ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов,
Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ
по основному курсу

Учебно-методическое пособие

Под редакцией
М. В. Федотова

Москва
Лаборатория знаний

Оглавление

От редактора

Уважаемый читатель, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем десятилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. Сначала были созданы пособия для очных подготовительных курсов, затем были разработаны электронные версии учебников, используемые при дистанционном обучении. На основе этого опыта подготовлена серия книг для старшеклассников, одной из которых и является настоящее пособие.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии и физике. По каждому предмету вышли два пособия: основной курс и углубленный курс, содержащий сложные задачи Единого государственного экзамена и нестандартные задачи вступительных экзаменов в вузы (в основном это задачи различных факультетов МГУ имени М. В. Ломоносова). Основной курс содержит все разделы соответствующего предмета, необходимые для решения задач первой части ЕГЭ и некоторых задач второй части, а также первой половины задач вариантов вступительных экзаменов в вузы. Углубленный курс содержит задачи, научившись решать которые, вы сможете решать все задачи ЕГЭ и все или почти все задачи олимпиад и вступительных экзаменов в вузы (за отведенное время можно просто физически не успеть решить все задачи).

В серии «ВМК МГУ — школе» вышли также два пособия по информатике. Первое рекомендуется в качестве пособия при подготовке к ЕГЭ по информатике и ИКТ. Разделы этого пособия соответствуют темам, включенным в ЕГЭ. Второе — пособие по программированию — поможет вам подготовиться к экзамену по информатике, научиться решать задачи по программированию на языке Паскаль.

Отличительной особенностью наших пособий является **спиралевидная схема подачи материала**, когда каждая тема повторяется несколько раз, причем каждый раз на более сложном уровне, чем в предыдущий. Это позволяет не забывать пройденный материал и постепенно подходить к сложным задачам.

Заместитель декана по учебной работе
факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
доцент кафедры математической физики
М. В. Федотов

Предисловие

До 2017 г. «основной курс» назывался «базовым курсом», но в связи с разделением ЕГЭ на базовый и профильный уровни во избежание путаницы наш «базовый курс» был переименован в «основной курс».

«Основной курс» рассчитан на закрепление школьного материала по математике и приобретение навыков, необходимых для решения задач ЕГЭ и стандартных задач вступительных экзаменов в вуз.

Данный курс изначально не предполагает знаний, выходящих за рамки базовой школьной программы. Все приемы, необходимые для решения задач, демонстрируются по ходу изучения материала.

Задачи в разделах расположены по принципу *«от простого — к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

При составлении пособия авторы придерживались спиралевидного принципа подачи материала: сначала предлагаются простые задачи по всем основным разделам математики и методы их решения, затем рассматриваются более сложные задачи, для решения которых требуются более сложные методы или их комбинации. Это позволяет не только закрепить, но и осмыслить на новом уровне уже пройденный материал. Такая схема обучения с успехом применяется на очных и дистанционных подготовительных курсах факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова.

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения.

Для задач письменного экзамена сначала идет сокращенное название факультета, затем год, в котором была задача (если после года в скобках идет цифра 1 или 2, это значит, что задача была на весенней олимпиаде факультета: на мехмате и физфаке весной проходили две олимпиады; на ВМК, геологическом, химическом, географическом факультетах и факультете почвоведения — одна олимпиада весной). После точки идет номер задачи в варианте (обычно, чем больше номер, тем сложнее задача в данном варианте). Например, (ВМК-98.3) означает, что задача была в 1998 г. летом на вступительных экзаменах на факультете ВМК, третьим номером в варианте, а (М/м-97(2).1) означает, что задача была в 1997 г. на второй весенней олимпиаде механико-математического факультета первым номером в варианте.

Сокращения названий факультетов, принятые в данной книге

М/м — механико-математический факультет;
ВМК — факультет вычислительной математики и кибернетики (.Б — отделение бакалавров по прикладной математике, .И — отделение бакалавров по информационным технологиям);
Физ — физический факультет;
Хим — химический факультет;
ВКНМ — Высший колледж наук о материалах;
ФНМ — факультет наук о материалах (до 2000 г. — ВКНМ);
Биол — биологический факультет;

Почв — факультет почвоведения;
Геол — геологический факультет (.ОГ — отделение общей геологии);
Геогр — географический факультет;
Экон — экономический факультет (.М — отделение менеджмента, .К — отделение экономической кибернетики, .В — вечернее отделение);
ВШБ — Высшая школа бизнеса;
Псих — факультет психологии;
Фил — философский факультет;
Филол — филологический факультет;
Соц — социологический факультет;
ИСАА — Институт стран Азии и Африки;
ФГУ — факультет государственного управления (отделение «Антикризисное управление»);
ЧФ — Черноморский филиал МГУ (г. Севастополь);
МШЭ — Московская школа экономики.

Используемые обозначения

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ — объединение; $\cap$ — пересечение; $\emptyset$ — пустое множество;
$\in$ — знак принадлежности; $\subset$ — знак включения подмножества;
$\forall$ — для любого; $A \backslash B$ — разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ — следовательно; $\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
ОДЗ — область допустимых значений;

$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$ – знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединенные этим знаком;

$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ \ldots \end{array}\right.$ – знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединенных этим знаком.

Рекомендуется школьникам при подготовке к сдаче Единого государственного экзамена, абитуриентам при подготовке к поступлению как в МГУ, так и в другие вузы, учителям математики, репетиторам, руководителям кружков и факультативов, преподавателям подготовительных курсов.

Желаем удачи!

Часть I. Алгебра

1. Преобразование алгебраических выражений, простейшие уравнения и неравенства

1.1. Формулы сокращенного умножения, преобразование алгебраических выражений

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, при решении которых используются различные полезные формулы и преобразования: формулы сокращенного умножения, выделение полного квадрата, домножение на сопряженное выражение.

Необходимо знать и уметь применять следующие формулы:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \tag{1}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{3}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \tag{4}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \tag{5}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \tag{6}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \tag{7}$$

причем все формулы нужно узнавать не только слева направо, но и справа налево.

Применение формул сокращенного умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b, которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращенного умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

В общем случае: квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных попарных произведений. Так, в формуле (2) сумма всевозможных попарных произведений равна $ab + ba = 2ab$.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - ... - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Примеры решения задач

Пример 1. (Геол-98.1) Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{9a^2-16b^2}{4b+3a} - \frac{a^2b-3ab^2}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{8a^3-b^3}{2a-b}\right).$$

Решение. Согласно формулам (1) и (5)

$$9a^2 - 16b^2 = (3a-4b)(3a+4b), \quad 8a^3 - b^3 = (2a-b)(4a^2+2ab+b^2).$$

Последовательно преобразуем исходное выражение:

$$\left(\frac{(3a-4b)(3a+4b)}{4b+3a} - \frac{ab(a-3b)}{ab}\right)^2 : \left(6ab - \frac{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}{2a-b}\right) =$$

$$= (3a-4b-a+3b)^2 : (6ab-4a^2-2ab-b^2) = (2a-b)^2 : (4a^2-4ab+b^2)\cdot(-1) = -1.$$

Отметим, что выражение имеет смысл только при $4b+3a \neq 0,\ ab \neq 0,\ 2a \neq b$.

Ответ. -1 при $4b+3a \neq 0,\ ab \neq 0,\ 2a \neq b$.

Пример 2. (М/м-78.1) Выражение $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

Решение. *Первый способ.* Выделим полные квадраты в подкоренных выражениях:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} = \sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{40\sqrt{2}+57} =$$

$$= \sqrt{32 - 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} - \sqrt{32 + 2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 5 + 25} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}-5\right)^2} - \sqrt{\left(4\sqrt{2}+5\right)^2} =$$

$$= \left|4\sqrt{2}-5\right| - \left(4\sqrt{2}+5\right) = 4\sqrt{2} - 5 - 4\sqrt{2} - 5 = -10.$$

Замечание. Коэффициенты полных квадратов можно найти методом неопределенных коэффициентов (ищем $a, b \in \mathbb{N}$):

$$57 + 40\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(a^2 + 2b^2\right) + 2ab\sqrt{2}.$$

Получаем систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 57, \\ ab = 20; \end{cases}$ значит, $b \in \{1; 2; 4; 5\}$, число a — нечетное. Подходит пара $a = 5,\ b = 4$; следовательно, $57 + 40\sqrt{2} = \left(5 + 4\sqrt{2}\right)^2$.

Аналогично $57 - 40\sqrt{2} = \left(5 - 4\sqrt{2}\right)^2$.

Второй способ. Примем числовое значение выражения за параметр и решим соответствующее уравнение.

Обозначим буквой A выражение $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$; тогда $A<0$, так как первый радикал меньше второго.

Возведем обе части в квадрат:

$$A^2 = 57 - 40\sqrt{2} + 57 + 40\sqrt{2} - 2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\cdot\left(57+40\sqrt{2}\right)} \iff$$

$$\iff \quad A^2 = 114 - 2\sqrt{57^2 - 1600\cdot 2} \quad \iff \quad A^2 = 100 \quad \iff \quad A = \pm 10.$$

Значит, $A=-10$.

Ответ. -10.

Задачи

1. Найти значение выражения $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a=4$, $b=5$.

2. Найти значение выражения $\dfrac{2}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}-\dfrac{2\sqrt{p}}{p-q}$ при $p=8$, $q=9$.

3. Сократить дробь $\dfrac{a-81b}{\sqrt{a}-9\sqrt{b}}$.

4. а) Сократить дробь $\dfrac{a+27b}{\sqrt[3]{a}+3\sqrt[3]{b}}$.

   б) (ЧФ-04.1) Сократить дробь $\dfrac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}$.

5. (Геол-93.1) Найти численное значение выражения
$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2.$$

6. (Почв-98(1).1) Упростить выражение
$$\left(\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{4a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

7. (Псих-84.1) Вычислить, не используя калькулятор:
$$\left(\frac{3\left(\frac{17}{90}-0,125:1\frac{1}{8}\right):480}{\left(7:1,8-2\frac{1}{3}:1,5\right):2\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\left(\frac{679\cdot 10^{-2}}{0,7}+0,3\right).$$

8. Вычислить $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

9. Выражение $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ является целым числом. Найти его.

10. а) (Почв-96.1) Доказать, что число $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$ целое, и найти его.

    б) (Геол-10.1) Доказать, что при $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ число $6a-a^3$ целое, и найти это число.

11. Упростить до целого числа выражение $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

12. (МГУ-48.3) Выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ является целым числом. Найти это целое число.

13. (МГУ-48.2) Выражение $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ является целым числом. Найти это целое число.

14. а) (ИСАА-99.2) Упростив выражение

$$A=\frac{3ab-b\sqrt{ab}+a\sqrt{ab}-3b^2}{\sqrt{2^{-2}\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)-0,5}}-2ab-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}},$$

    где $a>b>0$ — действительные числа, выяснить, что больше: A или $0,01$.

    б) (ВМК-09.1) Вычислить значение выражения

$$\frac{27x^3-y^3}{9x^2+3xy+y^2}+\sqrt{y^2-2xy+x^2}-2x$$

    при $x=1,\underbrace{33...3}_{10}2$, $y=1,\underbrace{33...3}_{10}1$.

1.2. Сравнение чисел

Теоретический материал

В этом разделе собраны простейшие задачи на сравнение чисел. В большинстве случаев достаточно сгруппировать подходящим образом слагаемые и возвести обе части неравенства в нужную степень. При этом в четную степень можно возводить только неотрицательные величины.

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$.

Решение. Для того чтобы избавиться от квадратных корней, будем возводить в квадрат. Так как обе части исходного неравенства неотрицательны, то можем возвести их в квадрат:

$$5+2\sqrt{6}<10 \quad\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{6}<5.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим очевидное неравенство $24<25$. Следовательно, исходное неравенство также справедливо.

Пример 2. Выяснить, что больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[5]{5}$.

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{3} \vee \sqrt[5]{5}$$

и будем сводить его к очевидному неравенству с помощью алгебраических преобразований. Для того чтобы избавиться от радикалов, надо возвести обе части неравенства в пятнадцатую степень:

$$\begin{array}{ccc} \left(\sqrt[3]{3}\right)^{15} & \bigvee & \left(\sqrt[5]{5}\right)^{15} \\ 3^5 & \vee & 5^3 \\ 243 & > & 125. \end{array}$$

Поскольку не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, т. е. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}$.

Ответ. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{5}$.

Пример 3. (Экон-88.1) Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2}$ или 3?

Решение. Составим формальное неравенство

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} \vee 3$$

и будем работать с ним как с обычным, исключив преобразования, меняющие его знак. Возведем обе части неравенства $\sqrt[3]{4} \vee 3 - \sqrt{2}$ в куб:

$$\begin{array}{rcl} 4 & \vee & (3-\sqrt{2})^3 = 45 - 29\sqrt{2} \\ 29\sqrt{2} & \vee & 41. \end{array}$$

Теперь возведем обе части неравенства в квадрат и получим $1682 > 1681$; так как не было преобразований, меняющих знак неравенства, полученный знак соответствует исходному, т. е. $\sqrt[3]{4} + \sqrt{2} > 3$.

Ответ. Первое число больше.

Задачи

1. (ВМК-92.1) Какое из двух чисел больше: $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$?

2. (Геол-94(1).1) Какое из двух чисел меньше: $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?

3. (Геол-82.1) Какое из следующих чисел больше: $\sqrt{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} - 2\sin\dfrac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$?

4. Сравнить числа 3^{400} и 4^{300}.

5. Сравнить числа $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$.

6. Сравнить $\sqrt{2004}+\sqrt{2007}$ и $\sqrt{2005}+\sqrt{2006}$.

7. Сравнить числа $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\dfrac{11}{1000}$.

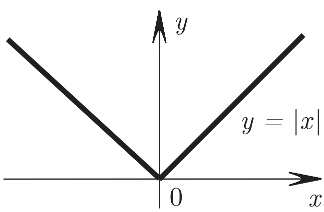
8. Выяснить, что больше: 33^{44} или 44^{33}.

9. Сравнить числа π и $\sqrt{10}$.

10. Сравнить числа $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{1/6}$ и $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/5}$.

1.3. Модуль числа и алгебраического выражения, уравнения и неравенства с модулем

Теоретический материал

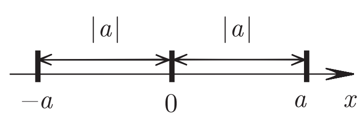


Определим *модуль* (абсолютную величину) вещественного числа x следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Функция $y = |x|$ является четной и неотрицательной на всей числовой оси.

Геометрическим смыслом модуля числа считается расстояние по числовой оси от начала отсчета до рассматриваемого числа, причем одному и тому же значению $|a|$ соответствуют две симметричные относительно начала отсчета точки: a и $-a$ соответственно.



Для преобразования выражений с модулями, а также для решения уравнений и неравенств, содержащих функции неизвестных величин под знаком модуля, рассматривают варианты раскрытия модулей в зависимости от знака подмодульного выражения. Например:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{8}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) > g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \tag{9}$$

$$|f(x)| < g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) < g(x), \\ f(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right. \tag{10}$$

В случае нестрогих неравенств с модулем неравенства равносильных систем также становятся нестрогими. Кроме того, принципиальной разницы в приписывании случая $f(x) = 0$ к любой из получаемых систем (или даже к обеим сразу) нет.

Иногда бывает удобно раскрывать модули через геометрический смысл. Например, при положительном a

$$|f(x)| = a \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = \pm a; \tag{11}$$

$$|f(x)| < a \quad \Longleftrightarrow \quad -a < f(x) < a; \tag{12}$$

$$|f(x)| > a \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{array} \right. \tag{13}$$

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Физ-95.3) Решить уравнение $2|x+1| = 2 - x$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$. Рассмотрим два случая.

1) При $x \geq -1$ исходное уравнение примет вид

$$2(x+1) = 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Так как найденный корень удовлетворяет условию $x \geq -1$, то $x = 0$ является решением исходного уравнения.

2) При $x < -1$ уравнение запишется в виде

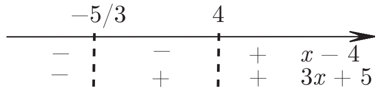
$$-2(x+1) = 2 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = -4.$$

Найденный корень удовлетворяет условию $x < -1$, следовательно, также является решением исходного уравнения.

О т в е т. -4; 0.

П р и м е р 2. (Экон-84.3) Решить неравенство $2|x-4| + |3x+5| \geq 16$.

Р е ш е н и е. Отметим нули подмодульных выражений на числовой прямой и проанализируем знаки подмодульных выражений.



1) При $x < -\dfrac{5}{3}$ оба подмодульных выражения отрицательны, следовательно,

$$\begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ -2(x-4) - (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -\dfrac{5}{3}, \\ x \leq -\dfrac{13}{5}; \end{cases} \iff x \in \left(-\infty; -\dfrac{13}{5}\right].$$

2) При $-\dfrac{5}{3} \leq x < 4$ исходное неравенство примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ -2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{5}{3} \leq x < 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \iff x \in [3; 4).$$

3) При $x \geq 4$ получим

$$\begin{cases} x \geq 4, \\ 2(x-4) + (3x+5) \geq 16; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 4, \\ x \geq \dfrac{19}{5}; \end{cases} \iff x \in [4; +\infty).$$

Объединив все три полученных промежутка, получим ответ.

Ответ. $\left(-\infty;\ -\dfrac{13}{5}\right] \bigcup [3; +\infty)$.

Пример 3. (Экон-89.3) Решить уравнение $||3-x| - x + 1| + x = 6$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $||x-3|-x+1| = 6-x$ и будем раскрывать модули, начиная с внутреннего.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ |x-3-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 3, \\ 2 = 6-x; \end{cases} \iff x = 4.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < 3, \\ |3-x-x+1| = 6-x; \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ |2x-4| = 6-x. \end{cases}$$

Так как при $x < 3$ всегда $6 - x > 0$, то дальше удобнее раскрывать модуль через геометрический смысл:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-4 = 6-x; \\ 2x-4 = x-6; \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{3}; \\ x = -2; \end{array}\right. \end{cases} \iff x = -2.$$

Ответ. -2; 4.

Задачи

1. (Хим-00.1) Решить уравнение $|x| = 2 - x$.

2. а) (Геол.ОГ-79.1) Решить уравнение $|2x - 3| = 3 - 2x$.
   б) (МШЭ-05.2) Решить уравнение $|2x - 4| + 4 = 2x$.

3. а) (Геогр-77.1) Решить неравенство $2|x + 1| > x + 4$.
   б) (ВМК(Б)-03.1) Решить неравенство $3\,|x + 2| - 4\,|x + 1| \geq 2$.

4. (Геогр-96(1).1) Решить уравнение $|5x - 3| - |7x - 4| = 2x - 1$.

5. (Биол-95.2) Решить уравнение $|x - 1| + |2x - 3| = 2$.

6. (Геогр-00.2) Решить уравнение $|2x + 8| - |x - 5| = 12$.

7. (Псих-95.1) Решить уравнение $|2x - 15| = 22 - |2x + 7|$.

8. (Псих-98.1) Решить уравнение $|4x - |x - 2| + 3| = 16$.

9. а) (Геогр-97.1) Решить неравенство $\dfrac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2$.
   б) (ФГУ-03.2) Решить неравенство $|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|$.
   в) (ВШБ-04.1) Решить неравенство $\dfrac{x + 1}{|x - 1|} \geq 1$.

10. (Хим-96(1).3) Решить неравенство $|x + |1 - x|| > 3$.

11. (Геол-91.6) При всех значениях параметра a решить уравнение:
    а) $|x + 2| + a|x - 4| = 6$; б) $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

12. а) (Физ-84.4) Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ принадлежат отрезку $[0; 4]$.
    б) (ВМК(Б)-01.3) При всех значениях параметра a решить неравенство $|2x + a| \leq x + 2$.

1.4. Квадратный трехчлен, разложение квадратного трехчлена на множители, квадратные уравнения и неравенства, теорема Виета

Теоретический материал

Квадратным трехчленом называется выражение вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — коэффициенты (постоянные числа), $a \neq 0$, x — переменная. Если $a = 1$, то квадратный трехчлен называется приведенным.

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *квадратным уравнением*.

Число $x_0 \in \mathbb{R}$ называется действительным *корнем квадратного трехчлена*, если $f(x_0) = 0$. Соответственно это же значение x_0 обращает квадратное уравнение в верное равенство, т. е. является корнем квадратного уравнения.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

По значению дискриминанта можно определить количество корней:

- при $D < 0$ квадратный трехчлен не имеет действительных корней;
- при $D = 0$ квадратный трехчлен имеет единственный корень $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (иногда говорят о наличии двух совпадающих корней);
- при $D > 0$ квадратный трехчлен имеет два корня, вычисляемых по формулам $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Замечание. В случае $b = 2p$, $p \in \mathbb{R}$, формулы корней можно упростить, используя понятие четного дискриминанта: $D_1 = p^2 - ac$. Тогда формулы для корней принимают вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D_1}}{a}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D_1}}{a}.$$

Разложение на линейные множители. Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то справедливо разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Замечание. В случае нулевого дискриминанта квадратный трехчлен преобразуется к виду $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — его корень.

Используя формулы корней квадратного трехчлена (в случае неотрицательного дискриминанта, т. е. при их наличии), можно установить связь между корнями и коэффициентами, которая нередко позволяет избежать непосредственного вычисления самих корней.

Теорема Виета. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 (может быть, совпадающих), то для них выполнены соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \tag{14}$$

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 являются решениями системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q, \end{cases} \tag{15}$$

то они же являются корнями приведенного квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.

Применяя формулы сокращенного умножения и соотношения из теоремы Виета, можно получить полезные выражения для вычисления различных комбинаций корней квадратного уравнения без непосредственного вычисления самих корней. Например:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}; \tag{16}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = -\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a}\right); \tag{17}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}\right)^2 - 2\frac{c^2}{a^2}. \tag{18}$$

Подобным образом можно выразить и многие другие комбинации корней через коэффициенты квадратного уравнения.

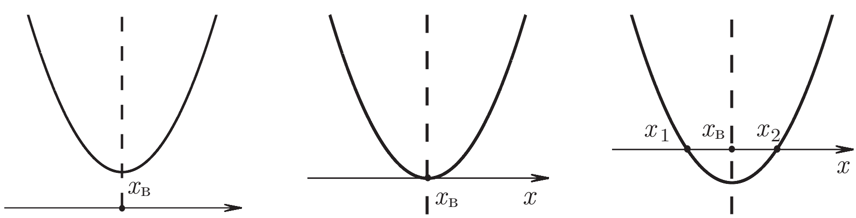
График квадратичной функции. Функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*. В силу представления

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

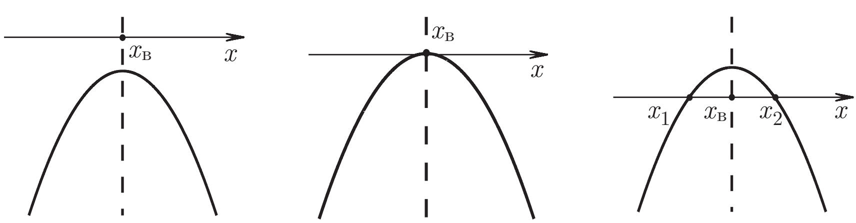
где $D = b^2 - 4ac$, можно говорить о том, что график квадратичной функции получается из графика степенной функции $y = x^2$ последовательными элементарными преобразованиями:

$$y = x^2 \;\to\; \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \;\to\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \;\to\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = f(x);$$

т. е. графиком квадратичной функции $f(x)$ является парабола с вершиной $(x_в; y_в)$, где $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, $y_в = -\dfrac{D}{4a}$. Вертикальная прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$ задает ее ось симметрии.



$a > 0;\ D < 0$ $\quad a > 0;\ D = 0$ $\quad a > 0;\ D > 0$



$a < 0;\ D < 0$ $\quad a < 0;\ D = 0$ $\quad a < 0;\ D > 0$

Ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Пересечение параболы с осью абсцисс обусловливается наличием корней у квадратного трехчлена, т. е. знаком его дискриминанта.

З а м е ч а н и е. Опираясь на знание расположения параболы на координатной плоскости, можно решать квадратные неравенства, избегая промежуточных преобразований. Например, для $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $D = b^2 - 4ac > 0$ и $a > 0$:

- $f(x) > 0$ при $x < x_1$ или $x > x_2$,
- $f(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$,

где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

Примеры решения задач

П р и м е р 1. (Геогр-80.1) Найти все значения параметра k, при которых уравнение $x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0$ имеет два различных решения.

Р е ш е н и е. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x и вычислим его дискриминант:

$$x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 1 = 0, \quad D_1 = k^2 - (k^2 + 2k - 1) = 1 - 2k.$$

Два различных решения у квадратного уравнения будут лишь при положительном дискриминанте: $1 - 2k > 0$, откуда $k < \frac{1}{2}$.

О т в е т. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

П р и м е р 2. (Экон.М-00.1) Решить уравнение $3|x+1| + x^2 + 4x - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Подмодульное выражение меняет знак в точке $x = -1$.

Первый случай:

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 3(x+1) + x^2 + 4x - 3 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 7x = 0; \end{cases} \iff x = 0.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} x < -1, \\ -3(x+1) + x^2 + 4x - 3 = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + x - 6 = 0; \end{cases} \iff x = -3.$$

О т в е т. -3; 0.

П р и м е р 3. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 5x - 4 = 0$. Найти $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

Р е ш е н и е. Дискриминант данного квадратного уравнения $D = 73$; следовательно, корни иррациональны и непосредственное вычисление выражения $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$ будет громоздким. В этом случае удобнее выразить искомую комбинацию корней через коэффициенты квадратного уравнения, используя теорему Виета.

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Развитие и широкое распространение компьютеров вызывают насущную потребность в высококвалифицированных специалистах в области прикладной математики, вычислительных методов и информатики. Сегодня наш факультет – один из основных факультетов Московского университета, ведущий учебный и научный центр России в области фундаментальных исследований и образования по прикладной математике, информатике и программированию.

Высокая квалификация преподавателей и сотрудников факультета, сочетание их глубокого теоретического и практического опыта являются залогом успешной работы наших выпускников в ведущих научных центрах, промышленных, коммерческих и других учреждениях.

Факультет не только учит студентов, но и ведет большую работу со школьниками и учителями:

- на факультете работают вечерняя математическая школа, подготовительные курсы и компьютерные курсы для школьников;
- для учителей есть курсы повышения квалификации и ежегодно проводятся летние школы по математике и информатике;
- сотрудники факультета и преподаватели других факультетов МГУ, работающие на подготовительных курсах факультета, готовят учебные и методические пособия по математике, информатике и физике как для школьников, так и для учителей.

Мы рады видеть новых студентов и приветствуем новых партнеров в научном сотрудничестве и инновационной деятельности.

Президент факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАН ***Е. И. Моисеев***

Сайт факультета ВМК МГУ:

http://www.cs.msu.ru