Раздел
1
ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. КОРЕНЬ СТЕПЕНИ *n*

1.1.1. Понятие корня степени *n*

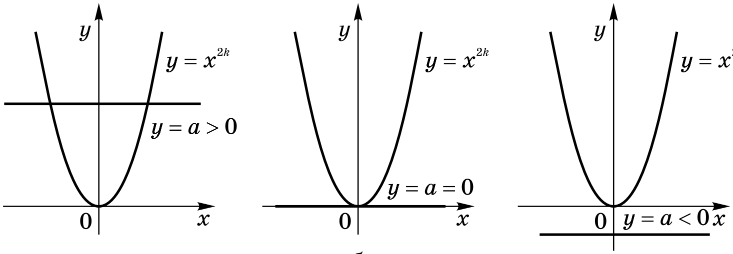
Корнем степени *n* из числа *a* называется такое число, *n*-я степень которого равна *a*; *a* — действительное число.

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку 23 = 8; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или -2, поскольку 24 = 16 и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

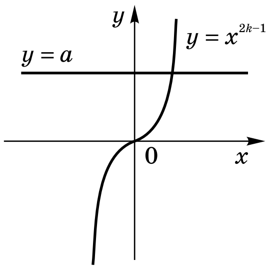
Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2^{k-1}$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



а *б* *в*

Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.



Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа а обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n, коротко говорят «корень степени n» или «корень n-й степени».

П р и м е р 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$\sqrt[2k]{a} = x$, $a > 0$, $x \in N$.

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in N$.

П р и м е р 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$;

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0, \text{ где } k \in N. \end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in N$.

Пример 3. Найдите арифметический корень $\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \geq b$; б) $a < b$.

Решение.

$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a - b|$.

а) если $a \geq b$, то $a - b \geq 0$ и $|a - b| = a - b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a - b$;

б) если $a < b$, то $a - b < 0$ и $|a - b| = -(a - b) = b - a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b - a$.

1.1.2. Свойства корня степени *n*

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\textbf{если } a \geq 0,\ b \geq 0, \textbf{ то } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \textbf{ где } a \geq 0,\ b \geq 0.$$

П р и м е р 1 . Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027 \cdot 125} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{125} = 0,3 \cdot 5 = 1{,}5$;

б) $\sqrt[4]{256 \cdot 0,0081} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{0,0081} = 4 \cdot 0,3 = 1{,}2$.

П р и м е р 2 . Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000} = 10$;

б) $\sqrt[4]{324} \cdot \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{324 \cdot 4} = \sqrt[4]{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{\left(2 \cdot 3^2\right)^2 \cdot 2^2} =$

$= \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^4} = 6$.

П р и м е р 3 . Упростите выражение:

$\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2$.

Решение.

$$\left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}\right)^2 + 2\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}\right)^2 =$$

$$= 7 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{7^2 - (2\sqrt{10})^2} + 7 - 2\sqrt{10} =$$

$$= 14 + 2\sqrt{49 - 4 \cdot 10} = 14 + 2 \cdot 3 = 20.$$

П р и м е р 4 . Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})} =$$

$$= \sqrt[3]{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[3]{16 - 8} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\text{если } a \geq 0 \text{ и } b > 0, \text{ то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n-й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0,\ b > 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5$;

в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$;

б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in N,\ n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0,\ n \in N,\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$;

б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$;

б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = \left|a^5\right| = |a|^5$.

Корень степени *m* из корня степени *n*

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

$$\textbf{если } a \geq 0\textbf{, то } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\ m \geq 2,\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$;

в) $\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \dfrac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \dfrac{45}{49}$;