрезке $1 < x \leqslant 16$.

## Применение математики

### Экономика и бизнес

**95.** WWW *Время удвоения*. Среднегодовой доход фонда *Gabelli Growth Fund* за первые 10 лет его существования составил 21,36%. Предположим, что деньги, инвестированные в этот фонд, продолжают ежегодно приносить 21,36% дохода, начисляемого по сложным процентам. Через какой интервал времени основная сумма инвестиций будет удвоена?

**96.** WWW *Время удвоения*. Среднегодовой доход фонда *Janus Flexible Income Fund* за его первые 10 лет его существования составил 9,58%. Предположим, что деньги, инвестированные в этот фонд, продолжают ежегодно приносить приносить 9,58% дохода, начисляемого по сложным процентам. Через какой интервал времени основная сумма инвестиций увеличится вдвое?

**97.** *Инвестиции*. Через сколько лет (с точностью до двух десятичных знаков) основная сумма размером 1000 долл. вырастет до 1800 долл. при ежеквартальном начислении сложных процентов с годовой ставкой 6%? Как изменится ответ, если сложные проценты будут начисляться непрерывно?

**98.** *Инвестиции*. Через сколько лет (с точностью до двух десятичных знаков) основная сумма размером 5000 долл. увеличится до 7500 долл. при условии, что на нее раз в полгода начисляются сложные проценты с годовой ставкой 8%? Как изменится ответ, если сложные проценты будут начисляться непрерывно?

**99.** *Капиталовложение*. Новобрачные планируют в течение 6 лет погасить кредит в размере 30 000 долл. взятый на покупку дома. Какова должна быть годовая ставка (с точностью до трех десятичных знаков) при непрерывной начислении сложных процентов на основную сумму 20 000 долл.?

**100.** *Капиталовложение.* Родители новорожденного планируют за 17 лет накопить 60 000 долл., чтобы иметь возможность оплатить обучение своего ребенка в колледже. Под какую годовую ставку (с точностью до трех десятичных знаков) с непрерывным начислением сложных процентов нужно инвестировать подаренные бабушкой и дедушкой 20 000 долл., чтобы получить необходимую сумму в оговоренный срок?

**101.** *Спрос и предложение.* Новая модель шуруповерта реализуется через сеть строительных магазинов, торгующих по сниженным ценам. Маркетинговый отдел управляющей компании подготовил таблицы таблицы с данными зависимости спроса и предложения от цены (табл. 2.16 и табл. 2.17 соответственно) этого вида товара. В табл. 2.16 переменная $x$ указывает количество покупателей, которые в течение месяца приобрели бы новый шуруповерт по цене $p$ долларов за штуку, а в табл. 2.17 она обозначает количество ежемесячно предлагаемых к продаже шуруповертов новой модели по цене $p$ долларов за штуку.

**Таблица 2.16.** Зависимость спроса от цены

| $x$ | $p = D(x)$, **долл.** |
|---|---|
| 1000 | 91 |
| 2000 | 73 |
| 3000 | 64 |
| 4000 | 56 |
| 5000 | 53 |

**Таблица 2.17.** Зависимость предложения от цены

| $x$ | $p = S(x)$, **долл.** |
|---|---|
| 1000 | 9 |
| 2000 | 26 |
| 3000 | 34 |
| 4000 | 38 |
| 5000 | 41 |

**а)** Найдите коэффициенты логарифмического уравнения регрессии ($y = a + b\ln x$), описывающего данные табл. 2.16. Используя найденное уравнение, оцените количество покупателей (с точностью до одного человека), которые приобрели бы шуруповерт по цене 50 долл. за штуку.

**б)** Найдите коэффициенты логарифмического уравнения регрессии ($y = a + b\ln x$), которое описывает данные табл. 2.17. Используя найденное уравнение, оцените количество шуруповертов (с точностью до одной штуки), которое предлагается к продаже через сеть строительных магазинов по цене 50 долл. за штуку.

***в)** Будет ли цена в размере 50 долл. за шуруповерт стабильной. Или при определенных обстоятельствах она все же будет изменяться? Объясните, чем обусловлено колебание цены.

**102.** *Точка равновесия.* Используя уравнения регрессии, найденные в задаче 101, определите равновесную цену шуруповерта новой модели. Вычислите ее с точностью до цента. Определите равновесное количество товара с точностью до единицы.

## Биологические науки

**103.** *Громкость звука: децибелы.* Человеческое ухо способно воспринимать звуки, интенсивность которых меняется в чрезвычайно широком диапазоне (более чем в 1000 триллионов раз). Измерять интенсивность звука в настолько широком диапазоне значений лучше не в абсолютных, а логарифмических единицах. Единица измерения интенсивности звука называется децибелом. Она названа в честь изобретателя телефона, А. Г. Белла (A. G. Bell). Пусть $N$ — громкость звука (в децибелах), $I$ — его мощность (в ваттах на квадратный сантиметр), а $I_0$ — мощность звука чуть ниже порога слышимости (порогу слышимости соответствует мощность звукового сигнала, равная $10^{-16}$ ватт на квадратный сантиметр). Тогда взаимосвязь между указанными величинами описывается следующим уравнением:

$$I = I_0 10^{N/10}.$$

Докажите, что эта формула эквивалентна формуле, приведенной ниже.

$$N = 10 \lg \frac{I}{I_0}.$$

**104.** *Громкость звука: децибелы.* Используя формулу из задачи 103 (в которой $I = 10^{-16}$ Вт/см$^2$), определите громкость звука в децибелах следующих источников.

**а)** Речь шепотом: $10^{-13}$ Вт/см$^2$.

**б)** Обычная речь: $3{,}16 \cdot 10^{-10}$ Вт/см$^2$.

**в)** Автомагистраль: $10^{-8}$ Вт/см$^2$.

**г)** Реактивный самолет: $10^{-1}$ Вт/см$^2$.

**105.** *Сельское хозяйство.* В табл. 2.18 приведены данные об урожайности (бушелей на акр) и валового сбора кукурузы (млн. бушелей) в США в указанные годы, начиная с 1950 г. (1 бушель кукурузы = 25 кг). Обозначим через $x$ количество лет, прошедших с 1900 г. Найдите коэффициенты логарифмического уравнения регрессии $y = a + b \ln x$, описывающего динамику роста урожайности кукурузы. Оцените (с точностью до одного десятичного знака) урожайность кукурузы в 2010 г.

**Таблица 2.18.** Производство кукурузы в США

www

| Год | $x$ | Урожайность, бушелей на акр | Валовый сбор, млн. бушелей |
|---|---|---|---|
| 1950 | 50 | 37,6 | 2782 |
| 1960 | 60 | 55,6 | 3479 |
| 1970 | 70 | 81,4 | 4802 |
| 1980 | 80 | 97,7 | 6867 |
| 1990 | 90 | 115,6 | 7802 |
| 2000 | 100 | 139,6 | 10 192 |

**106.** *Сельское хозяйство*. Обратитесь к данным табл. 2.18. Найдите коэффициенты логарифмического уравнения регрессии $y = a + b \ln x$, которое описывает динамику роста валового сбора кукурузы. Оцените (с точностью до миллиона бушелей) валовой сбор кукурузы в 2010 г.

### Социальные науки

**107.** *Численность населения планеты*. При условии, что численность населения планеты составляет 5,8 млрд. человек, а ежегодный прирост составляет 1,14%, определите, через какой период времени численность населения земного шара достигнет такого значения, что на каждого жителя будет приходится всего лишь один кв. ярд земли. (Площадь суши планеты составляет примерно $1{,}68 \cdot 10^{14}$ кв. ярдов.)

**108.** *Археология: датировка радиоуглеродным методом*. Содержание радиоактивного изотопа $^{14}$C в организме после его смерти описывается уравнением

$$A = A_0 e^{-0{,}000124t},$$

где $t$ — время (лет) и $A_0$ — количество изотопа $^{14}$C в организме в момент смерти $t = 0$ (см. пример 2.9 в разделе 2.2.). Оцените возраст черепа, обнаруженного в ходе археологических раскопок, если содержание изотопа $^{14}$C в нем составляет 10% от первоначального значения (т.е. содержания изотопа в момент смерти). (*Указание*. Найдите значение $t$, для которого справедливо равенство $A = 0{,}1A_0$.)

## Ключевые слова, основные обозначения и формулы

**2.1.** *Полиномы и рациональные функции*. Полином; степень полинома; непрерывность; точка экстремума; корень уравнения; нуль функции; старший коэффициент полинома; рациональная функция; точки разрыва функции; вертикальные и горизонтальные асимптоты графика.

$$\begin{aligned} f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots &+ \\ + a_1 x + a_0, \quad a_n &\neq 0; \\ f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}, \quad d(x) \neq 0. \end{aligned}$$

**2.2.** *Показательные функции*. Показательная функция; основание степени; графики показательных функций; горизонтальная асимптота; основные свойства показательной функции; иррациональное число $e$; показательная функция с основанием $e$; уравнение экспоненциального роста; уравнение экспоненциального распада; сложные проценты; основная сумма (текущая стоимость); начисленная сумма (будущая стоимость); непрерывное начисление сложных процентов.

$$\begin{aligned} &f(x) = b^x, \quad b > 0, \quad b \neq 1; \\ &y = e^x; \quad N = N_0 e^{kt}; \\ &A = A_0 e^{-kt}; \quad A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}; \\ &A = Pe^{rt}. \end{aligned}$$

**2.3.** *Логарифмические функции*. Обратная функция; однозначная функция; логарифмическая функция; основание логарифма; эквивалентное показательное выражение; свойства логарифмов; десятичный логарифм; натуральный логарифм; вычисление логарифмов при помощи калькулятора; решение логарифмических и показательных уравнений; время удвоения инвестиций.

$$y = \log_b x \quad \text{эквивалентно} \quad x = b^y;$$
$$\log_b x, \quad b > 0, \quad b \neq 1; \quad \lg x; \quad \ln x$$

## Упражнения для повторения

*Выполните все упражнения этого обзорного раздела и сравните результаты с ответами, помещенными в конце книги. Ответы ко многим упражнениям на повторение приводятся вместе с номером соответствующего раздела (курсивом). Если у вас возникают затруднения при решении какой-либо задачи, повторите материал соответствующего раздела.*

**A**

**1.** Прологарифмируйте выражение по основанию $e$: $u = e^v$.

**2.** Прологарифмируйте выражение по основанию 10: $x = 10^y$.

**3.** Выполните потенцирование выражения: $\ln \mathrm{M} = N$.

**4.** Выполните потенцирование выражения: $\lg u = v$.

*В задачах 5, 6 упростите указанные выражения.*

**5.** $\dfrac{5^{x+4}}{5^{4-x}}$.

**6.** $\left(\dfrac{e^u}{e^{-u}}\right)^u$.

*В задачах 7–9 найдите точное значение $x$, не пользуясь калькулятором.*

**7.** $\log_3 x = 2$.

**8.** $\log_x 36 = 2$.

**9.** $\log_2 16 = x$.

*В задачах 10–12 найдите значение $x$ с точностью до трех десятичных знаков.*

**10.** $10^x = 143{,}7$.

**11.** $e^x = 503\,000$.

**12.** $\lg x = 3{,}105$.

**13.** $\ln x = -1{,}147$.

*В задачах 14 и 15 для каждого полинома найдите следующие характеристики.*

1) *Степень полинома.*

2) *Максимально возможное для полинома данной степени количество точек экстремума.*

3) *Максимально возможное для полинома данной степени количество точек пересечения его графика с осью $x$.*

4) *Наименьшее для полинома данной степени количество точек пересечения его графика с осью $x$.*

5) *Максимально возможное для полинома данной степени количество точек пересечения его графика с осью $y$.*

*6) Наименьшее для полинома данной степени количество точек пересечения его графика с осью $y$.*

**14.** $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

**15.** $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.

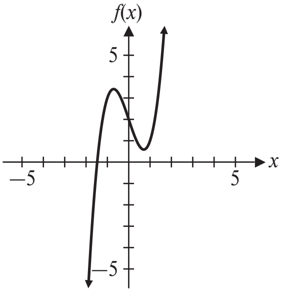
*На рисунках к задачам 16 и 17 изображены графики полиномов. Для каждого графика определите следующие характеристики.*

*1) Количество точек экстремума.*

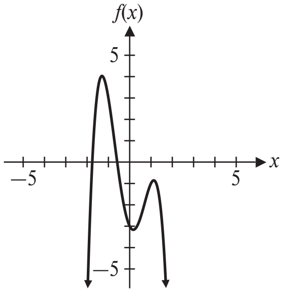
*2) Минимальную степень полинома, который может иметь график, изображенный на рисунке.*

*3) Знак старшего коэффициента полинома.*

**16.**




**17.**




**Б** *В задачах 18 и 19 для каждой рациональной функции выполните следующие задания.*

*1) Найдите координаты точек пересечения ее графика с осями координат.*

*2) Определите область существования функции.*

*3) Найдите уравнения вертикальных и горизонтальных асимптот функции.*

*4) Схематически изобразите асимптоты графика пунктирной линией. Затем нарисуйте эскиз графика функции $f$ в масштабе $-10 \leqslant x \leqslant 10$ и $-10 \leqslant y \leqslant 10$.*

*5) Используя графическую утилиту, постройте график функции $y = f(x)$ в масштабе, предложенном по умолчанию.*

**18.** $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$.

**19.** $f(x) = \dfrac{3x-4}{2+x}$.

*В задачах 20–27 найдите точное значение $x$, не пользуясь калькулятором.*

**20.** $\lg(x+5) = \lg(2x-3)$.

**21.** $2\ln(x-1) = \ln(x^2-5)$.

**22.** $9^{x-1} = 3^{1+x}$.

**23.** $e^{2x} = e^{x^2-3}$.

**24.** $2x^2e^x = 3xe^x$.

**25.** $\log_{1/3} 9 = x$.

**26.** $\log_x 8 = -3$.

**27.** $\log_9 x = \dfrac{3}{2}$.

*В задачах 28–37 найдите значение $x$ с точностью до четырех десятичных знаков.*

**28.** $x = 3e^{1,49}$.

**29.** $x = 230 \cdot 10^{-0,161}$.

**30.** $\lg x = -2{,}0144$.

**31.** $\ln x = 0{,}3618$.

**32.** $35 = 7 \cdot 3^x$.

**33.** $0{,}01 = e^{-0,05x}$.

**34.** $8000 = 4000 \cdot 1{,}08^x$.

**35.** $5^{2x-3} = 7{,}08$.

**36.** $x = \log_2 7$.

**37.** $x = \log_{0,2} 5{,}321$.

*** 38.** Как соотносятся графики функций $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ и $y = x^4$ при уменьшении масштаба изображения?

**39.** Сравните графики функций $y = x^4$ и $y = x^4 - 4x^2 + 1$, построенные в следующем масштабе.

**а)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$; $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

**б)** $-5 \leqslant x \leqslant 5$; $-500 \leqslant y \leqslant 500$.

**40.** Пусть $p(x) = 2x^4 - 11x^3 - 15x^2 - 14x - 16$. Найдите приближенные действительные нули полинома $p(x)$ с точностью до двух десятичных знаков.

**41.** Пусть $f(x) = e^x - 1$ и $g(x) = \ln(x + 2)$. Найдите координаты всех точек пересечения графиков функций $f$ и $g$. Ответ округлите до двух десятичных знаков.

*В задачах 42 и 43 упростите указанные выражения.*

**42.** $e^x\left(e^{-x} + 1\right) - \left(e^x + 1\right)\left(e^{-x} - 1\right)$.

**43.** $\left(e^x - e^{-x}\right)^2 - \left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)$.

*В задачах 44–46 постройте графики функций, заданных соответствующими уравнениями в указанных интервалах изменения независимой переменной. Определите интервалы возрастания и убывания каждой функции.*

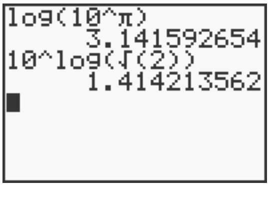
**44.** $y = 2^{x-1}$; $[-2;\ 4]$.

**45.** $f(t) = 10e^{-0,08t}$; $t \geqslant 0$.

**46.** $y = \ln(x + 1)$; $(-1;\ 10]$.

**В**

**47.** Учитывая, что значение числа $\pi$ равно 3,141592654, а значение $\sqrt{2}$ равно 1,414213562, докажите, что значения выражений, вычисленные с помощью калькулятора, на самом деле очевидны. Приведите примеры выражений с натуральным логарифмом и экспонентой, значение которых также очевидно.




*Найдите точные решения уравнений 48–51, не пользуясь калькулятором.*

**48.** $\lg x - \lg 3 = \lg 4 - \lg(x + 4)$.

**49.** $\ln(2x - 2) - \ln(x - 1) = \ln x$.

**50.** $\ln(x + 3) - \ln x = 2\ln 2$.

**51.** $\lg 3x^2 = 2 + \lg 9x$.

**52.** Преобразуйте логарифмическое равенство $\ln y = -5t + \ln c$ в эквивалентное показательное равенство. Затем выразите $y$ через остальные переменные.

*** 53.** Объясните, почему единица не может быть основанием логарифма.

# Применение математики

## Экономика и бизнес

*Формулы, которые приведены ниже, будут использованы при решении некоторых последующих задач.*

$$A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$ *Формула начисления сложных процентов*

$$A = Pe^{rt}$$ *Формула непрерывного начисления сложных процентов*

**54.** **www** *Начисление процентов*. Банк *Provident* (г. Цинциннати, штат Огайо) недавно предложил своим вкладчикам депозитные сертификаты, по которым выплачивается 6,59% сложного процента, начисляемого непрерывно. Какую сумму банк должен выплатить вкладчику через 5 лет, если он приобрел депозитный сертификат стоимостью 5000 долл.?

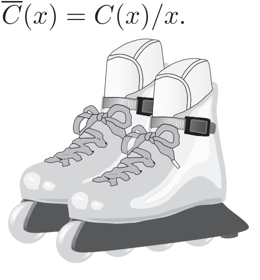
**55.** **www** *Начисление процентов*. Банк *Capital One Bank* (г. Глен-Аллен, штат Вирджиния) недавно предложил своим вкладчикам депозитные сертификаты, по которым выплачивается 6,58% сложного процента, начисляемого ежедневно. Какую сумму банк должен выплатить вкладчику через 5 лет, если он приобрел депозитный сертификат стоимостью 5000 долл.?

**56.** *Начисление процентов*. Через какой интервал времени основная сумма, на которую непрерывно начисляются сложные проценты из расчета 6,59% годовых, увеличится втрое?

**57.** *Начисление процентов*. Через какой интервал времени основная сумма, на которую ежедневно начисляются сложные проценты из расчета 6,58% годовых, увеличится вдвое?

**58.** *Минимальные средние затраты*. Финансовым отделом компании, производящей роликовые коньки, было установлено, что постоянные затраты компании в день составляют 300 долл. При объеме производства, равном 100 пар роликовых коньков величина общих затрат равна 4300 долл. Предположим, что величина общих затрат $C(x)$ линейно связана с количеством произведенной продукции $x$.

**а)** Найдите для рассматриваемого случая уравнение зависимости $C(x)$, а также функцию средних затрат $\overline{C}(x) = C(x)/x$.



**б)** Схематически изобразите график функции средних затрат на отрезке $5 \leqslant x \leqslant$ $\leqslant 200$.

**в)** Найдите асимптоты функции.

**г)** Определите, к какому значению стремится функция средних затрат при росте объема производства.

**59.** *Минимальные средние затраты*. Обслуживание больницы ежегодно обходится в сумму C(x) (тыс. долл.), определяемую с помощью следующей формулы.

$$C(x) = 20x^3 - 360x^2 + 2300x - 1000,$$

где $x$ — количество пациентов (в тыс. чел.), которым в течение года была оказана медицинская помощь. Функция средних затрат $\overline{C}$ определяется формулой $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

**а)** Напишите уравнение функции средних затрат.

**б)** Постройте график функции средних затрат на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 12$.

**в)** Используя графическую утилиту, постройте график функции средних затрат. Попеременно переходя в режимы изменения масштаба изображения и определения координат исходных данных, определите, какому количеству пациентов соответствует минимальное значение функции средних затрат. Чему равно это минимальное значение?

**60.** *Точка равновесия*. Компания планирует выпустить на рынок набор противопригарной посуды из 10 предметов. Маркетинговый отдел собрал статистические данные о зависимости спроса и предложения от цены (табл. 2.19 и 2.20 соответственно) на этот товар. В табл. 2.19 переменная $x$ обозначает количество покупателей, которые на протяжении месяца будут приобретать посуду по цене $p$ долларов, а в табл. 2.20 ею обозначено количество наборов, ежемесячно предлагаемых к продаже по цене $p$ долларов.

**а)** Найдите коэффициенты уравнения квадратичной регрессии, которое описывает данные табл. 2.19. Затем оцените количество покупателей, приобретающих набор посуды по цене 180 долл.

**Таблица 2.19.** Зависимость спроса от цены

| $x$ | $p = D(x)$, долл. |
|---|---|
| 985 | 330 |
| 2145 | 225 |
| 2950 | 170 |
| 4225 | 105 |
| 5100 | 50 |

**Таблица 2.20.** Зависимость предложения от цены

| $x$ | $p = D(x)$, долл. |
|---|---|
| 985 | 30 |
| 2145 | 75 |
| 2950 | 110 |
| 4225 | 155 |
| 5100 | 190 |

**б)** Найдите коэффициенты линейного регрессионного уравнения, которое описывает данные табл. 2.20. Определите количество наборов посуды, проданных по цене 180 долл.

**в)** Является ли цена в размере 180 долл. за набор стабильной. Возможен ли ее дальнейший рост или снижение? Объясните, чем обусловлено колебание цены.

**г)** Используя уравнения, найденные при решении пп. *а* и *б*, определите равновесную цену набора посуды. Вычислите ее с точностью до цента. Определите равновесное количество товара с точностью до единицы.

**61.** *Телекоммуникации*. Согласно данным Ассоциации телекоммуникационной промышленности (Telecommunications Industry Association) количество абонентов мобильной связи выросло примерно с 4 млн. человек в 1990 г. до более чем 76 млн. в 1999 г. (табл. 2.21). Пусть $x$ — количество лет, прошедших с 1990 года.

**Таблица 2.21.** Количество абонентов мобильной связи

www

| **Год** | **Количество абонентов, млн. чел.** |
|---|---|
| 1990 | 4 |
| 1991 | 6 |
| 1992 | 9 |
| 1993 | 13 |
| 1994 | 19 |
| 1995 | 28 |
| 1996 | 38 |
| 1997 | 49 |
| 1998 | 60 |
| 1999 | 76 |

**а)** Найдите показательное регрессионное уравнение, описывающее приведенные в таблице данные. Оцените (с точностью до миллиона) количество абонентов мобильной связи в 2000 и 2010 гг.

***б)** Фактическое количество абонентов мобильной связи в 2000 г. составило примерно 97 млн. человек. Как фактическое значение соотносится с оценочным значением, полученным при решении п. *а*? Как повлияет информация о фактическом количестве абонентов в 2000 г. на прогноз их количества в 2010 г.?

## Биологические науки

**62.** *Медицина*. Здоровой мыши прививается одна лейкозная клетка. Примерно через полдня она делится пополам. К концу дня обе лейкозные клетки снова делятся и их становится 4. Деление раковых клеток продолжается до тех пор, пока не достигнет 1 миллиарда; при таком их количестве подопытное животное умирает.

**а)** Напишите уравнение, связывающее количество лейкозных клеток в организме мыши $N$ и количество дней, прошедшее с момента заражения $t$.

**б)** Определите с точностью до дня, через какой период времени мышь погибнет?

**63.** *Биология морей*. Уменьшение интенсивности света, падающего на поверхность воды, с увеличением расстояния от поверхности, описывается показательным уравнением

$$I = I_0 e^{-kd},$$

где $I$ — интенсивность света на глубине $d$ футов от поверхности воды, $I_0$ — интенсивность света, падающая на поверхность воды, $k$ — коэффициент поглощения. Измерения, проведенные в Саргассовом море в Вест-Индии показали, что интенсивность света, падающего на поверхность воды, уменьшается в два раза на глубине 73,6 фута. Найдите величину коэффициента поглощения $k$, (с точностью до пяти десятичных знаков) и толщину слоя воды (с точностью до фута), который ослабляет интенсивность падающего света до 1%.

**64.** *Сельское хозяйство.* В табл. 2.22 приведены данные об объемах потребления кукурузы (млн. бушелей) в Соединенных Штатах Америки в указанные годы, начиная с 1975 г. Пусть $x$ — количество лет, прошедшее с 1900 г.

**Таблица 2.22.** Совокупное потребление кукурузы

www

| **Год** | $x$ | **Совокупное потребление кукурузы (млн. бушелей)** |
|---|---|---|
| 1975 | 75 | 522 |
| 1980 | 80 | 659 |
| 1985 | 85 | 1152 |
| 1990 | 90 | 1373 |
| 1995 | 95 | 1690 |

**а)** Найдите коэффициенты логарифмического уравнения регрессии $y = a + b\ln x$, описывающего табличные данные. Оцените (с точностью до млн. бушелей) совокупное потребление кукурузы в 1996 и 2010 гг.

***б)** Фактическое совокупное потребление кукурузы в 1996 г. составило 1583 млн. бушелей. Как это значение соотносится с оценочным, полученным при решении п. *а*? Как повлияет информация об объеме фактического потребления кукурузы в 1996 г. на прогноз объема потребления кукурузы в 2010 г.? Аргументируйте свой ответ.

## Социальные науки

**65.** *Рост численности населения.* Во многих странах ежегодный прирост численности населения составляют более 3%. Оцените, через сколько лет население страны увеличится в два раза при условии, что в ближайшей перспективе темп роста численности населения будет сохраняться на указанном уровне. Воспользуйтесь формулой, описывающей начисление сложных процентов: $P = P_0(1+r)^t$.

**66.** *Рост численности населения.* Решите задачу 65 при условии, что рост численности населения описывается формулой непрерывного начисления сложных процентов: $P = P_0e^{rt}$.

**67.** *Программа медицинской помощи престарелым.* Данные о ежегодных расходах (млрд. долл.) американского правительства по программе бесплатной медицинской помощи престарелым в указанные годы, начиная с 1980 г., приведены в табл. 2.23. Обозначим через $x$ количество лет, прошедшее с 1980 г.

**а)** Найдите коэффициенты показательного уравнения регрессии $y = ab^x$, описывающего табличные данные. Оцените (с точностью до млрд. долл.) совокупные расходы в 2010 г.

**б)** В каком году совокупные расходы достигнут 500 млрд. долл.?

**Таблица 2.23.** Расходы по программе бесплатной медицинской помощи престарелым

WWW

| Год | Совокупные расходы, млрд, долл. |
|---|---|
| 1980 | 37 |
| 1985 | 72 |
| 1990 | 111 |
| 1995 | 181 |

## Домашнее задание 2.1. Сравнение скоростей возрастания показательных функций и полиномов, логарифмической функции и функции извлечения корня

Показательная функция, например функция $f(x) = 2^x$, при больших значениях $x$ возрастает чрезвычайно быстро, гораздо быстрее любого полинома. Покажите, что графики функций $f(x) = 2^x$ и $g(x) = x^2$ пересекаются в трех точках. Абсциссы точек пересечения графиков делят ось $x$ на четыре интервала. Для каждого интервала определите, какая из двух функций принимает бо́льшие значения.

Логарифмическая функция, например функция $r(x) = \ln x$, при больших значениях $x$ растет чрезвычайно медленно, медленнее, чем функция извлечения корня, например, функция $s\,(x) = \sqrt[3]{x}$. Изобразите схематически графики обеих функций в одной системе координат в интервале $x > 0$ и определите количество точек пересечения графиков. Определите, какая из этих функций принимает бо́льшие значения в каждом из интервалов, образованных абсциссами точек пересечения графиков.

## Домашнее задание 2.2. Сравнение регрессионных моделей

До этих пор уравнение регрессии, описывающее набор исходных данных, представлялось нами в виде полинома разных степеней, показательной или логарифмической функции. Однако уравнение регрессии может выражаться зависимостями любого другого типа. (В графическом калькуляторе TI-83 Plus меню STAT-CALC содержит 10 различных вариантов уравнений регрессии.) Но как определить, какая функциональная зависимость точнее всего описывает исходные данные? Существует два принципиально разных способа выбора регрессионной модели. Согласно первому выбор модели обуславливается природой аппроксимируемых данных. Например, логично предположить, что вес рыбы пропорционален кубу ее длины. Аналогичным образом рост численности населения описывается экспоненциальной функцией, по крайней мере в коротком временном промежутке. Согласно второму способу уравнение регрессии подбирается, исходя из близости кривой его графика к точкам, представляющим исходные данные. Последний способ лучше проиллюстрировать на конкретном примере. Рассмотрим набор данных, представленный в виде таблицы на рис. 2.26. В столбце L1 указаны абсциссы, а в столбце L2 — ординаты точек. На координатной плоскости эти точки располагаются так, как показано на рис. 2.27. Выберем произвольное уравнение, например $y_1 = 0{,}6x+2$, и построим ее график так, чтоб он проходит через область точек, представляющих исходные данные (рис. 2.28).

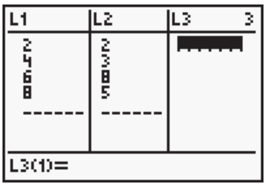



**Рис. 2.26.** Набор данных

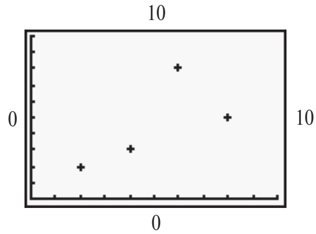



**Рис. 2.27.** Исходные данные на координатной плоскости

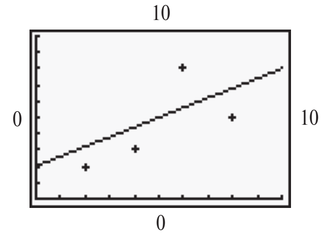



**Рис. 2.28.** График регрессионного уравнения $y_1 = 0{,}6x + 2$

Чтобы количественно оценить степень близости функции $y_1$ к аппроксимируемым данным, нужно вычислить разность между ординатами точек исходного набора данных и графика функции $y_1$ (на рис. 2.29 и рис. 2.30 указаны в столбце L3), с одними и теми же абсциссами. Каждая такая разность называется **остатком**. Наиболее часто оценка близости регрессионного уравнения к описываемому набору данных выполняется по величине **суммы квадратов остатков**. Ее достаточно просто вычислить при помощи графического калькулятора (рис. 2.31) или в электронной таблице (рис. 2.32).

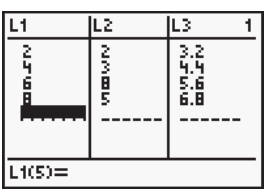



**Рис. 2.29.** Регрессионные остатки

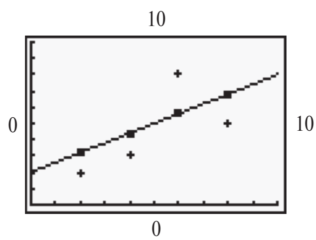



**Рис. 2.30.** + L2; ■ L3

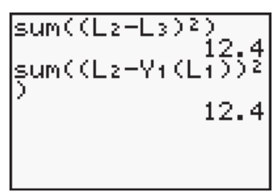



**Рис. 2.31.** Два способа вычисления суммы квадратов остатков

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Data Set | | | | |
| 2 | x | y | y1=0.6x + 2 | Residual | Residual^2 |
| 3 | 2 | 2 | 3.2 | -1.2 | 1.44 |
| 4 | 4 | 3 | 4.4 | -1.4 | 1.96 |
| 5 | 6 | 8 | 5.6 | 2.4 | 5.76 |
| 6 | 8 | 5 | 6.8 | -1.8 | 3.24 |
| 7 | | | | SSR | 12.4 |

**Рис. 2.32.** Результаты вычислений

1. Найдите уравнение линейной регрессии, описывающей данные, приведенные в таблице, на рис. 2.26. Для найденного уравнения вычислите сумму квадратов остатков и сравните ее с величиной, найденной для функции $y_1$. Оказывается, среди всех возможных полиномов первой степени **уравнение линейной регрессии характеризуется минимальной величиной суммы квадратов остатков**. По этой причине процедуру построения модели линейной регрессии часто называют **методом наименьших квадратов**. Подобное утверждение справедливо для полиномов любой заданной степени. Иначе говоря, уравнение квадратичной регрессии имеет минимальное значение суммы квадратов остатков среди всех квадратичных полиномов, уравнение кубической — минимальное значение суммы квадратов остатков среди всех кубических полиномов и т.д. При этом оно оказывается недействительным для показательного или логарифмического уравнений регрессии. Тем не менее при выборе наиболее приемлемого регрессионного уравнения среди показательной, логарифмической и полиномиальной функций, достаточно сравнить сумму квадратов остатков выбранных моделей.

2. Найдите показательное и логарифмическое уравнения регрессии, описывающие зависимость, представленную данными в таблице на рис. 2.26. Для каждой модели вычислите сумму квадратов остатков и сравните ее с суммой квадратов остатков, полученной для уравнения линейной регрессии.

3. Ежегодные расходы на рекламу товаров и услуг в указанные годы, начиная с 1950 года, в США приведены в табл. 2.24. Переменная $x$ обозначает количество лет, прошедших с 1950 г., а переменная $y$ — суммарные расходы на рекламу (млрд. долл.). Какое уравнение регрессии наиболее точно описывает исходные данные: квадратичное, кубическое или показательное? Аргументируйте свой ответ, вычислив для каждого из них сумму квадратов остатков.

**Таблица 2.24.** Ежегодные расходы на рекламу в США в 1950–1995 гг.

www

| $x$, годы | $y$, млрд. долл. |
|---|---|
| 0 | 5,7 |
| 5 | 9,2 |
| 10 | 12,0 |
| 15 | 15,3 |
| 20 | 19,6 |
| 25 | 27,9 |
| 30 | 53,6 |
| 35 | 94,8 |
| 40 | 128,6 |
| 45 | 160,9 |