УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
К75

Об авторах

В. В. Кочагин — кандидат педагогических наук, учитель математики ГБОУ «Школа № 1568 им. Пабло Неруды» г. Москвы

М. Н. Кочагина — кандидат педагогических наук, доцент департамента математики и физики Института цифрового образования ГАОУ ВО МГПУ

Кочагин, Вадим Витальевич.

К75 ЕГЭ 2022. Математика : сборник заданий : 900 заданий с ответами / В. В. Кочагин, М. Н. Кочагина. — Москва : Эксмо, 2021. — 272 с. — (ЕГЭ. Сборник заданий).

ISBN 978-5-04-122328-1

Книга предназначена для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.
Издание содержит:
- задания профильного уровня;
- краткие теоретические сведения по всем темам;
- решение типовых заданий;
- ответы ко всем заданиям.

Пособие будет полезно учителям математики, так как даёт возможность эффективно организовать учебный процесс и подготовку к экзамену.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-122328-1

© Кочагин В.В., Кочагина М.Н., 2021
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2021

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга адресована *учащимся 10—11-х классов* для подготовки к единому государственному экзамену. Материал данного пособия представлен в виде разделов, соответствующих основным темам школьного курса математики, присутствующим в ЕГЭ. Для каждой темы предложены задания части 1 и части 2 профильного уровня, а также обобщающие контрольные работы. Ко всем заданиям приведены ответы.

Тренировочные задания позволят учащимся систематически, при прохождении каждой темы, готовиться к этому экзамену. Достаточно будет в 10—11-х классах решать задания из этого пособия параллельно с темой по математике, изучаемой на школьных уроках, а в конце 11-го класса, в качестве повторения, — варианты ЕГЭ по математике.

Данное пособие может использоваться совместно с любым учебником алгебры и начал анализа и геометрии для 10—11-х классов.

Книга также будет полезна *учителям математики*, так как дает возможность эффективно организовать подготовку учащихся к единому государственному экзамену непосредственно на уроках, в процессе изучения всех тем. Можно предложить несколько вариантов работы:

— включение заданий тестового характера в систему заданий для 10—11-х классов вместе со стандартными упражнениями учебника;

— использование заданий и контрольных работ на этапе обобщающего повторения по каждой теме или на этапе итогового повторения и подготовки к ЕГЭ в конце 11-го класса;

— контроль и коррекция знаний учащихся.

В структуре экзаменационной работы выделены две части, которые различаются по содержанию, форме записи ответа, степени сложности и числу заданий.

В данном учебном пособии также представлены две группы заданий. Формы записи ответов для разных заданий соответствуют формулировкам заданий в ЕГЭ.

Для каждого из заданий **части 1** ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Единицы измерений не пишут. В этом разделе содержатся задания базового уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа», а также задания из различных разделов математики с 5-го по 11-й класс.

Задания **части 2** требуют развернутого ответа. При оформлении решений обращают внимание на правильную запись хода решения, наличие обоснований и верный ответ. В эту группу включаются самые сложные задания по геометрии и алгебре 7—11-х классов повышенного и высокого уровней сложности.

Надеемся, что данное пособие поможет учителям математики эффективно организовать подготовку к ЕГЭ на своих уроках, а старшеклассникам — систематизировать знания по математике, самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ (10—11 классы)

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Теоретические сведения

Формулы одного аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} n,\ n \in \boldsymbol{Z} \qquad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \qquad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \qquad (6)$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (7)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (8)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (9)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (10)$$

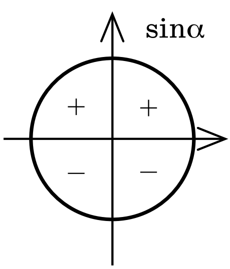
Формулы двойного угла

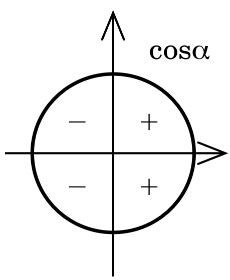
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (11)$$

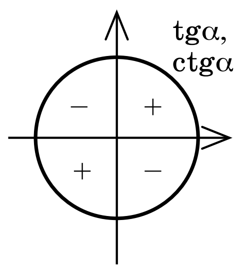
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (13)$$

Знаки тригонометрических функций







Решение типовых задач

Каждый год в ЕГЭ встречаются задания на применение формул приведения. Их применяют для преобразования выражений вида

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);\ \sin(\pi + \alpha);\ \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha);\ \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)\ \text{и т.д.}$$

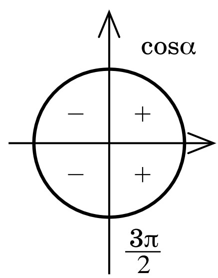
Преобразовывать подобные выражения помогает следующее правило: 1) находим четверть, в которой расположен угол, и определяем знак функции в этой четверти (угол α считаем углом I четверти); 2) меняем функцию на кофункцию, если аргументом служат углы $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$..., или не изменяем функцию, если аргументом служат углы $(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$...

Задание 1. Упростите выражение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Решение.

1) Угол $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ лежит в III четверти, где $\cos \alpha$ отрицателен.

2) Угол $\frac{3\pi}{2}$ находится на вертикальной оси, поэтому «киваем головой сверху вниз», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Да». Поэтому получаем $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.



Ответ: $-\sin \alpha$.

Задание 2. Упростите выражение $\sin(\pi - \alpha)$.

Решение.

1) Угол $\pi - \alpha$ лежит во II четверти, где $\sin \alpha$ положителен.

2) Угол π находится на горизонтальной оси $\pi = 180°$, поэтому «киваем головой справа налево», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Нет». Поэтому получаем $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Задание 3. Упростите выражение $\mathrm{tg}(90°+\alpha)$.

Ответ: $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задание 4. Упростите выражение $\mathrm{ctg}(360°-\alpha)$.

Ответ: $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Рассмотрим более сложные случаи, когда сначала используется свойство четности тригонометрических функций ($\cos\alpha$ — четная функция, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ — нечетные функции), а затем формулы приведения.

Задание 5. Упростите выражение $\sin(\alpha-\pi)$.

Решение. Сравним выражения из заданий 2 и 5. Чтобы применить формулы приведения, используем нечетность $\sin t$.

$$\sin(\alpha-\pi) = -\sin(\pi-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 6. Упростите выражение $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 7. Упростите выражение $\mathrm{tg}(\alpha-270°)$.

Решение.

$$\mathrm{tg}(\alpha-270°) = -\mathrm{tg}(270°-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Ответ: $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задание 8. Упростите выражение $\operatorname{ctg}(\alpha - 360°)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 360°) = -\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = \operatorname{ctg}\ \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим следующую ситуацию, когда, прежде чем применить формулы приведения, необходимо уменьшить аргумент, используя свойство периодичности тригонометрических функций (наименьший положительный период $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ равен 2π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные 2π; наименьший положительный период $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ равен π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные π).

Задание 9. Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1}.$$

Решение.

Когда надо преобразовывать выражения в числителе и знаменателе, удобно преобразовывать отдельно числитель, отдельно знаменатель.

В числителе:

$$\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) = \sin\left(4\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha.$$

В знаменателе: $\sin(\pi - \alpha) - 1 = \sin\alpha - 1$.

Разделим числитель на знаменатель, получим: $\frac{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 1}$. Выражения в числителе и знаменателе содержат один и тот же аргумент α, поэтому используем формулы одного аргумента (а именно: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$).

$$\frac{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(\sin\alpha - 1)} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Если сумма (разность) аргументов тригонометрических функций равна $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$ и т.д., то помогают формулы приведения.

Задание 10. Вычислите: $\cos^2 15° + \cos^2 75°$.

Решение.

Так как $15° + 75° = 90°$, то

$$\cos^2 15° + \cos^2 75° = \cos^2(90° - 75°) + \cos^2 75° = \\ = \sin^2 75° + \cos^2 75° = 1.$$

Ответ: 1.

Разобраться в обилии формул тригонометрии часто помогает сравнение аргументов тригонометрических функций, входящих в выражение.

Задание 11. Упростите выражение $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$.

Решение.

Аргументы числителя и знаменателя отличаются в 2 раза, значит, применим формулы двойного угла в числителе.

$$\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2\sin 2\beta \cos 2\beta}{\cos 2\beta} = 2\sin 2\beta.$$

Ответ: $2\sin 2\beta$.

В заданиях на преобразования выражений, содержащих степени с натуральными показателями, сначала применяют формулы сокращенного умножения.

Задание 12. Упростите выражение

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha.$$

Решение.

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha =$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - (\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha)^2 = -1 - 1 = -2.$$

Ответ: -2.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите значение выражения
$3\sin^2\beta + 10 + 3\cos^2\beta$.

2. Найдите значение выражения
$16 - 6\sin^2\beta - 6\cos^2\beta$.

3. Вычислите: $\cos^2 15° + \cos^2 75°$.

4. Вычислите: $\cos^2 15° - \sin^2 75°$.

5. Упростите выражение $\dfrac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} - 2\sin 2\beta + 0{,}29$.

6. Вычислите:
$\left(\sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{3}$ при $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

7. Дано: $\cos\beta = 0{,}8$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите: $\sin\beta$.

8. Дано: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{7}{24}$ и $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Найдите: $\cos\beta$.

9. Дано: $\operatorname{ctg}\beta = -1\dfrac{1}{3}$. Найдите: $\cos 2\beta$.

10. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0{,}6$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\sin(\alpha - \beta)$.

11. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0{,}6$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\cos(\alpha + \beta)$.

12. Найдите значение выражения $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\sin\beta = 0{,}11$.

13. Найдите значение выражения $\sin(180° - \beta)$, если $\sin\beta = -0{,}24$.

14. Найдите значение выражения $\sin(270^\circ - \beta)$, если $\cos\beta = -0{,}41$.

15. Найдите значение выражения $\cos(\beta - 270^\circ)$, если $\sin\beta = 0{,}59$.

16. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}^2(\alpha - \pi)$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2{,}5$.

17. Найдите значение выражения $\cos^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}2$.

18. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)},$$

если $\operatorname{ctg}\alpha = 8$.

19. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1},$$

если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}25$.

1.2. Тригонометрические уравнения

Перед изучением данной темы полезно повторить теоретические сведения, изложенные в теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

Теоретические сведения

Общие формулы

$$\sin x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (1)$$

$$\cos x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \qquad (4)$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \qquad (5)$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a \qquad (6)$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \qquad (7)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \qquad (8)$$

Особые случаи

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (9)$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (10)$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (11)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (12)$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (13)$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (14)$$

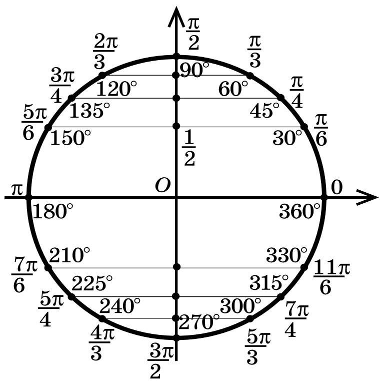
Находить значения арксинусов (арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов) некоторых углов помогает следующая таблица.

Угол / Значения	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
arcsin ↑	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccos ↑	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
arctg ↑	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
arcctg ↑	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Например: $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

				$\frac{\pi}{3} = 60°$	
àrcsin ↑				$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Тригонометрический круг



Решение типовых задач

Рассмотрим простейшие уравнения и на примере их решения покажем, как отвечать на дополнительные вопросы. Такие вопросы — еще одна особенность ЕГЭ по математике: обычно требуется не только решить тригонометрическое уравнение, но из полученного семейства решений выбрать те, которые удовлетворяют некоторым условиям.

Простейшие уравнения (дополнительные вопросы)

Задание 1. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z};\ x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$.