Оглавление

Предисловие

Предлагаемый читателю «Сборник задач по теории функций комплексного переменного» предназначен для студентов инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов, а также студентов университетов. При создании сборника авторы опирались на опыт преподавания ТФКП в Московском физико-техническом институте (государственном университете).

Сборник состоит из шести глав. В первой главе рассматриваются комплексные числа, последовательности и ряды комплексных чисел, комплекснозначные функции действительного и комплексного переменного, предел, непрерывность и интегрируемость функций комплексного переменного.

Во второй главе изучаются регулярные функции и их свойства, последовательности и ряды регулярных функций.

Третья глава посвящена изучению рядов Лорана, изолированных особых точек однозначного характера, вычислению интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов.

В четвертой главе речь идет о многозначных аналитических функциях. Большое внимание уделяется выделению регулярных ветвей многозначных функций, вычислению значений регулярных ветвей и их разложению в ряды Тейлора и Лорана. Исследуются аналитические продолжения и полные аналитические функции, а также их особые точки.

В пятой главе теория вычетов применяется для вычисления несобственных интегралов, а также для разложения мероморфных функций в ряды простейших дробей и в бесконечные произведения.

В шестой главе рассматриваются конформные отображения, их применение для решения краевых задач, а также элементы операционного исчисления.

«Сборник» составлен с таким расчетом, чтобы им можно было пользоваться при любом построении лекционного курса. С этой целью параграфы сделаны более или менее независимыми друг от друга. Все необходимые ссылки на задачи других разделов приводятся с указаниями.

Каждый параграф начинается с изложения необходимых теоретических сведений по тематике параграфа. Далее проведен разбор решений типичных задач. После этого помещены задачи. Все указания к решениям даны в основном тексте, а ответы приведены в конце каждого параграфа.

Значительная часть задач составлена авторами специально для «Сборника». Авторы также частично использовали материалы «Сборника задач по теории аналитических функций» под редакцией М. А. Евграфова, а также задачи, предлагавшиеся студентам МФТИ в контрольных работах по ТФКП.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры высшей математики МФТИ, многолетняя плодотворная работа которого в значительной степени способствовала появлению этого сборника.

Глава 1

Введение

§ 1. Комплексные числа

Справочные сведения

1. Определение комплексного числа. *Комплексные числа* — выражения вида $a+bi$ (a, b — действительные числа, i — некоторый символ). Равенство $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z, а запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называют *алгебраической формой комплексного числа.*

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называют *равными* и пишут $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Сложение и *умножение* комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ производится согласно формулам

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \tag{2}$$

Комплексное число вида $a + 0 \cdot i$ отождествляют с действительным числом a ($a+0\cdot i = a$), число вида $0+bi$ ($b \neq 0$) называют *чисто мнимым* и обозначают bi; i называют *мнимой единицей.* Действительное число a называют *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$ и пишут $\operatorname{Re} z = a$, число b называют *мнимой частью* z и пишут $\operatorname{Im} z = b$.

Из формулы (2) следует, что

$$i^2 = -1, \tag{3}$$

а формулы (1) и (2) получаются по правилам сложения и умножения двучленов $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ с учетом равенства (3).

Операции вычитания и деления определяются как обратные для сложения и умножения, а для разности $z_1 - z_2$ и частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ (при $z_2 \neq 0$) комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ имеют место формулы

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Сложение и умножение комплексных чисел обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3);$$
$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Множество комплексных чисел, в котором операции сложения и умножения определяются формулами (1) и (2), обозначается символом $\mathbb{C}$.

2. Модуль комплексного числа. Комплексно сопряженные числа. *Модулем комплексного числа* $z = a + bi$ (обозначается $|z|$) называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы равенства

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$
$$\text{если} \quad z_2 \neq 0, \quad \text{то} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\overline{z}$, т. е.

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Справедливы равенства

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 верны равенства:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2;$$
$$\text{если} \quad z_2 \neq 0, \quad \text{то} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

Частное от деления комплексных чисел можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0. \tag{4}$$

3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами (a, b), и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 1.1). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс (ее называют *действительной*

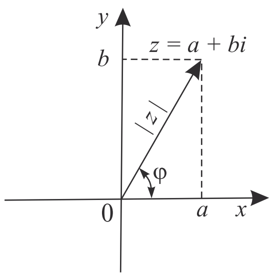

Рис. 1.1

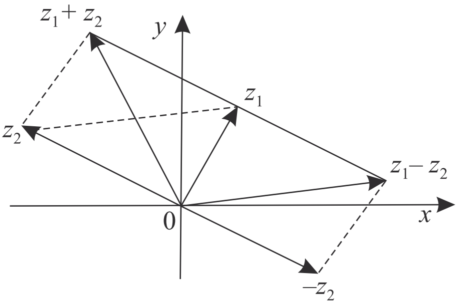

Рис. 1.2

осью), а чисто мнимые числа — точками оси ординат (ее называют *мнимой осью*). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью.*

Комплексному числу $z = a + bi$ можно сопоставить вектор с началом в точке O и концом в точке z (см. рис. 1.1). Этот вектор будем обозначать той же буквой z, его длина равна $|z|$.

Числу $z_1 + z_2$ соответствует вектор, построенный по правилу сложения векторов z_1 и z_2 (рис. 1.2), а вектор $z_1 - z_2$ можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$.

Расстояние между точками z_1 и z_2 равно длине вектора $z_1 - z_2$, т. е.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

где $z_1 = a_1 + b_1 i,\ \ z_2 = a_2 + b_2 i.$

Условию $|z - z_0| = R$, где z_0 — заданное комплексное число, $R > 0$, удовлетворяют точки, лежащие на окружности радиуса R с центром в точке z_0.

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливы неравенства

$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 \pm z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. *Аргументом комплексного числа* $z \neq 0$ называется угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором z (рис. 1.1). Этот угол считается положительным, если отсчет угла ведется против часовой стрелки, и отрицательным — при отсчете по часовой стрелке.

Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$ и его модулем $r = |z|$ и аргументом φ выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \end{cases} \tag{6}$$

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ можно найти, решив систему (6). Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, φ_0 — одно из решений системы (6), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Чтобы подчеркнуть зависимость угла φ_0 от точки z, будем использовать обозначение $\varphi_0 = \arg z$. Множество всех значений аргумента числа z будем обозначать $\operatorname{Arg} z$, т. е. $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Для нахождения аргумента комплексного числа $z = a + bi$ $(a \neq 0)$ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\,. \tag{7}$$

При нахождении аргумента комплексного числа z с помощью формулы (7) нужно обратить внимание на то, в какой четверти находится точка $z = a + bi$.

Из равенств (5) следует, что любое комплексное число $z = a + bi$, где $z \neq 0$, представляется в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{8}$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, φ — аргумент числа z. Запись комплексного числа z в виде (8), где $r > 0$, называют *тригонометрической формой комплексного числа.*

Комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. для любого φ функция $e^{i\varphi}$ определяется *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\pi i/2} = i$, $e^{-\pi i/2} = -i$ и $|e^{i\varphi}| = 1$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$.

Справедливы равенства

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{10}$$

$$e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{11}$$

формулу (11) называют *формулой Муавра.*

Из формул (8) и (9) следует, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \quad \text{где} \quad r = |z|, \quad \varphi \text{ — аргумент числа } z, \tag{12}$$

а из равенств (10) вытекает, что если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, где $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются; модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Если комплексные числа z_1 и z_2 записать в показательной форме, т. е. представить их в виде $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Извлечение корня. Рассмотрим уравнение

$$z^n = a, \tag{15}$$

где $a \neq 0$ — комплексное число, $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$, тогда

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta},$$

откуда

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{1}{n}\,(\theta + 2k\pi). \tag{16}$$

Таким образом, уравнение (15) имеет n различных корней

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\varphi_k}, \tag{17}$$

где φ_k определяется формулой (16), $k = 0, 1, \ldots, n-1$, θ — аргумент числа a.

На комплексной плоскости точки z_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в точке O.

Примеры с решениями

Пример 1. Выполнить действия:

1) $(2-i)^3$; 2) $\dfrac{(1+i)(1-2i)}{3+i}$.

△ 1) Используя формулу куба разности и равенства $i^2=-1$, $i^3=-i$, получаем: $(2-i)^3 = 8 - 3\cdot 4i + 3\cdot 2(-1) + i = 2 - 11i$.

2) Пусть $z_1 = (1+i)(1-2i)$, $z_2 = 3+i$. Тогда по формуле (2) находим $z_1 = 3-i$, а по формуле (4) получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-i}{3+i} = \frac{(3-i)^2}{10} = \frac{8-6i}{10} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\,i. \qquad ▲$$

Пример 2. Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

△ Используя свойства комплексно сопряженных чисел, получаем:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2}) = \\ &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) + (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) = \\ &= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned} \qquad ▲$$

Это равенство выражает тот факт, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Пример 3. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

1) $|z+1| = |z-i|$; 2) $2 < |z+2i| < 3$.

△ 1) Уравнению $|z+1| = |z-i|$ удовлетворяют все точки, равноудаленные от точек $z_1 = -1$ и $z_2 = i$. Это прямая $y = -x$ (биссектриса второго и четвертого координатных углов).

2) Условию $|z+2i| < 3$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 3 с центром в точке $z_0 = -2i$, а условию $|z+2i| > 2$ — все точки, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке z_0. Искомое множество точек — кольцо между окружностями радиусов 2 и 3 с общим центром в точке $z_0 = -2i$. ▲

Пример 4. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число:

1) $z_1 = -1-i$; 2) $z_2 = -\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

△ 1) Применяя формулу (7), получаем $\operatorname{tg}\varphi = 1$, откуда $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, так как точка $-1 - i$ лежит в третьей четверти. Так как $|z_1| = \sqrt{2}$, то $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$.

2) Так как точка z_2 лежит во второй четверти, то, используя формулы приведения, получаем

$$-\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}, \quad \sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5},$$

и поэтому

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = e^{i4\pi/5}. \qquad \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4}$.

△ Так как $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, то, применяя формулы (13) и (14), получаем:

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^6}{(1+i)^4} = \frac{2^6 e^{-2\pi i}}{(\sqrt{2})^4 e^{i\pi}} = -16. \qquad \blacktriangle$$

Пример 6. Найти все корни уравнения $z^6 = -8$.

△ Используя формулы (16) и (17), где $\theta = \pi$, $|a| = \rho = 8$, получаем:

$$z_k = \sqrt{2}e^{i(\pi+2k\pi)/6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

где

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i, \qquad z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/2} = \sqrt{2}i,$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i, \qquad z_3 = -z_0 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i,$$

$$z_4 = -z_1 = -\sqrt{2}i, \qquad z_5 = -z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i. \qquad \blacktriangle$$

Задачи

1. Вычислить:

1) $(1+2i)(2-i) + (1-2i)(2+i)$; 2) $\dfrac{5}{1+2i} + \dfrac{5}{2-i}$;

3) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; 4) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

2. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число z:

1) $z = 1 + i^{121}$; 2) $z = (-3+4i)^3$;

3) $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$; 4) $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

3. Найти все корни уравнения:

1) $\overline{z} = z^3$; 2) $|z| - z = 1 + 2i$;

3) $z + |z+1| + i = 0$; 4) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$.

4. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |z-2i| = z, \\ |z-i| = |z-1|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |z^2-2i| = 4, \\ |z+1+i| = |z-1-i|. \end{cases}$

5. Решить уравнение:

1) $z^2 = -i$; 2) $z^6 = 64$;

3) $z^7 = -1$; 4) $z^8 = 1 + i$.

6. Пусть $z = z_0$ — корень многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами. Доказать, что $P(\overline{z}_0) = 0$, т. е. $\overline{z}_0$ — корень многочлена $P(z)$.

7. Пусть z_1 и z_2 — фиксированные точки комплексной плоскости. Дать геометрическое описание множества всех точек z, удовлетворяющих уравнению:

1) $|z - z_1| = |z - z_2|$;

2) $|z - 1| = |\operatorname{Re} z|$;

3) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, где $a > \dfrac{1}{2}\,|z_2 - z_1|$;

4) $\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a$, где $a < \dfrac{1}{2}\,|z_2 - z_1|$.

8. Пусть Δ_1 — треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3, а Δ_2 — треугольник с вершинами w_1, w_2, w_3. Доказать, что треугольник Δ_1 подобен треугольнику Δ_2, если

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}\,.$$

9. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением:

1) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}$ $(a > 0)$; 2) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$;

3) $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$; 4) $\operatorname{Re}\dfrac{z-a}{z+a} = 0$ $(a > 0)$.

10. Выяснить, какое множество точек z комплексной плоскости удовлетворяет неравенству:

1) $|z - i| + |z + i| < 4$; 2) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{2}$;

3) $|z - 2| - |z + 2| < 2$; 4) $|1 + z| < |1 - z|$;

5) $0 < \arg\dfrac{i - z}{z + i} < \dfrac{\pi}{2}$; 6) $\operatorname{Re}(z(1-i)) < \sqrt{2}$;

7) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \dfrac{\pi}{2}$; 8) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$; 9) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

11. Пусть A и C действительные, а B — комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Доказать, что уравнение

$$A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \quad (A > 0),$$

является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и ее радиус.

12. Доказать, что уравнение окружности, проходящей через три данные точки z_1, z_2, z_3, не лежащие на одной прямой, можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \overline{z} & 1 \\ |z_1|^2 & z_1 & \overline{z}_1 & 1 \\ |z_2|^2 & z_2 & \overline{z}_2 & 1 \\ |z_3|^2 & z_3 & \overline{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Доказать, что при любом положительном значении K, отличном от 1, уравнение $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = K$ является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и ее радиус.

14. Доказать, что четыре попарно различные точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности (или на одной прямой) в том и только в том случае, когда величина $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \dfrac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$ действительна.

15. Пусть a — произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $\operatorname{Im} a > 0$. Доказать, что величина $\left|\dfrac{z - a}{z - \overline{a}}\right|$ в нижней полуплоскости больше единицы, в верхней полуплоскости меньше единицы, а на действительной оси — равна единице.

16. Пусть a — произвольное действительное число. Доказать, что если многочлен $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет n действительных корней, то и многочлен $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$ имеет n действительных корней.

17. Найти на отрезке, соединяющем точки z_1 и z_2, точку, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — положительные числа.

18. Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда величина $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ действительна.

19. Доказать, что точка ζ лежит на отрезке, соединяющем точки z_1 и z_2, в том и только в том случае, когда существует такое число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, что $\zeta = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2$.

20. Пусть в точках $z_1, \ldots, z_n$ комплексной плоскости помещены материальные точки с массами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, соответственно. Доказать, что центр тяжести такой системы материальных точек находится в точке $\zeta = \dfrac{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$.

21. Пусть точки z_1, z_2, z_3 лежат на окружности с центром в точке $z = 0$. Доказать, что треугольник с вершинами в точках z_1, z_2, z_3 является равносторонним в том и только в том случае, когда $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

22. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3, z_4, лежащие на одной окружности, являются вершинами прямоугольника в том и только в том случае, когда $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ (точки занумерованы в порядке следования при обходе окружности).

23. Даны три вершины z_1, z_2, z_3 параллелограмма, занумерованные в порядке следования по его границе. Найти четвертую вершину z_4 параллелограмма.

24. Доказать, что при любых $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\left|\sqrt{z^2-1}+z\right| + \left|\sqrt{z^2-1}-z\right| = |z-1| + |z+1|.$$

25. Доказать, что для любых $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

1) $|z_1\overline{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \bigl(|z_1|^2+1\bigr)\bigl(|z_2|^2+1\bigr)$;

2) $|z_1\overline{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \bigl(|z_1|^2-1\bigr)\bigl(|z_2|^2-1\bigr)$.

26. Доказать, что величина

$$A|\lambda|^2 + B\lambda\overline{\mu} + \overline{B}\,\overline{\lambda}\mu + C|\mu|^2$$

неотрицательна при любых $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$ в том и только в том случае, когда выполнены условия

$$A \geqslant 0, \quad C \geqslant 0, \quad |B|^2 \leqslant AC.$$

27. Доказать, что при любых $z_k \in \mathbb{C}$, $\zeta_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\zeta_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2$$

(*неравенство Коши—Буняковского—Шварца*).

28. Доказать, что при любых $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sqrt{n\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2}.$$

29. Пусть $0 < s' < s$. Доказать, что для любых $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^s\right\}^{1/s} \geqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^{s'}\right\}^{1/s'}.$$

30. Пусть $s > 0$. Доказать, что для любых отличных от нуля $z_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|z_1||z_2|\cdots|z_n|} \leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^s\right\}^{1/s}.$$

31. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольные комплексные числа. Доказать, что:

1) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|\right)^p \leqslant n^{p-1}\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|^p, \quad p \geqslant 1;$

2) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|\right)^p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|^p, \quad 0 < p \leqslant 1.$

32. Пусть $p > 1$, $q > 1$, а $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Доказать, что для любых $z_k \in \mathbb{C}$, $\zeta_k \in \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\zeta_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^q\right)^{1/q}$$

(*неравенство Гёльдера*).

Ответы

1. 1) 8. 2) $3 - i$. 3) i. 4) $\dfrac{22}{159} - \dfrac{5}{318}\,i$.

2. 1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2) $125(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 125e^{i3\varphi}$; $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$;

3) $2\cos\dfrac{\pi}{14}\left(\cos\dfrac{\pi}{14} + i\sin\dfrac{\pi}{14}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{14}\,e^{i\pi/14}$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,e^{i\pi/4}$.

3. 1) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$;

2) $z = \dfrac{3}{2} - 2i$; 3) $z = -1 - i$; 4) $z = 1 - i$.

4. 1) $z = 1 + i$; 2) $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -1 + i$.

5. 1) $z_1 = e^{-i\pi/4}$; $z_2 = e^{i3\pi/4}$;

2) $z_k = 2e^{i\pi k/6}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$;

3) $z_k = e^{i(2k+1)\pi/7}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;

4) $z_k = \sqrt[16]{2}e^{i(8k+1)\pi/32}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

7. 1) Прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2, перпендикулярная к этому отрезку.

2) Парабола, директрисой которой является мнимая ось, а фокусом — точка $z = 1$.

3) Эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 и с большой полуосью, равной a.

4) Гипербола с фокусами в точках z_1 и z_2 и с действительной полуосью, равной a.

9. 1) Окружность, построенная на отрезке $[0, a]$ как на диаметре.

2) Окружность радиуса 1 с центром в точке $z = 0$.

3) Действительная ось.

4) Окружность радиуса a с центром в точке $z = 0$.

10. 1) Внутренность эллипса $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

2) Внешность круга $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$.

3) Часть плоскости, лежащая справа от левой ветви гиперболы

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$

4) Полуплоскость, лежащая слева от мнимой оси.

5) Правая половина круга радиуса 1 с центром в точке $z=0$.

6) Полуплоскость, содержащая точку $z = 0$ и ограниченная касательной к окружности радиуса 1 и центром в нуле, проведенной в точке $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

7) Угол раствора $\dfrac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = -i$, стороны которого проходят через точки $z=1$, $z=0$.

8) Часть плоскости, лежащая с той же стороны параболы $y^2=1-2x$, что и точка $z=1$ (и ограниченная этой параболой).

9) Четыре угла раствора $\dfrac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z=0$, биссектрисами которых являются лучи $\arg z=-\dfrac{\pi}{16}+\pi k$, $k=0,1,2,3$.

Во всех случаях точки граничных линий не включаются.

11. Центр окружности в точке $-\dfrac{B}{A}$, а радиус равен $\sqrt{\dfrac{|B|^2-AC}{A^2}}$.

13. Центр окружности в точке $\dfrac{z_1-K^2z_2}{1-K^2}$, а радиус равен $\dfrac{K|z_1-z_2|}{1-K^2}$.

§ 2. Последовательности и ряды комплексных чисел. Комплекснозначные функции действительного переменного. Кривые и области на комплексной плоскости

Справочные сведения

1. Предел последовательности комплексных чисел

1.1. Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|z_n-z_0|<\varepsilon. \tag{1}$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$.

Исчерпывающий задачник по теории функций комплексного переменного, написанный авторами на основе многолетнего опыта преподавания этого предмета в Московском физико-техническом институте.

Каждый параграф сборника содержит необходимый теоретический материал, примеры с решениями, а также задачи для самостоятельной работы.

Содержание настоящего сборника задач тесно связано с курсом ТФКП, изложенным в учебнике М. Шабунина и Ю. Сидорова «Теория функций комплексного переменного».

Для студентов инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов, а также для студентов университетов.