# Содержание

# От авторов

В данном пособии приведены полные решения заданий с развёрнутым ответом для всех тестов с нечётными номерами (т.е. тестов №1, №3 и т.д.), а также решения всех заданий с нечётными номерами из Задачника книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ 2022. Профильный уровень». Кроме того, в Решебнике даны указания и краткие решения к задачам №16 (планиметрия) и №18 (олимпиадная тематика) тестов с чётными номерами.

Все решения написаны достаточно подробно, в стиле беседы с читателем. Отметим, что хотя на экзамене при оформлении решений требуется меньшая степень подробности, чем выбрана авторами, Вы можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов и стиль оформления решений, которые использованы в данной книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «значит», «таким образом», «так как ..., то...», помогут Вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого Вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. А это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного ВУЗа и специальности.

Желаем Вам успеха!

Авторы благодарят рецензентов за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

# Глава I

# Решения к тестам

*Десять страниц математики понятой лучше ста страниц, заученных на память, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчётливо, но пассивно.*

*Д. Юнг*

## Тест №1

**12.** а) Решите уравнение $\sin^3 x + \sin x = \sqrt{3}\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-3\pi; -\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Решение.

а) $\sin x(\sin^2 x + 1) = \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - 2)$, $\sin x(1 - \cos^2 x + 1) = \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - 2)$. Так как $\cos^2 x - 2 \neq 0$ при любом значении $x$, то сокращая обе части уравнения на $\cos^2 x - 2$, получаем равносильное уравнение: $-\sin x = \sqrt{3}\cos x$.

Заметим, что $\cos x \neq 0$ (если $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\sqrt{3}\cos x = 0$, но равенства $\cos x = \sin x = 0$ противоречат основному тригонометрическому тождеству). Поэтому разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим равносильное уравнение: $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, корнями которого являются $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

б) Произведём отбор корней, принадлежащих промежутку $\left(-3\pi; -\dfrac{\pi}{3}\right)$: $-3\pi < -\dfrac{\pi}{3} + \pi n < -\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{8\pi}{3} < \pi n < 0 \Leftrightarrow n = -1$ или $n = -2$. Таким образом, искомыми корнями являются $x = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{3}$ и $x = -\dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{4\pi}{3}$.

*Ответ:* а) $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}; -\dfrac{4\pi}{3}$.

**13.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина бокового ребра $AA_1$ равна 2. Шар с центром в точке $O$ касается всех граней этой призмы. Точки $M, N, K$ — середины рёбер $AB$, $A_1B_1$ и $CC_1$ соответственно, $P$ — точка пересечения прямой $NO$ с плоскостью основания $ABC$.

а) Докажите, что прямые $PK$ и $MO$ параллельны.

б) Найдите расстояние от точки $O$ до плоскости $APK$.

Решение.

а) Так как расстояния от точки $O$ до боковых граней $ABB_1A_1$ и $ACC_1A_1$ равны, то точка $O$ лежит в плоскости $\alpha$, которая делит пополам двугранный угол при ребре $AA_1$. Аналогично, точка $O$ лежит в плоскости $\gamma$, которая делит пополам двугранный угол при ребре $CC_1$. Поэтому точка $O$ лежит на прямой $HH_1$, где $H$ и $H_1$ — центры правильных треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$, см. рисунок 1. А в силу равноудалённости точки $O$ от граней $ABC$ и $A_1B_1C_1$ она является серединой отрезка $HH_1$. Заметим ещё, что длины отрезков $MH$ и $NH_1$ равны радиусу шара, вписанного в призму, т.е. $MH = NH_1 = 1$, откуда $CH = C_1H_1 = 2$.

рис. 1

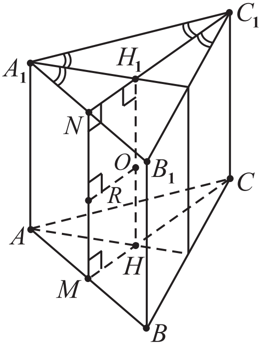
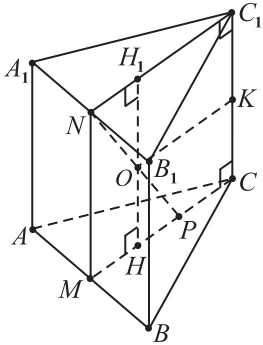



рис. 2




Точки $O$ и $K$ — середины сторон $HH_1$ и $CC_1$ прямоугольника $HCC_1H_1$, поэтому отрезок $OK$ параллелен $CM$ и $OK = CH = 2$. Прямоугольные треугольники $HPO$ и $H_1NO$ равны: $HO = H_1O, \angle HOP = \angle H_1ON$ — как вертикальные углы. Значит, $PH = NH_1 = 1$, откуда $PM = PH + MH = 2$.

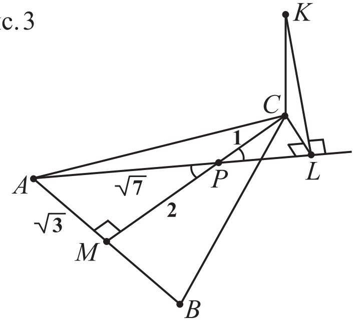
Итак, нами получено, что отрезки $OK$ и $PM$ параллельны и равны, откуда следует, что $MOKP$ — параллелограмм и, значит, $MO \| PK$, что и требовалось доказать.

б) Искомое расстояние от точки $O$ до плоскости $APK$ обозначим через $d$ и для его нахождения применим метод вспомогательного объёма:

вычисляя объём $V$ пирамиды сначала как объём пирамиды с вершиной $O$ и основанием $APK$, а затем как объём пирамиды с вершиной $A$ и основанием $OPK$, имеем: $d \cdot S_{APK} = 3V = h \cdot S_{OPK}$, где $h$ — расстояние от точки $A$ до плоскости $OPK$, $S_{APK}, S_{OPK}$ — площади оснований $APK$ и $OPK$.

Заметим, что поскольку точки $O, P, K$ лежат в плоскости $CC_1NM$ и эта плоскость перпендикулярна ребру $AB$, то расстояние от точки $A$ до плоскости $OPK$ равно $h = AM = \dfrac{CM}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Поскольку точка $P$ лежит на стороне прямоугольника $OKCH$, то высота треугольника $OPK$ равна $CK$, откуда $S_{OPK} = \dfrac{1}{2} OK \cdot CK = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Таким образом, $d \cdot S_{APK} = 3V = h \cdot S_{OPK} = \sqrt{3}$, откуда $d = \dfrac{\sqrt{3}}{S_{APK}}$.

рис. 3




Чтобы найти площадь треугольника $APK$, найдём длину его высоты $KL$. По теореме о трёх перпендикулярах $CL \perp AL$, см. рисунок 3. Прямоугольные треугольники $AMP$ и $CLP$ подобны и, значит, $\dfrac{CL}{AM} = \dfrac{CP}{AP}$, $CL = AM \cdot \dfrac{CP}{AP} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ($AP = \sqrt{7}$ по теореме Пифагора из $\triangle AMP$). Итак, $KL^2 = CK^2 + CL^2 = 1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \dfrac{10}{7}$, $KL = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}}$,

$$S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$
$$d = \frac{\sqrt{3}}{S_{APK}} = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

*Ответ:* $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

**14.** Решите неравенство

$$\log_{0,2}(21-21x) \leqslant \log_{0,2}(x^2-3x+2)+\log_{0,2}(x+8).$$

Решение.

Запишем данное в условии неравенство в виде:

$$\log_{0,2}\big(21(1-x)\big) \leqslant \log_{0,2}\big((1-x)(2-x)\big)+\log_{0,2}(x+8).$$

Областью определения неравенства являются такие значения $x$, для которых выполнено $-8<x<1$. Преобразуем полученное неравенство:

$$\log_{0,2}21+\log_{0,2}(1-x) \leqslant \log_{0,2}(1-x)+\log_{0,2}(2-x)+\log_{0,2}(x+8),$$

$\log_{0,2}21 \leqslant \log_{0,2}(2-x)+\log_{0,2}(x+8)$, $\log_{0,2}21 \leqslant \log_{0,2}\big((2-x)(x+8)\big)$. На своей области определения неравенство принимает вид: $21 \geqslant (2-x)(x+8)$, $21 \geqslant -x^2-6x+16$, $x^2+6x+5 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant -5$ и $x \geqslant -1$. Учитывая, что $-8<x<1$, получаем: $(-8;-5]\cup[-1;1)$.

*Ответ:* $(-8;-5]\cup[-1;1)$

**15.** В июле 2021 года был взят кредит на пять лет в размере 550 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2022, 2023, 2024 годов долг остаётся равным 550 тыс. рублей;
— выплаты в 2025 и 2026 годах равны;
— к июлю 2026 года долг будет выплачен полностью.

Найдите $r$, если известно, что после того, как долг будет выплачен полностью, общий размер выплат составит 1050 тыс. рублей.

Решение.

Введём обозначение $k=\dfrac{r}{100}$, тогда в январе 2022, 2023 и 2024 годов после начисления $r\%$ долг составляет $550(k+1)$ тыс. руб., поэтому выплаты за эти три года равны $3\cdot\big(550(k+1)-550\big)=1650k$ тыс. руб.

Пусть $x$ тыс. руб.— выплаты в 2025 и 2026 годах. Тогда в июле 2025 года долг перед банком составляет $550(k+1)-x$, а после начисления процентов в январе 2026 года долг составляет $\big(550(k+1)-x\big)\cdot(1+k)$. Так как после выплаты $x$ тыс. руб. в 2026 году долг становится равным нулю, то $\big(550(k+1)-x\big)\cdot(1+k)=x$. Выразим из этого равенства $x$ через $k$: $550(k+1)^2 = (2+k)x$, $x = \dfrac{550(k+1)^2}{2+k}$.

Выплаты банку за все 5 лет равны $1650k + 2x = 1650k + \dfrac{1100(k+1)^2}{2+k}$, что по условию составляет 1050 тыс.руб. Таким образом, имеем уравнение: $1650k + \dfrac{1100(k+1)^2}{2+k} = 1050$, $33k + \dfrac{22(k+1)^2}{2+k} = 21$,
$66k + 33k^2 + 22k^2 + 44k + 22 = (2+k)\cdot 21$, $55k^2 + 89k - 20 = 0$, откуда $k = \dfrac{1}{5}$, $r = 100 \cdot k = 20$ (второй корень $k = -\dfrac{20}{11}$ не удовлетворяет смыслу задачи).

*Ответ:* $r = 20$

**16.** Треугольник $ABC$ прямоугольный с прямым углом $C$. Продолжение биссектрисы $CK$ этого треугольника пересекает его описанную окружность в точке $L$. Прямая, проходящая через точку $L$ и середину гипотенузы $AB$, пересекает вторично описанную окружность треугольника $ABC$ в точке $M$ и пересекает катет $BC$ в точке $P$.

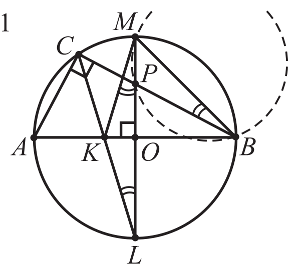
а) Докажите, что прямая $MK$ является касательной к описанной окружности треугольника $BMP$.

б) Найдите площадь треугольника $MKP$, если $AC = 3$, $BC = 4$.

Решение.

а) Поскольку $CL$ — биссектриса угла $ACB$, то хорды $AL$ и $BL$ стягивают равные дуги и, значит, $AL = BL$. Пусть $O$ — середина гипотенузы $AB$, тогда $O$ — центр описанной окружности $\triangle ABC$, а поскольку $AL = BL$, то диаметр $LM$ перпендикулярен диаметру $AB$, см. рисунок 1.

рис. 1




Прямоугольные треугольники $MOK$ и $LOK$ равны по двум катетам ($MO = LO$, $OK$ — общий катет), поэтому $\angle KML = \angle MLK$. Заметим, что поскольку углы $MLC$ и $MBC$ опираются на одну и ту же дугу, то они равны и, значит, $\angle KML = \angle MLC = \angle MBC$. Осталось лишь заметить, что из равенства $\angle KMP = \angle MBP$ следует, что прямая $KM$ совпадает с касательной к описанной окружности $\triangle BMP$. В самом деле, по известному свойству угол между хордой $MP$ и касательной в точке $M$ равен половине дуги, стягиваемой хордой $MP$ и, значит, равен $\angle MBP$. Поэтому из равенства $\angle KMP = \angle MBP$ следует, что прямая $KM$ образует с хордой $MP$ тот же угол, что и касательная в точке $M$, т.е. $KM$ совпадает с касательной, что и требовалось доказать.

б) Так как $KO \perp ML$, то для искомой площади $\triangle MKP$ имеем:

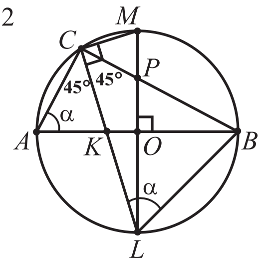
$$S_{MKP} = \frac{1}{2} KO \cdot MP.$$

Найдём $KO$: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$, $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{4}$ (по свойству биссектрисы) $\Rightarrow$ $AK = \dfrac{3}{7} AB = \dfrac{15}{7}$, $KO = AO - AK = \dfrac{5}{2} - \dfrac{15}{7} = \dfrac{5}{14}$.

Теперь найдём $MP$. Так как $ML$ — диаметр, то $\angle MCL = 90^\circ$, а поскольку $\angle BCL = 45^\circ$, то $\angle MCP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, см. рисунок 2. Значит, $CP$ — биссектриса треугольника $MCL$, и поэтому

$$\frac{MP}{LP} = \frac{CM}{CL} = \operatorname{tg} \angle MLC.$$

рис. 2




Заметим, что поскольку $AB$ и $ML$ — перпендикулярные диаметры, то дуга $BM$ равна $90^\circ$, отсюда $\angle BLM = \dfrac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$, $\angle MLC = \angle BLC - \angle BLM = \alpha - 45^\circ$. Завершим вычисления, воспользовавшись формулой тангенса разности: $\dfrac{MP}{LP} = \operatorname{tg} \angle MLC = \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \dfrac{4/3 - 1}{1 + 4/3} = \dfrac{1/3}{7/3} = \dfrac{1}{7}$; $\dfrac{MP}{LP} = \dfrac{1}{7}$; $MP = \dfrac{1}{8} \cdot ML = \dfrac{5}{8}$. Итак,

$$S_{MKP} = \frac{1}{2} KO \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{224}.$$

*Ответ:* $\dfrac{25}{224}$

**17.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\dfrac{x^2-2x+a}{21x^2-10ax+a^2}=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение.

Данное в условии уравнение равносильно системе:

$$(*)\ \begin{cases} x^2-2x+a=0 \\ 21x^2-10ax+a^2\neq 0. \end{cases}$$

Уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня $\Leftrightarrow$ дискриминант $D=4-4a$ положителен $\Leftrightarrow$ $a<1$.

Так как $21x^2-10ax+a^2=(3x-a)(7x-a)$, то при любых значениях $a$ корнями уравнения $21x^2-10ax+a^2=0$ являются $x=\dfrac{a}{3}$ и $x=\dfrac{a}{7}$.

Система $(*)$ имеет ровно два различных решения $\Leftrightarrow$ уравнение $x^2-2x+a=0$ имеет два различных корня и эти корни не совпадают с $x=\dfrac{a}{3}$ и $x=\dfrac{a}{7}$. Поэтому для получения ответа в задаче нужно из промежутка $(-\infty;1)$ исключить те значения $a$, для которых $x=\dfrac{a}{3}$ или $x=\dfrac{a}{7}$ является корнем уравнения $x^2-2x+a=0$.

Подставим поочерёдно $x=\dfrac{a}{3}$ и $x=\dfrac{a}{7}$ в уравнение $x^2-2x+a=0$:

$\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2a}{3}+a=0,\ a^2+3a=0,\ a(a+3)=0,\ a=0$ или $a=-3$;

$\dfrac{a^2}{49}-\dfrac{2a}{7}+a=0,\ a^2+35a=0,\ a(a+35)=0,\ a=0$ или $a=-35$.

Исключая из промежутка $(-\infty;1)$ значения $a=0$, $a=-3$ и $a=-35$, получаем ответ.

*Ответ:* $a\in(-\infty;-35)\cup(-35;-3)\cup(-3;0)\cup(0;1)$

**18.** На доске написано $11$ различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно $6$, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно $16$.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться $4$?

б) Может ли среднее арифметическое всех $11$ написанных на доске чисел равняться $12$?

в) Пусть $N$ – шестое по величине число, а $S$ – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S-N$.

Решение.

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{11}$ – одиннадцать натуральных чисел, написанных на доске. Тогда из условия задачи имеем: $\dfrac{x_1 + \ldots + x_6}{6} = 6$, $\dfrac{x_6 + \ldots + x_{11}}{6} = 16$, или $x_1 + \ldots + x_6 = 36$, $x_6 + \ldots + x_{11} = 96$.

а) Если бы наименьшее из чисел $x_1$ равнялось бы 4, то $x_2 \geqslant 5$, $x_3 \geqslant 6$, $x_4 \geqslant 7$, $x_5 \geqslant 8$, $x_6 \geqslant 9$, и, значит, $x_1 + \ldots + x_6 \geqslant 4+5+6+7+8+9 = 39$. Но это противоречит равенству $x_1 + \ldots + x_6 = 36$, поэтому $x_1 \neq 4$, т.е. ответ в пункте а) – нет.

б) Если бы среднее арифметическое всех 11 чисел равнялось 12, то $x_1 + \ldots + x_{11} = 11 \cdot 12 = 132$. Но сложив равенства $x_1 + \ldots + x_6 = 36$ и $x_6 + \ldots + x_{11} = 96$, мы получаем, что $(x_1 + \ldots + x_{11}) + x_6 = 132$, и подставляя в это равенство $x_1 + \ldots + x_{11} = 132$, приходим к тому, что $x_6 = 0$ – противоречие с тем, что $x_6$ – натуральное число. Поэтому ответ в пункте б) – нет.

в) Если $S$ – среднее арифметическое всех 11 чисел, а $x_6 = N$, то выполняя подстановки $x_1 + \ldots + x_{11} = 11S$ и $x_6 = N$ в равенство $(x_1 + \ldots + x_{11}) + x_6 = 132$, имеем: $11S + N = 132 \Rightarrow S - N = 12S - 132$. Отсюда видим, что $S - N$ тем больше, чем больше $S$.

Заметим, что $N = x_6 \geqslant 9$. В самом деле, если $x_6 \leqslant 8$, то

$$x_1 + \ldots + x_6 \leqslant 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 33,$$

а это противоречит равенству $x_1 + \ldots + x_6 = 36$.

Так как $N \geqslant 9$, то $11S = 132 - N \leqslant 123$, $S \leqslant \dfrac{123}{11}$, $S - N \leqslant \dfrac{123}{11} - 9 = \dfrac{24}{11}$. Остаётся лишь заметить, что поскольку при $N = 9$ все знаки неравенств обращаются в равенство, то для доказательства достижимости равенства $S - N = \dfrac{24}{11}$ достаточно привести пример таких натуральных чисел $x_1 < \ldots < x_5 < 9 < x_7 < \ldots < x_{11}$, что $x_1 + \ldots + x_5 + 9 = 36$, $9 + x_7 + \ldots + x_{11} = 96$. Подходят, например, $x_5 = 8$, $x_4 = 7$, $x_3 = 6$, $x_2 = 5$, $x_1 = 1$, и $x_7 = 10$, $x_8 = 11$, $x_9 = 12$, $x_{10} = 13$, $x_{11} = 41$.

Так как $S - N \leqslant \dfrac{24}{11}$ и для указанного выше набора чисел $x_1, \ldots, x_{11}$ выполняется равенство $S - N = \dfrac{24}{11}$, то наибольшее возможное значение $S - N$ равно $\dfrac{24}{11}$.

*Ответ:* а) нет; б) нет; в) $\dfrac{24}{11}$.