



# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
ПЛАНИМЕТРИЯ.....	8
Начальные геометрические сведения.....	8
Точка. Прямая.....	8
Отрезок. Измерение отрезков.....	9
Луч. Угол. Измерение углов.....	10
Биссектриса угла.....	11
Виды углов.....	12
Смежные и вертикальные углы.....	13
Перпендикулярные прямые.....	13
Серединный перпендикуляр к отрезку.....	14
Параллельные прямые.....	15
Теорема Фалеса.....	16
Расстояния на плоскости.....	17
Некоторые теоремы об углах.....	18
Треугольники.....	19
Основные понятия.....	19
Соотношение между сторонами и углами треугольника.....	20
Виды треугольников по сторонам и углам.....	21
Медианы, биссектрисы, высоты, серединные перпендикуляры треугольника.....	22
Признаки равенства треугольников.....	24
Признаки подобия треугольников.....	25
Средняя линия треугольника.....	27
Свойства биссектрисы треугольника.....	28
Равнобедренный треугольник.....	29
Равносторонний треугольник.....	30
Прямоугольный треугольник.....	31
Признаки равенства прямоугольных треугольников.....	32
Теорема Пифагора. Теорема, обратная теореме Пифагора.....	34
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.....	35
Синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника.....	36
Синус, косинус, тангенс, котангенс углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ .....	37
Теорема синусов, теорема косинусов.....	38
Четырёхугольники.....	39
Основные понятия.....	39
Выпуклые и невыпуклые четырёхугольники.....	40
Параллелограмм.....	41
Ромб.....	44

Прямоугольник.....	47
Квадрат.....	49
Трапеция.....	52
Свойства трапеции.....	52
Отрезки в трапеции.....	54
Частные случаи трапеций.....	55
Многоугольники.....	56
Основные понятия.....	56
Выпуклые и невыпуклые многоугольники.....	57
Сумма углов выпуклого $n$ -угольника.....	57
Пятиугольник. Шестиугольник.....	58
Окружность и круг.....	59
Определение и основные понятия.....	59
Свойства хорд и дуг окружности.....	61
Взаимное расположение окружности и прямой.....	63
Теоремы о касательных.....	64
Теоремы о длинах хорд, касательных и секущих.....	65
Взаимное расположение двух окружностей.....	66
Центральные и вписанные углы.....	68
Понятие вписанной и описанной окружности.....	71
Треугольник, вписанная и описанная окружность.....	72
Вневписанная окружность треугольника.....	74
Четырёхугольник, вписанная и описанная окружность.....	75
Частные случаи описанных четырёхугольников.....	76
Частные случаи вписанных четырёхугольников.....	77
Условия принадлежности четырёх точек одной окружности.....	78
Длина окружности. Длина дуги.....	79
Части круга.....	80
Площади фигур.....	81
Понятие площади.....	81
Площадь треугольника.....	82
Некоторые свойства площадей треугольников.....	86
Площади четырёхугольников.....	87
Площадь круга и его частей.....	92
Площади подобных фигур.....	93
Вычисление площадей фигур на квадратной решётке.....	94
Вычисление площадей фигур на координатной плоскости.....	95
Правильные многоугольники.....	96
Формулы для стороны, периметра и площади правильного $n$ -угольника.....	97
Правильный треугольник (равносторонний треугольник).....	99
Правильный четырёхугольник (квадрат).....	100
Правильный шестиугольник.....	101
Построения циркулем и линейкой.....	102
Простейшие задачи на построение.....	104
Построение треугольника по трём элементам.....	110
Построение правильных многоугольников.....	114

Векторы . . . . .	116
Основные понятия . . . . .	116
Действия над векторами . . . . .	118
Свойства действий над векторами . . . . .	121
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам . . . . .	121
Метод координат . . . . .	122
Прямоугольная система координат на плоскости . . . . .	122
Координаты вектора . . . . .	123
Простейшие задачи в координатах . . . . .	125
Угол между векторами . . . . .	127
Скалярное произведение векторов . . . . .	128
Движение . . . . .	129
Осевая симметрия . . . . .	130
Примеры фигур, обладающих осевой симметрией . . . . .	131
Центральная симметрия . . . . .	132
Примеры фигур, обладающих центральной симметрией . . . . .	133
Поворот . . . . .	134
Параллельный перенос . . . . .	135
<b>СТЕРЕОМЕТРИЯ . . . . .</b>	<b>136</b>
Введение в стереометрию . . . . .	136
Основные неопределяемые понятия стереометрии . . . . .	136
Аксиомы стереометрии . . . . .	137
Некоторые следствия из аксиом . . . . .	138
Способы задания плоскости . . . . .	138
Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве . . . . .	139
Взаимное расположение двух прямых в пространстве . . . . .	139
Свойства параллельных прямых . . . . .	139
Теоремы о скрещивающихся прямых . . . . .	140
Угол между прямыми . . . . .	141
Перпендикулярные прямые . . . . .	142
Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве . . . . .	143
Параллельность прямой и плоскости . . . . .	144
Перпендикулярность прямой и плоскости . . . . .	145
Перпендикуляр и наклонная . . . . .	146
Угол между прямой и плоскостью . . . . .	147
Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве . . . . .	148
Параллельность плоскостей . . . . .	149
Двугранный угол и угол между плоскостями . . . . .	150
Перпендикулярность плоскостей . . . . .	152
Расстояния в пространстве . . . . .	153
Многогранники . . . . .	155
Понятие многогранника . . . . .	155
Призма . . . . .	157
Правильная призма . . . . .	160
Параллелепипед . . . . .	161

Куб .....	163
Пирамида .....	164
Правильная пирамида .....	166
Тетраэдр .....	168
Усечённая пирамида .....	169
Правильная усечённая пирамида .....	171
Правильные многогранники .....	172
Построение сечений многогранников .....	174
Задачи на построение сечений .....	175
Тела и поверхности вращения .....	180
Цилиндр .....	180
Сечения цилиндра .....	182
Конус .....	184
Сечения конуса .....	186
Усечённый конус .....	188
Сечения усечённого конуса .....	190
Сфера и шар .....	191
Сечения сферы и шара .....	192
Части шара .....	193
Взаимное расположение сферы и плоскости .....	194
Комбинации многогранников и тел вращения .....	195
Понятие вписанной и описанной сферы .....	195
Сфера и призма .....	196
Сфера и пирамида .....	197
Сфера и цилиндр .....	198
Сфера и конус .....	199
Призма и цилиндр .....	200
Пирамида и конус .....	201
Цилиндр и конус .....	202
Векторы в пространстве .....	203
Компланарные векторы .....	203
Метод координат в пространстве .....	206
Прямоугольная система координат в пространстве .....	206
Координаты вектора .....	207
Простейшие задачи в координатах .....	209
Скалярное произведение векторов .....	211
Уравнение плоскости .....	212
Расстояние от точки до плоскости .....	213
Вычисление углов между прямыми и плоскостями .....	213
Движение пространства .....	215
Примеры тел, обладающих осевой симметрией .....	215
Примеры тел, обладающих центральной симметрией .....	217
Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости) .....	219
Примеры тел, обладающих зеркальной симметрией .....	220
Подобные тела .....	222
Приложение .....	223

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие представляет собой обобщённое изложение теоретического материала в таблицах с примерами по основным разделам школьного курса геометрии. Книга включает в себя два больших раздела: «Планиметрия» и «Стереометрия».

Данное пособие может быть использовано как в учебном процессе, так и для самостоятельного изучения и повторения школьной программы по геометрии с 7-го по 11-й класс.

Теоретический материал проиллюстрирован примерами, которые позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий.

Книга предназначена для учащихся средней школы при самоподготовке к различным видам контроля, основному и единому государственному экзаменам, а также для учителей математики.

Желаем успехов на экзамене!

# ПЛАНИМЕТРИЯ



**Планиметрия** — раздел геометрии, изучающий геометрические фигуры и их свойства на плоскости.

## НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

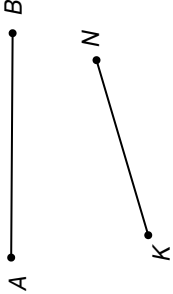
### Точка. Прямая



К основным неопределяемым понятиям планиметрии относятся **точка** и **прямая**.

Чертёж	Обозначения	Случаи взаимного расположения
	<p>Точки обозначаются одной заглавной буквой латинского алфавита (<math>D, M, E, F</math>)</p> <p>Прямые обозначаются одной строчной буквой латинского алфавита (<math>a, b</math>) или двумя заглавными буквами (<math>EF</math>)</p>	<p><math>M \in a</math> — точка <math>M</math> принадлежит прямой <math>a</math>, или точка <math>M</math> лежит на прямой <math>a</math>, или прямая <math>a</math> проходит через точку <math>M</math></p> <p><math>D \notin a</math> — точка <math>D</math> не принадлежит прямой <math>a</math>, или точка <math>D</math> не лежит на прямой <math>a</math>, или прямая <math>a</math> не проходит через точку <math>D</math></p> <p><math>b \cap EF = O</math> — прямые <math>b</math> и <math>EF</math> пересекаются в точке <math>O</math></p> <p><math>a \not\cap b</math> — прямые <math>a</math> и <math>b</math> не пересекаются</p>

# Отрезок. Измерение отрезков

Чертёж	Определения и обозначения	Измерения
	<p><b>Отрезок</b> — часть прямой, ограниченная двумя точками.</p> <p>Две точки, ограничивающие отрезок, называются <b>концами отрезка</b></p>	<p>Чтобы измерить отрезок, необходимо выбрать единицу измерения и выразить его длину некотрым положительным числом.</p> <p>Длина отрезка является расстоянием между его концами, то есть расстоянием между двумя точками.</p> <p>Равные отрезки имеют равные длины.</p> <p>Меньший отрезок имеет меньшую длину.</p> <p>Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой его точкой</p>
	<p>Отрезки обозначаются указанием их концов, то есть двумя заглавными буквами латинского алфавита (<math>AB</math> или <math>BA</math>, <math>KN</math> или <math>NK</math>)</p>	<p>Основные единицы измерения длины:</p> <p>1 см = 10 мм  1 м = 100 см  1 дм = 10 см = 100 мм  1 км = 1000 м</p>



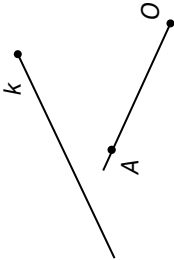
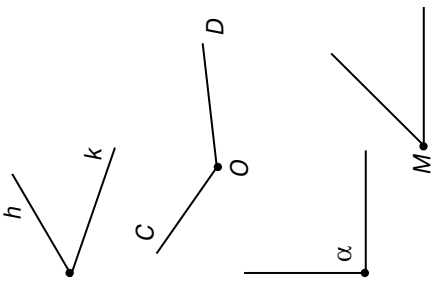
**Середина отрезка** — точка, которая лежит на отрезке и делит его пополам.

✓  $M$  — середина отрезка  $AB$  ( $M \in AB$ ,  $AM = MB$ ).





## Луч. Угол. Измерение углов

Чертёж	Определения и обозначения	Измерения
	<p><b>Луч</b> — часть прямой, ограниченная точкой. Эта точка называется началом луча.</p> <p>Лучи обозначаются одной строчной буквой латинского алфавита (<math>k</math>) или двумя заглавными буквами (<math>OA</math>), где первая буква обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на нём</p>	<p>Так как луч имеет начало, но не имеет конца, то измерить его длину нельзя</p>
	<p><b>Угол</b> — геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются <b>сторонами угла</b>, их общее начало — <b>вершиной угла</b>.</p> <p>Углы обозначаются одной заглавной буквой латинского алфавита (<math>\angle M</math>), или двумя строчными буквами латинского алфавита (<math>\angle hk</math> или <math>\angle kh</math>), или тремя заглавными буквами латинского алфавита (<math>\angle COD</math> или <math>\angle DOC</math>), где вторая буква обозначает вершину угла, или одной строчной буквой греческого алфавита (<math>\alpha</math>)</p>	<p>Основные единицы измерения углов:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>1^\circ = \frac{1}{180}</math> развёрнутого угла — один градус;</li> <li>• <math>1' = \frac{1}{60}</math> градуса — одна минута;</li> <li>• <math>1'' = \frac{1}{60}</math> минуты — одна секунда.</li> </ul> <p>Равные углы имеют равные градусные меры.          Меньший угол имеет меньшую градусную меру.          Если луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов</p>

## Биссектриса угла



**Биссектрисой угла** называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам.

✓  $MC$  — биссектриса  $\angle AMB$  ( $\angle AMC = \angle CMB$ ).

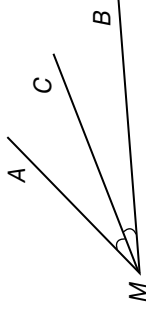


Чертёж	Свойство биссектрисы угла	Обратное утверждение
	<p>Любая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от сторон этого угла.</p> <p><b>ПРИМЕЧАНИЕ.</b> Равноудалена — то есть находится на одинаковом расстоянии</p>	<p>Любая точка внутри неразвёрнутого угла, равноудалённая от сторон этого угла, лежит на его биссектрисе</p>



Биссектрису угла можно определить как геометрическое место точек внутри угла, равноудалённых от его сторон.

## Виды углов




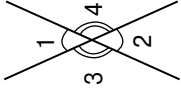
Углы можно классифицировать в зависимости от градусной меры.

Чертёж	Виды углов	Градусные меры
	<b>Острый угол</b> меньше прямого угла	$0^\circ < \angle A < 90^\circ$
	<b>Прямой угол</b> равен половине развёрнутого угла	$\angle hm = 90^\circ$
	<b>Тупой угол</b> больше прямого, но меньше развёрнутого угла	$90^\circ < \angle EFT < 180^\circ$
	<b>Развёрнутый угол</b> — угол, стороны которого лежат на одной прямой	$\angle U = 180^\circ$

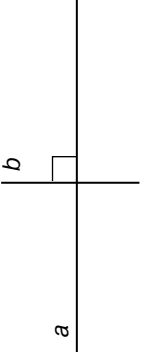


- Все прямые углы равны.
- Все развёрнутые углы равны.
- Сумма двух прямых углов равна развёрнутому углу, значит, прямой угол равен половине развёрнутого угла.

## Смежные и вертикальные углы

Чертёж	Определения	Свойства
	<p><b>Смежные углы</b></p> <p>Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой</p>	<p>Сумма смежных углов равна <math>180^\circ</math>.</p> $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$
<b>Вертикальные углы</b>		
	<p>Два угла, у которых стороны одного угла являются продолжением сторон другого</p>	<p>Вертикальные углы равны.</p> $\angle 1 = \angle 2$ $\angle 3 = \angle 4$

## Перпендикулярные прямые

Чертёж	Определение и обозначение	Теорема
	<p>Две пересекающиеся прямые называются <b>перпендикулярными</b> (взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.</p> <p><b>Обозначение:</b> <math>a \perp b</math></p>	<p>Две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются</p>

## Серединный перпендикуляр к отрезку



**Серединным перпендикуляром к отрезку** называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.

✓  $l$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ .

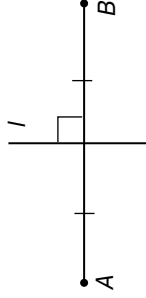
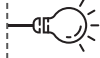


Чертёж	Свойство серединного перпендикуляра	Обратное утверждение
	<p>Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка</p>	<p>Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему</p>



Серединный перпендикуляр к отрезку можно определить как геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка.

# Параллельные прямые


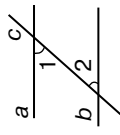
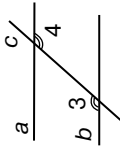
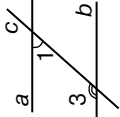
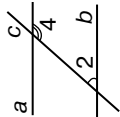
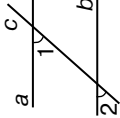
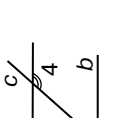
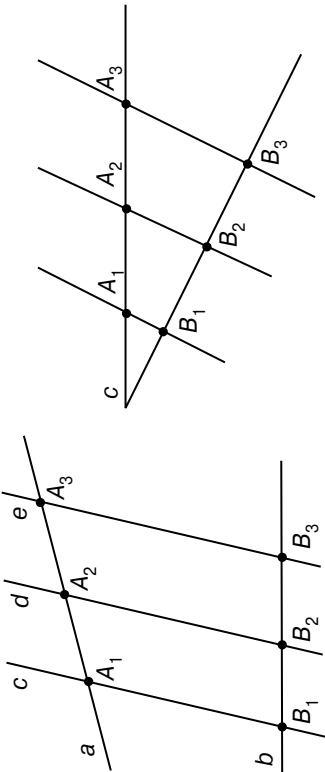


 Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются:  $a \parallel b$ .

Чертёж	Признаки параллельности двух прямых	Свойства параллельных прямых
<p>Накрест лежащие углы</p>  	<p>Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны</p>	<p>Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны</p>
<p>Односторонние углы</p>  	<p>Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна <math>180^\circ</math>, то прямые параллельны</p>	<p>Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна <math>180^\circ</math></p>
<p>Соответственные углы</p>  	<p>Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны</p>	<p>Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны</p>

## Теорема Фалеса

Чертёж	Формулировки
 <p data-bbox="633 1092 666 1528">Если <math>A_1A_2 = A_2A_3, \dots</math>, то <math>B_1B_2 = B_2B_3, \dots</math></p> $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \dots$	<p data-bbox="245 142 420 714">Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.</p> <p data-bbox="453 142 573 714"><b>ПРИМЕЧАНИЕ.</b> Взаимное расположение двух исходных прямых не играет роли, то есть теорема верна как для пересекающихся прямых, так и для параллельных</p>
<p data-bbox="693 327 715 714"><b>Обобщённая теорема Фалеса</b></p> <p data-bbox="720 142 780 714">Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки</p>	<p data-bbox="840 1352 911 1436"></p> <p data-bbox="846 243 933 1335">Для теоремы Фалеса верно и обратное утверждение: если прямые, пересекающие две другие прямые (параллельные или нет), отсекают на обеих из них равные отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.</p>