Содержание

От авторов

Данная книга состоит из четырёх параграфов. В § 1 содержатся решения заданий второй части тестов с нечётными номерами книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2022». В § 2 приведены решения всех задач с нечётными номерами из задачника этой книги. А в § 3 и § 4 даны краткие решения и указания к некоторым из заданий 24 и 25 тестов с чётными номерами (краткие решения и указания даны лишь к тем заданиям тестов с чётными номерами, которые существенно отличаются от соответствующей задачи предшествующего теста с нечётным номером).

Основная цель данного пособия — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по математике. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Хотя на экзамене при оформлении решений достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «таким образом», «так как..., то...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении – вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем вам успехов!

сюда получаем, что $AH=\dfrac{AC_1\cdot AB}{AA_1}$. Поэтому для нахождения AH нам достаточно вычислить $AC_1\cdot AB$.

Пусть K– точка пересечения луча AM с окружностью, построенной на BC, как на диаметре. По известному свойству секущих окружности имеем: $AC_1\cdot AB=AM\cdot AK$. Заметим, что $AM=AA_1-MA_1=6$, $AK=AA_1+A_1K=AA_1+A_1M=54$ (отрезки A_1K и A_1M равны, т.к. отрезок BA_1 перпендикулярен хорде MK и проходит через центр окружности).

Таким образом, $AH=\dfrac{AC_1\cdot AB}{AA_1}=\dfrac{AM\cdot AK}{AA_1}=\dfrac{6\cdot 54}{30}=\dfrac{54}{5}=10{,}8$.

Ответ: 10,8

Тест № 3

20 Решите уравнение $(x-6)\cdot(x^2-6x+9)=4\cdot|x-3|$.

Решение.

Заметим, что $x^2-6x+9=(x-3)^2$. Уравнение $(x-6)\cdot(x-3)^2=4\cdot|x-3|$ одним из своих корней имеет $x=3$. Сокращая обе части этого уравнения на $|x-3|$, получаем равносильное ему при $x\neq 3$ уравнение

$$(x-6)\cdot|x-3|=4.$$

Раскрывая в этом уравнении знак модуля, имеем:

1) при $x\leqslant 3:$ $(x-6)\cdot(-x+3)=4$, $-x^2+9x-18=4$, $x^2-9x+22=0$ — корней нет (дискриминант отрицателен);
2) при $x>3:$ $(x-6)\cdot(x-3)=4$, $x^2-9x+18=4$, $x^2-9x+14=0$ — корни $x=2$ или $x=7$, но условию снятия модуля $(x>3)$ удовлетворяет лишь $x=7$.

Таким образом, корнями исходного уравнения являются $x=3$ и $x=7$.

21 Две машины едут по асфальтированной дороге одна за другой со скоростью 90 км/ч, сохраняя дистанцию 48 метров. Когда машины сворачивают на грунтовую дорогу, их скорость резко падает до 60 км/ч. Каким будет расстояние между машинами, когда обе они окажутся на грунтовой дороге? Ответ дайте в метрах.

Решение.

Когда первая из машин свернёт на грунтовую дорогу, вторая будет в 48 метрах от грунтовой дороги. Эти 48 метров вторая машина проедет за время, равное $\dfrac{0{,}048\,\text{км}}{90\,\text{км/ч}}=\dfrac{0{,}048}{90}$ ч. А первая машина, двигаясь по грунтовой дороге со скоростью 60 км/ч, за это время успеет проехать

$$\frac{0{,}048}{90}\text{ ч}\cdot 60\text{ км/ч} = 0{,}048\cdot\frac{2}{3}\text{ км} = 0{,}032\text{ км} \text{ или } 32\text{ м}.$$

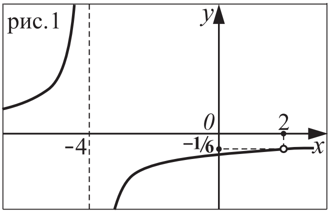
Таким образом, к моменту поворота на грунтовую дорогу второй машины расстояние между машинами будет 32 м.

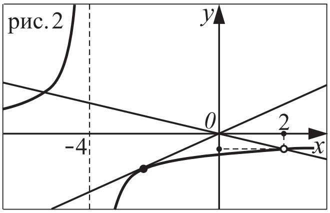
Ответ: 32

22 Постройте график функции $y = \dfrac{2-x}{x^2+2x-8}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Корнями квадратного трёхчлена x^2+2x-8 являются $x=2$ и $x=-4$, значит, $x^2+2x-8=(x-2)\cdot(x+4)$. Поэтому данную в условии функцию можно записать в виде: $y = \dfrac{-(x-2)}{(x-2)\cdot(x+4)}$. При $x=2$ это выражение не определено, если же $x\neq 2$, то сокращая числитель и знаменатель на $x-2$, получаем, что график нашей функции совпадает с графиком $y=-\dfrac{1}{x+4}$. Итак, графиком данной в условии функции является гипербола $y=-\dfrac{1}{x+4}$ с выколотой точкой $x=2$, $y=-\dfrac{1}{6}$, см. рис. 1 (гипербола $y=-\dfrac{1}{x+4}$ получается из гиперболы $y=-\dfrac{1}{x}$ смещением вдоль оси Ox на 4 единицы влево).





Легко видеть, см. рис. 2, что прямая $y=kx$ имеет с данным графиком ровно одну общую точку лишь в следующих двух случаях:

1) прямая $y=kx$ проходит через выколотую точку $x=2$, $y=-\dfrac{1}{6}$;
2) прямая $y=kx$ является касательной к той части графика, которая расположена правее прямой $x=-4$.

Найдём соответствующие этим случаям значения k.

1) Угловой коэффициент прямой $y = kx$, проходящей через начало координат и точку $\left(2; -\dfrac{1}{6}\right)$, равен $k = \dfrac{-1/6 - 0}{2 - 0} = -\dfrac{1}{12}$.

2) Прямая $y = kx$ является касательной к графику $y = -\dfrac{1}{x+4}$ в том случае, если уравнение $kx = -\dfrac{1}{x+4}$ имеет ровно один корень $\Leftrightarrow$ уравнение $kx(x+4) = -1$ имеет единственный корень $\Leftrightarrow$ дискриминант трёхчлена $kx^2 + 4kx + 1$ $(k \neq 0)$ равен нулю $\Leftrightarrow$ $16k^2 - 4k = 0,\ k \neq 0,$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $k = \dfrac{1}{4}$.

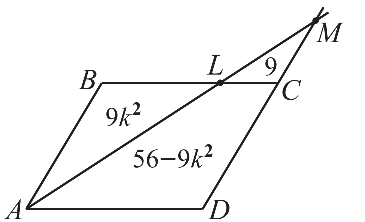
Итак, искомыми являются $k = -\dfrac{1}{12}$ и $k = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{4}$

23 Из вершины A параллелограмма $ABCD$ проведён луч, который пересекает сторону BC в точке L и луч DC в точке M. Найдите отношение $BL : CL$, если известно, что площадь треугольника MCL равна 9, а площадь параллелограмма $ABCD$ равна 56.

Решение.

Пусть $BL : CL = k$. Так как треугольник ABL подобен треугольнику MCL с коэффициентом подобия, равным k, а площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то площадь треугольника ABL равна $S_{ABL} = 9k^2$ (площадь $\triangle MCL$ по условию равна 9). Поскольку площадь параллелограмма $ABCD$ равна 56, то площадь четырёхугольника $ALCD$ равна $56 - 9k^2$, а площадь треугольника AMD равна $S_{AMD} = 56 - 9k^2 + 9 = 65 - 9k^2$, см. рисунок.



С другой стороны, треугольник AMD подобен треугольнику LMC с коэффициентом подобия, равным $\dfrac{AD}{CL} = \dfrac{BL + CL}{CL} = \dfrac{BL}{CL} + 1 = k + 1$, и, значит, $S_{AMD} = 9(k+1)^2$. Таким образом, имеем уравнение:

$$9(k+1)^2 = 65 - 9k^2,\ 18k^2 + 18k - 56 = 0,\ 9k^2 + 9k - 28 = 0.$$

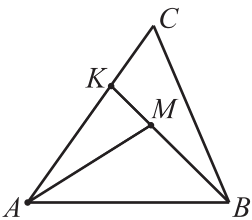
Положительным корнем этого уравнения является $k = \dfrac{4}{3}$.

Ответ: 4 : 3

$\boxed{\mathbf{24}}$ Внутри треугольника ABC выбрана произвольно точка M. Докажите, что $AM + BM < AC + BC$.

Решение.

Пусть K — точка пересечения прямой BM со стороной AC, см. данный ниже рисунок. Тогда по неравенству треугольника $AM < AK + KM$. Прибавив к обеим частям этого неравенства длину BM, получим: $AM + BM < AK + KM + BM$. Отсюда, заменяя сумму $KM + BM$ длиной отрезка BK, получаем, что $AM + BM < AK + BK$.



Из $\triangle BKC$ по неравенству треугольника имеем: $BK < CK + BC$.

Из неравенств $AM + BM < AK + BK$ и $BK < CK + BC$ следует, что $AM + BM < AK + CK + BC$, а учитывая, что $AK + CK = AC$, получаем требуемое неравенство: $AM + BM < AC + BC$.

$\boxed{\mathbf{25}}$ Две окружности, расстояние между центрами которых равно 21, а радиусы равны 13 и 20, пересекаются в точках P и Q. На меньшей из этих окружностей взята точка L так, что прямая LQ касается большей окружности. Найдите площадь треугольника LPQ.

Решение.

1) Найдём длину отрезка PQ. Пусть O_1 – центр меньшей окружности, O_2 – центр большей, H – точка пересечения прямых PQ и O_1O_2, см. рис. 1. Тогда, $PH \perp O_1O_2$ и H – середина отрезка PQ — в силу симметричности точек P и Q относительно линии O_1O_2.

Пусть $O_1H = x$, тогда $O_2H = 21 - x$ (т.к. по условию $O_1O_2 = 21$). Из треугольников PHO_1 и PHO_2 по теореме Пифагора имеем:

$$PH^2 = O_1P^2 - O_1H^2 = 169 - x^2,$$
$$PH^2 = O_2P^2 - O_2H^2 = 400 - (21 - x)^2 = 42x - x^2 - 41.$$

Таким образом, $169 - x^2 = 42x - x^2 - 41$, $42x = 210$, $x = 5$. Подставляя $x = 5$ в равенство $PH^2 = 169 - x^2$, получаем, что $PH^2 = 144$, $PH = 12$. Значит, $PQ = 2PH = 24$.

рис. 1

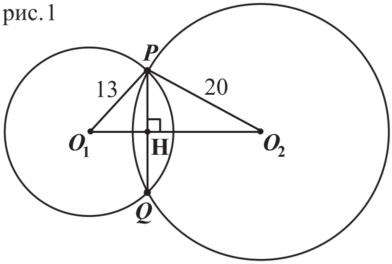
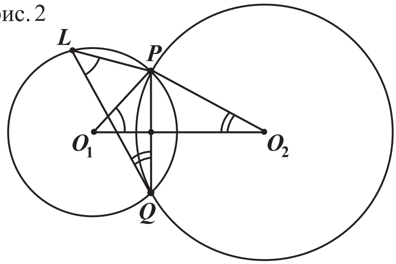


рис. 2



2) Покажем, что треугольники LPQ и O_1PO_2 подобны, см. рис. 2.

$\angle PLQ = \frac{1}{2}\angle PO_1Q$ – вписанный угол PLQ опирается на ту же дугу, которую стягивает центральный угол PO_1Q.

$\angle PO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle PO_1Q$ – в силу симметричности точек P и Q относительно прямой O_1O_2.

Из двух предыдущих равенств следует, что $\angle PLQ = \angle PO_1O_2$.

$\angle LQP = \frac{1}{2}\angle PO_2Q$ – угол LQP, как угол между касательной и хордой, равен половине дуги большей окружности, которую стягивает центральный угол PO_2Q.

$\angle PO_2O_1 = \frac{1}{2}\angle PO_2Q$ – в силу симметричности точек P и Q относительно прямой O_1O_2.

Из двух предыдущих равенств следует, что $\angle LQP = \angle PO_2O_1$.

Таким образом, треугольники LPQ и O_1PO_2 действительно подобны (по двум равным углам).

3) Площадь $\triangle O_1PO_2$ равна $S_{O_1PO_2} = \frac{1}{2}PH \cdot O_1O_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 21 = 126$. Искомую площадь $\triangle LPQ$ найдём по формуле $S_{LPQ} = k^2 \cdot S_{O_1PO_2}$, где k – коэффициент подобия треугольников LPQ и O_1PO_2. Имеем:

$k = \dfrac{PQ}{PO_2} = \dfrac{24}{20} = \dfrac{6}{5}$, $S_{LPQ} = \dfrac{6^2}{5^2} \cdot 126 = \dfrac{4536}{25}$.

Ответ: $\dfrac{4536}{25}$