



# Содержание

## 1. АЛГЕБРА

<b>1.1. Числа и вычисления</b> .....	<b>11</b>
1.1.1. Числа .....	11
1.1.2. Арифметические действия и их свойства . . .	12
1.1.3. Дроби, действия над ними. Округление чисел .....	16
1.1.4. Отношения, пропорции и проценты .....	22
1.1.5. Модуль и его свойства .....	27
1.1.6. Положительные и отрицательные числа, действия над ними .....	28
1.1.7. Степени, корни и их свойства .....	29
1.1.8. Логарифмы и их свойства .....	32
<b>1.2. Преобразование выражений с переменными</b> .....	<b>34</b>
1.2.1. Раскрытие скобок .....	34
1.2.2. Приведение подобных слагаемых .....	35
1.2.3. Формулы сокращенного умножения . . . .	35
1.2.4. Различные способы разложения на множители .....	35
<b>1.3. Основы тригонометрии</b> .....	<b>36</b>
1.3.1. Радианная и градусная меры произвольного угла .....	36
1.3.2. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла .....	38
1.3.3. Основные тригонометрические тождества .....	40
1.3.4. Формулы приведения .....	40

1.3.5. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. . . . .	41
1.3.6. Синус и косинус двойного угла . . . . .	42
<b>1.4. Уравнения и системы уравнений . . . . .</b>	<b>42</b>
1.4.1. Уравнение с одной переменной, корень уравнения. . . . .	42
1.4.2. Линейные уравнения . . . . .	43
1.4.3. Квадратные уравнения . . . . .	43
1.4.4. Дробно-рациональные уравнения . . . . .	46
1.4.5. Иррациональные уравнения. . . . .	48
1.4.6. Показательные уравнения . . . . .	49
1.4.7. Логарифмические уравнения . . . . .	51
1.4.8. Тригонометрические уравнения. . . . .	52
1.4.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных . . . . .	54
<b>1.5. Неравенства и системы неравенств . . . . .</b>	<b>58</b>
1.5.1. Линейные неравенства . . . . .	58
1.5.2. Квадратные неравенства . . . . .	59
1.5.3. Рациональные неравенства и метод интервалов . . . . .	64
1.5.4. Показательные неравенства . . . . .	66
1.5.5. Логарифмические неравенства. . . . .	68
1.5.6. Метод рационализации . . . . .	69
1.5.7. Системы неравенств с одной переменной . . . . .	71
<b>1.6. Текстовые задачи и методы их решения . . . . .</b>	<b>73</b>
1.6.1. Решение текстовых задач арифметическим методом . . . . .	73

1.6.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом . . . . .	75
1.6.3. Решение текстовых задач графическим методом . . . . .	82
<b>1.7. Прогрессии . . . . .</b>	<b>83</b>
1.7.1. Арифметическая прогрессия . . . . .	83
1.7.2. Геометрическая прогрессия . . . . .	84

**2. ЭЛЕМЕНТЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
АНАЛИЗА . . . . .**

	<b>85</b>
<b>2.1. Функции . . . . .</b>	<b>85</b>
2.1.1. Функция, область определения функции, множество значений функции. . . . .	85
2.1.2. График функции . . . . .	86
2.1.3. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат . . . . .	86
<b>2.2. Элементарное исследование функций. . . . .</b>	<b>87</b>
2.2.1. Чётность и нечётность функции . . . . .	87
2.2.2. Периодичность функции . . . . .	88
2.2.3. Нули функции, промежутки знакопостоянства . . . . .	88
2.2.4. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания . . . . .	89
2.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции . . . . .	89
2.2.6. Ограниченность функции . . . . .	90

<b>2.3. Основные элементарные функции</b> .....	<b>91</b>
2.3.1. Линейная функция, её график .....	91
2.3.2. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график .....	92
2.3.3. Квадратичная функция, её график .....	93
2.3.4. Показательная функция, её график .....	94
2.3.5. Логарифмическая функция, её график .....	95
2.3.6. Тригонометрические функции, их графики .....	96
<b>2.4. Производная</b> .....	<b>100</b>
2.4.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной .....	100
2.4.2. Физический смысл производной .....	101
2.4.3. Уравнение касательной к графику функции .....	102
2.4.4. Производные суммы, разности, произведения, частного .....	102
2.4.5. Производные основных элементарных функций .....	102
<b>2.5. Исследование функций с помощью производной</b> .....	<b>103</b>
2.5.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков .....	103
<b>2.6. Первообразная</b> .....	<b>109</b>
2.6.1. Первообразные элементарных функций .....	109
2.6.2. Площадь криволинейной трапеции .....	111

<b>3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ) . . . . .</b>	<b>112</b>
<b>3.1. Начальные сведения . . . . .</b>	<b>112</b>
3.1.1. Точки, прямые, лучи, отрезки . . . . .	112
3.1.2. Углы. Вертикальные и смежные углы . . .	113
3.1.3. Прямая. Параллельность и перпендикулярность прямых . . . . .	116
<b>3.2. Треугольник . . . . .</b>	<b>119</b>
3.2.1. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота, средняя линия треугольника . . . . .	119
3.2.2. Признаки равенства треугольников . . . .	121
3.2.3. Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника . . . .	122
3.2.4. Прямоугольный треугольник. Свойства и признаки прямоугольного треугольника. Теорема Пифагора . . . . .	124
3.2.5. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника . . . . .	127
3.2.6. Признаки подобия треугольников . . . . .	128
3.2.7. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника . . . . .	131
3.2.8. Теорема Фалеса . . . . .	131
3.2.9. Теорема синусов. Теорема косинусов . . .	132
<b>3.3. Многоугольники . . . . .</b>	<b>133</b>
3.3.1. Параллелограмм . . . . .	133
3.3.2. Прямоугольник и ромб . . . . .	135
3.3.3. Квадрат . . . . .	136
3.3.4. Трапеция . . . . .	137
3.3.5. Сумма углов выпуклого многоугольника . .	138
3.3.6. Правильные многоугольники . . . . .	139
3.3.7. Подобие произвольных фигур. . . . .	140

<b>3.4. Окружность и круг</b> . . . . .	<b>142</b>
3.4.1. Основные понятия . . . . .	142
3.4.2. Вписанный и центральный углы . . . . .	142
3.4.3. Касательная и секущая к окружности . . .	144
3.4.4. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника. .	145
3.4.5. Вписанные и описанные четырёхугольники . . . . .	147
<b>3.5. Измерение геометрических величин</b> . . . . .	<b>148</b>
3.5.1. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми . .	148
3.5.2. Периметр многоугольника . . . . .	148
3.5.3. Длина окружности. . . . .	148
3.5.4. Площадь квадрата, прямоугольника . . . .	149
3.5.5. Площадь параллелограмма и ромба, выпуклого четырёхугольника . . . . .	149
3.5.6. Площадь треугольника . . . . .	150
3.5.7. Площадь трапеции. . . . .	151
3.5.8. Площадь круга. Площадь сектора . . . . .	151
3.5.9. Формула Пика для нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге . . . . .	152
<b>3.6. Векторы на плоскости</b> . . . . .	<b>152</b>
3.6.1. Вектор, длина вектора, равенство векторов . . . . .	152
3.6.2. Операции над векторами . . . . .	153
3.6.3. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов . . . . .	156
3.6.4. Простейшие задачи в координатах . . . . .	158
3.6.5. Уравнение окружности . . . . .	158

<b>3.7. Дополнительные материалы к главе 3 . . . . .</b>	<b>158</b>
3.7.1. Использование подобия треугольников при решении задач . . . . .	158
<b>4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ) . . . . .</b>	<b>161</b>
<b>4.1. Прямые и плоскости в пространстве . . . . .</b>	<b>161</b>
4.1.1. Основные аксиомы стереометрии и следствия к ним . . . . .	161
4.1.2. Взаимное расположение прямых в пространстве . . . . .	162
4.1.3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве . . . . .	163
4.1.4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве . . . . .	166
<b>4.2. Многогранники . . . . .</b>	<b>167</b>
4.2.1. Призма, параллелепипед, куб. . . . .	167
4.2.2. Пирамида . . . . .	169
4.2.3. Сечение многогранника. . . . .	170
<b>4.3. Тела вращения . . . . .</b>	<b>171</b>
4.3.1. Цилиндр . . . . .	171
4.3.2. Конус . . . . .	172
4.3.3. Шар и сфера . . . . .	174
<b>4.4. Измерение геометрических величин в пространстве . . . . .</b>	<b>174</b>
4.4.1. Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями . . . . .	174
4.4.2. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми. Расстояние между параллельными плоскостями . . . . .	175



4.4.3. Площадь поверхности многогранника . . .	176
4.4.4. Площадь поверхности фигур вращения . .	177
4.4.5. Объёмы . . . . .	177
<b>4.5. Координаты и векторы в пространстве. . . .</b>	<b>178</b>
4.5.1. Декартовы координаты в пространстве. Координаты вектора . . . . .	178
4.5.2. Скалярное произведение векторов в пространстве. Угол между векторами в пространстве . . . . .	179
4.5.3. Уравнение плоскости. . . . .	179
4.5.4. Простейшие задачи в координатах в пространстве . . . . .	182
<b>5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ . . . . .</b>	<b>183</b>
5.1. Элементы статистики . . . . .	183
5.2. Элементы комбинаторики . . . . .	184
5.2.1. Основные формулы комбинаторики . . . .	184
5.3. Элементы теории вероятностей . . . . .	185
5.3.1. Вероятности событий. Классическое определение вероятности . . . . .	185
5.3.2. Теоремы о вероятности событий . . . . .	186
<b>6. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА . . . . .</b>	<b>188</b>
6.1. Банковские задачи . . . . .	188

# 1. АЛГЕБРА

## 1.1. Числа и вычисления

### 1.1.1. Числа

**Цифры** — знаки для записи чисел.

В десятичной системе счисления используют цифры: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Всего 10 цифр.

→	<b>Натуральные числа <math>\mathbf{N}</math></b> — числа, которые используют при счёте предметов. <i>Например, 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 и т.д.</i>
→	<b>Целые числа <math>\mathbf{Z}</math></b> — натуральные числа, противоположные им и нуль. <i>Например, <math>-100</math>; <math>-5</math>; <math>-1</math>; <math>0</math>; <math>2</math>; <math>17</math> и т.д.</i>
→	<b>Рациональные числа <math>\mathbf{Q}</math></b> — числа, которые можно записать в виде $\frac{m}{n}$ , где $m$ — целое, а $n$ — натуральное, или в виде конечной либо бесконечной периодической десятичной дроби. <i>Например, <math>-6 = -\frac{6}{1}</math>; <math>-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}</math>; <math>\frac{1}{3} = 0,(3)</math>.</i>
→	<b>Иррациональные числа</b> — числа, которые можно записать приближенно с помощью бесконечной непериодической десятичной дроби. <i>Например, <math>\sqrt{2} \approx 1,4142\dots</math>; <math>\pi \approx 3,14\dots</math>.</i>
→	<b>Действительные числа <math>\mathbf{R}</math></b> — рациональные и иррациональные числа.

### 1.1.2. Арифметические действия и их свойства

<b>Действия над натуральными числами</b>	
Сложение	$a + b = c, a = c - b, b = c - a,$ где $a$ — слагаемое, $b$ — слагаемое, $c$ — сумма
Вычитание	$a - b = c, a = b + c, b = a - c,$ где $a$ — уменьшаемое, $b$ — вычитаемое, $c$ — разность
Умножение	$ab = c, a = \frac{c}{b}, b = \frac{c}{a}, a \neq 0, b \neq 0,$ где $a$ — множитель, $b$ — множитель, $c$ — произведение
Деление	$\frac{a}{b} = c$ или $a : b = c, a = bc, b = \frac{a}{c},$ $b \neq 0, c \neq 0,$ где $a$ — делимое, $b$ — делитель, $c$ — частное

<b>Свойства сложения и умножения</b>	
Переместительное свойство сложения	$a + b = b + a$
Сочетательное свойство сложения	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Переместительное свойство умножения	$ab = ba$
Сочетательное свойство умножения	$(ab)c = a(bc)$
Распределительное свойство умножения относительно сложения	$a(b + c) = ab + ac$

### Общие правила при действиях с 0 и 1

$$a + 0 = a$$

$$a - 0 = a$$

$$a - a = 0$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a : 1 = a$$

$$a : a = 1$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$0 : a = 0$$

$a : 0$  — нет числового решения

### Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9

#### Действия

- Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат.
- Умножаем или складываем остатки множителей или слагаемых и сравниваем их с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать.
- При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно, складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

<p><i>Примеры:</i></p> <p>1) <math>44 \cdot 46 = 2024</math>.  <math>4 + 4 = 8</math>; <math>4 + 6 = 10 \rightarrow</math>  <math>\rightarrow 1 + 0 = 1</math>;  <math>2 + 0 + 2 + 4 = 8</math>;  <math>8 \cdot 1 = 8</math> (верно)</p>	<p>2) <math>327 + 48 = 375</math>.  <math>3 + 2 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3</math>;  <math>4 + 8 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3</math>;  <math>3 + 7 + 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6</math>;  <math>3 + 3 = 6</math> (верно)</p>
<p>3) <math>156 : 12 = 13 \rightarrow</math>  <math>\rightarrow 13 \cdot 12 = 156</math>.  <math>1 + 3 = 4</math>; <math>1 + 2 = 3</math>;  <math>1 + 5 + 6 = 12 \rightarrow</math>  <math>\rightarrow 1 + 2 = 3</math>;  <math>4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3</math>  (верно)</p>	<p>4) <math>58 - 22 = 36 \rightarrow</math>  <math>\rightarrow 36 + 22 = 58</math>.  <math>3 + 6 = 9</math>; <math>2 + 2 = 4</math>;  <math>5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4</math>;  <math>9 + 4 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4</math>  (верно)</p>

<b>Приёмы быстрого устного счёта</b>	
<b>Умножение чисел от 101 до 109 между собой</b> $(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$	
<b>Порядок действий</b>	<i>Примеры</i>
<p>1) Записываем число 1.</p> <p>2) Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей.</p> <p>3) Ещё правее записываем произведение этих же чисел.</p>	<p>1) <math>102 \cdot 104 = 10\,000 +</math>  <math>+ 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 =</math>  <math>= 10\,000 + 600 + 8 =</math>  <math>= 10\,608</math>.</p> <p>2) <math>109 \cdot 108 = 10\,000 +</math>  <math>+ 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 =</math>  <math>10\,000 + 1700 + 72 =</math>  <math>= 11\,772</math>.</p>
<b>Умножение чисел, больших 10</b> $(10 + a)(10 + b) = 10(10 + a + b) + ab$	

Порядок действий	Примеры
<p>1. К одному из множителей прибавляем единицы второго множителя, получаем десятки.</p> <p>2. Перемножаем единицы.</p> <p>3. Складываем десятки с произведением единиц.</p>	<p>1) <math>12 \cdot 19 = 10(10 + 2 + 9) + 2 \cdot 9 = 210 + 18 = 228</math></p> <p>2) <math>16 \cdot 13 = 10(10 + 6 + 3) + 6 \cdot 3 = 190 + 18 = 208</math></p>
<p><b>Умножение чисел с одинаковыми десятками и числом единиц, дающих в сумме 10</b></p> <p><math>(1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10)</math></p>	
<p>• <i>Десятки</i> умножаем на следующее натуральное число: <math>2 \cdot 3</math>; <math>3 \cdot 4</math>; <math>5 \cdot 6</math>; <math>9 \cdot 10</math>; <math>11 \cdot 12</math>.</p> <p>• <i>Единицы</i> просто перемножаем (если в произведении получилось однозначное число, то слева приписываем 0):  <math>1 \cdot 9 = 09</math>, <math>2 \cdot 8 = 16</math>, <math>3 \cdot 7 = 21</math>, <math>4 \cdot 6 = 24</math>, <math>5 \cdot 5 = 25</math>.</p> <p>• <i>В результате</i>: слева — произведение десятков, справа — произведение единиц.</p> <p><i>Примеры:</i></p> <p>1) <math>42 \cdot 48 = (4 \cdot 5) \cdot 100 + (2 \cdot 8) = 2000 + 16 = \underline{2016}</math></p> <p>2) <math>51 \cdot 59 = (5 \cdot 6) \cdot 100 + (1 \cdot 9) = 3000 + 9 = \underline{3009}</math></p> <p>3) <math>83 \cdot 87 = (8 \cdot 9) \cdot 100 + (3 \cdot 7) = 7200 + 21 = \underline{7221}</math></p> <p>4) <math>115^2 = 115 \cdot 115 = (11 \cdot 12) \cdot 100 + (5 \cdot 5) = 13200 + 25 = \underline{13225}</math></p>	