ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ, КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5–7
классы

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является четвёртым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу «*от простого — к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи в скобках приведены классы, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций в скобках, относитесь к ним творчески. Кстати, распределение задач по темам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным темам.

В принципе, по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса, и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;

$\cup$ — объединение;

$\cap$ — пересечение;

$\varnothing$ — пустое множество;

$\in$ — знак принадлежности;

$\subset$ — знак включения подмножества;

$\forall$ — для любого;

$\Longrightarrow$ — следовательно;

$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;

$\begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$ — знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;

$\left[\begin{array}{l} \cdots \\ \cdots \end{array}\right.$ — знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Часть I. **ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

1. Комбинаторика и элементы теории вероятностей

Комбинаторикой называется раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько комбинаций определённого типа можно составить из заданных объектов (элементов, предметов).

1.1. Правило суммы и правило произведения

Теоретический материал

При решении задач комбинаторики используются два основных правила — *правило суммы* и *правило произведения*.

Правило суммы: Если объект A можно выбрать m способами, а объект B — n способами, то выбор «либо A, либо B» можно сделать $m+n$ способами.

Доказательство. Действительно, поскольку всего объектов $m+n$, выбрать из них один можно $m+n$ способами.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары $(A; B)$ в указанном порядке можно сделать $m \cdot n$ способами.

Доказательство. Действительно, с одним элементом из множества A мы можем составить n таких различных пар, а всего в множестве A m элементов.

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры решения задач

Пример 1. Сколько всего трёхзначных чисел, делящихся на 5?

Р е ш е н и е. По признаку делимости на 5 последней цифрой числа может быть 0 или 5, на предпоследнем месте может стоять любая из 10 цифр, а на первом месте — любая цифра, кроме 0, т. е. одна из 9 цифр может стоять на первом месте. Таким образом, по правилу произведения всего искомых чисел может быть $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$.

Ответ. 180.

> ***Замечание.*** При решении этой задачи мы использовали правило произведения.

Пример 2. Из города А в город Б ведут две дороги, из А в Г — четыре дороги, из Б в В — три дороги, из Г в В — пять дорог.

1) Сколько различных дорог ведёт из А в В через Б?
2) Сколько вообще разных дорог из А в В?

Решение. 1) Поскольку из города А в город Б ведут две дороги, а из Б в В — три дороги, по правилу произведения получаем, что из А в В через Б ведёт $2 \cdot 3 = 6$ дорог.

2) Поскольку из А в В можно добраться не только через Б, но и через город Г, получаем два типа маршрутов из А в В: первый — через Б, второй — через Г. По первому маршруту всего 6 дорог. Посчитаем, сколько дорог ведёт из А в В через Г. По правилу произведения получаем $4 \cdot 5 = 20$. Окончательно по правилу суммы получаем $6 + 20 = 26$ дорог.

Ответ. а) 6; б) 26.

> ***Замечание.*** При решении этой задачи мы использовали и правило произведения, и правило суммы.

Пример 3. В 1996 г. каждый из президентов 15 республик бывшего Советского Союза послал в подарок на день рождения каждому из остальных президентов торт с таким количеством свечек, сколько лет исполнилось имениннику. Могло ли так случиться, что всего было послано 1997 свечек?

Решение. Каждый президент послал в подарок 14 тортов. Значит, всего было послано $15 \cdot 14 = 210$ тортов. Если бы эти 210 тортов были украшены всего лишь 1997 свечками, то на торте с наименьшим количеством свечек их было бы меньше 10 (потому что если бы на каждом торте было не менее

10 свечек, то всего свечек было бы не менее $210 \cdot 10 = 2100$). Но президент не может быть моложе 10 лет.

О т в е т. Не могло.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}6}$ Имеется 5 закрытых чемоданов и 5 ключей к ним. При этом неизвестно, к какому чемодану подходит какой ключ. Какое наименьшее число попыток надо сделать, чтобы наверняка определить, какой ключ подходит к какому чемодану?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Сколько существует двузначных чисел, в записи которых не употребляется цифра 1?

   б) Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в соревновании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

   в) Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней[1]. Сколькими различными способами они могут упасть?

   г) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова

   1) камзол; 2) здание?

3. $\boxed{5\text{-}6}$ а) На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с неё? А если спуск и подъём происходят по разным путям?

   б) В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

   в) На ферме есть 20 овец и 24 свиньи. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами его можно сделать ещё раз?

4. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

---

[1] На гранях игральной кости нарисованы цифры от 1 до 6, а на гранях волчка — от 1 до 8.

б) Есть 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с одной маркой для посылки письма? А с двумя марками?

в) Из трёх экземпляров учебника алгебры, семи экземпляров учебника геометрии и семи экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

г) Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами могут они упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.

5. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и чёрный? А если нет ограничений на цвет выбранных квадратов (порядок выбора важен)?

б) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и чёрный квадраты, не лежащие на одной и той же горизонтали и вертикали?

в) Имеется 6 пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров?

г) Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

6. $\boxed{5\text{-}6}$ а) У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

б) В корзине 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Надя берёт и яблоко, и апельсин. Когда Надя имеет бо́льшую свободу выбора: когда Ваня взял яблоко или когда Ваня взял апельсин?

7. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Сколько всего пятизначных чисел можно составить из цифр 0 и 1?

б) Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

в) Каждую клетку квадратной таблицы 2×2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

г) Сколькими способами можно сделать трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

8. $\boxed{5\text{-}6}$ а) На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

б) Сколькими способами можно разложить 7 монет различного достоинства по трём карманам?

в) Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча — победа одной из команд либо ничья; счёт роли не играет.)

г) Номера автомашин состоят из 3 букв (используется 13 букв) и 3 цифр (три нуля в номере быть не может). Сколько существует различных номеров автомашин?

9. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Сколько всего имеется пятизначных чисел, сумма цифр в которых равняется трём? Причём в записи каждого числа цифра 1 может встречаться не более одного раза.

б) Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?

в) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифры слева — не пятёрка?

10. $\boxed{5\text{-}6}$ а) В магазине есть 6 экземпляров романа «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

б) Решите предыдущую задачу, если, кроме того, в магазине есть 3 тома, в которые входят «Рудин» и «Отцы и дети».

в) 1) В магазине «Всё для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

2) В магазине есть ещё 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

3) В магазине по-прежнему продаётся 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

11. 6-7 а) Сколько имеется двузначных чисел, у которых

1) среди цифр есть хоть одна пятёрка;
2) цифра десятков меньше цифры единиц;
3) цифра десятков больше цифры единиц?

б) Подряд выписаны все целые числа от 1 до 100. Сколько раз в этой записи встречаются цифры:

1) 0; 2) 1; 3) 3?

в) Сколько среди целых чисел от 10 до 1000 таких,

1) в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры;
2) у которых каждая последующая цифра больше предыдущей;
3) у которых сумма цифр равна 9?

г) Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, таких как 54 345, 17 071)?

12. 6-7 Человек имеет 10 друзей и в течение нескольких дней приглашает некоторых из них в гости так, что компания ни разу не повторяется (в один из дней он может не приглашать никого). Сколько дней он может так делать?

13. 6-7 В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идёт число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?

14. 6-7 Алфавит племени «Мумбо-Юмбо» состоит из трёх букв. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из четырёх букв. Сколько слов в языке племени «Мумбо-Юмбо»?

15. 6-7 В 1897 г. каждый из 13 министров Российской империи послал в подарок на день рождения каждому из

остальных министров письменный стол, в котором было столько ящичков, сколько лет исполнилось имениннику. Могло ли так случиться, что во всех подарках было 1997 ящичков?

16. 6-7 а) Сколько среди целых чисел от 100 до 10 000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковые цифры?

б) Сколько различных четырёхзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4,

1) если каждая цифра может встречаться только один раз;

2) если каждая цифра может встречаться несколько раз?

17. 6-7 Пусть p и q — различные простые числа. Сколько делителей у числа

1) $p \cdot q$; 2) $p^2 \cdot q$; 3) $p^2 \cdot q^2$; 4) $p^m \cdot q^n$?

18. 7 а) Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

б) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

в) Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

19. 7 В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены 0 и 1, причём известно, что из любых четырёх строк таблицы какие-то две совпадают. Докажите, что в таблице есть два одинаковых столбца.

20. 6-7 Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи разного цвета так, чтобы они не били друг друга? А две ладьи одного цвета?

21. 6-7 Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция? А если короли одного цвета?

22. 7 Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга,

1) двух слонов; 2) двух ферзей?

Все фигуры одного цвета.

23. 7 Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга, двух коней одного цвета?

24. 7 Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке шесть оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

25. 6-7 Сколькими способами из 28 фишек домино можно выбрать две фишки так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

26. 7 а) Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в чёрный, либо часть в белый и часть в чёрный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они ни переворачивались.)

б) Гайка имеет форму правильной шестиугольной призмы. Каждая боковая грань гайки покрашена в один из трёх цветов: белый, красный или синий, причём соседние грани выкрашены в разные цвета. Сколько существует различных по раскраске гаек? (Для раскраски гайки не обязательно использовать все три краски.)

1.2. Размещения, перестановки, сочетания

Теоретический материал

Рассмотрим множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, состоящее из n различных элементов. *Выборкой объёма* k называется множество $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, содержащее k элементов исходного множества A. Элементы выборки могут быть как разными (в этом случае можно считать, что выбранный элемент убирается из множества A), так и одинаковыми (в этом случае можно считать, что выбранный элемент остаётся в множестве A).

Размещением с повторением (из n по k) называется упорядоченная выборка, у которой элементы могут быть одинаковыми. (Упорядоченная выборка — это выборка, у которой важен порядок элементов.) Количество размещений с повторениями из n по k обозначают $\overline{A}{}_n^k$, и оно равно n^k. (Так как на каждом из k мест может быть любой из n элементов множества A, то по правилу произведения $\overline{A}{}_n^k = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.)

Упорядоченная выборка, у которой все элементы разные, называется *размещением* (из n по k). Количество размещений из n по k обозначают A_n^k. Из правила произведения легко получаем, что

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещение при $k = n$ называется *перестановкой*. Количество перестановок обозначают P_n и, очевидно,

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Количество перестановок можно получить используя формулу для количества размещений из n по n с учётом того, что $0! = 1$:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!\,.$$

Сочетанием из n по k называется выборка k элементов из множества A, у которой все элементы разные, а порядок элементов не важен. Выборки, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми — этим сочетания отличаются от размещений. Количество сочетаний обозначается C_n^k. Так как из каждого сочетания можно сделать P_k перестановок, то

$$P_k \cdot C_n^k = A_n^k \quad \Longrightarrow \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры решения задач

Пример 1. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать коды, содержащие 5 символов?

Решение. Исходное множество состоит из двух элементов $A = \{\text{точка}, \text{тире}\}$. Так как для составления букв используется пять элементов, то нам надо найти количество размещений с повторениями из 2 по 5:

$$\overline{A}\,_2^5 = 2^5 = 32.$$

Ответ. 32 буквы.

Пример 2. Сколькими способами в хоккейной команде (23 игрока) можно выбрать капитана и его заместителя?

Решение. Капитаном может быть выбран любой из 23 игроков, а его заместителем — любой из оставшихся 22 игроков. Следовательно, всего $23 \cdot 22 = 506$ различных способов выбора капитана и его заместителя.

Ответ. 506.

Замечание. Эту задачу можно решить, используя тот факт, что выбор двух из 23 — это количество размещений

$$A_{23}^2 = \frac{23!}{(23-2)!} = 23 \cdot 22 = 506.$$

Пример 3. Сколькими способами можно построить в ряд 5 человек?

Решение. На первом месте может быть любой из 5 человек, на втором — любой из оставшихся 4 человек и т. д. Поэтому всего получаем

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Ответ. 120.

Замечание. Эту задачу можно решить, используя тот факт, что каждая расстановка 5 человек в ряд — это перестановка. Всего перестановок из 5 человек

$$P_5 = 5! = 120.$$

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ – школе»** – результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика – новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача – научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее издание предназначено для учащихся 5–7 классов. В серии выпущено ещё несколько книг для 5–7 классов по другим разделам математики; готовятся к выпуску сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!