ВВЕДЕНИЕ

Физика плазмы — многообразная и красивая в теории, весьма эффективная в приложениях, сложилась в ее современном состоянии и стала одной из интереснейших областей науки и техники во второй половине XX столетия. Основной движущей силой ее интенсивного развития явились заманчивые перспективы овладения в мирных целях энергией термоядерного синтеза, которая имеет основания казаться неограниченной по своим запасам и по этой причине дешевой. Мечты и мысли человечества увлечены этой перспективой после успешных испытаний водородного оружия в 1953-м и последующих за ним годах. Необходимым условием осуществления ожидаемой термоядерной реакции должно быть достижение очень высоких температур (десятки миллионов градусов и выше), при которых все известные вещества могут находиться только в состоянии плазмы — так называемом четвертом после твердого, жидкого и газообразного состоянии, когда часть электронов отделены от атомов, а атомы с неполным набором электронов являются положительно заряженными ионами.

В связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза (УТС), а также и независимо от нее, предприняты крупные научно-технические разработки, создан ряд плазменных установок, ведутся многочисленные исследования плазменных процессов. Параллельно с научно-техническими мотивами развитие физики плазмы стимулировано интересом к астрофизическим проблемам, которые также имеют дело в основном с веществом в состоянии плазмы, или очень горячей — в материи Солнца и звезд или разреженной — в межзвездном пространстве и ионосферах планет.

Значительную роль в исследованиях плазмы играют математическое моделирование физических процессов и расчеты с применением мощной современной электронно-вычислительной техники. Они, с одной стороны, дополняют и облегчают чисто теоретические работы, с другой — позволяют сэкономить на экспериментах, громоздких, дорогостоящих, а иногда и принципиально невозможных, способствуют их физической интерпретации.

Плазма и ее поведение разнообразны, диапазон ее параметров, в частности, плотности и температуры, весьма велик, разнообразны и проблемы ее исследования. Математические модели плазмы обязаны отслеживать это разнообразие. Различают два основных типа моделей. Один из них связан с относительно разреженной плазмой и вынужден иметь дело, если не с динамикой отдельных частиц, то с их статистическим распределением по пространству координат и скоростей. Модели этого типа оперируют в основном с разными вариантами кинетического уравнения для функции распределения частиц каждого сорта, образующих плазму.

Модели другого типа — а именно они составляют содержание настоящей книги — описывают процессы в относительно плотной плазме, которую вслед за жидкостью и газом можно рассматривать как сплошную среду. Математический аппарат моделей основан здесь на системе уравнений магнитной газодинамики (МГД) или ее модификациях. Магнитная газодинамика (или гидродинамика — без четкого разделения этих терминов) как область механики сплошных сред хорошо представлена в ряде книг. Основоположником магнитной гидродинамики и автором первой монографии на эту тему [1] является известный шведский физик лауреат Нобелевской премии Х. Альфвен. Из первых отечественных источников следует назвать главы из «Электродинамики сплошных сред» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [2], обзорную статью С. И. Сыроватского [3], монографию А. Г. Куликовского и Г. А. Любимова [4], из более поздних — книгу Р. В. Половина и В. П. Демуцкого [5].

Построение математических моделей плазменных процессов требует уделить внимание математической природе уравнений МГД и задач с ними. Понимание этой природы позволяет рассмотреть ряд качественных закономерностей и тенденций плазменных процессов с помощью упрощающих предположений, грамотно поставить вопросы и получить содержательные ответы аналитическими или полуаналитическими методами. Примерами глубокого математического исследования в МГД-моделях являются нетривиальные результаты об устойчивости плазменных образований, изложенные Б. Б. Кадомцевым [6], и некоторые свойства стационарных течений плазмы в каналах в обзоре А. И. Морозова и Л. С. Соловьева [7]. Эти и им подобные примеры лишь помогают ориентироваться во множестве проблем, которые плазма ставит перед наукой и техникой. А конкретные задачи математического моделирования, сопутствующие конкретным проектам и разработкам плазменных установок, решаются приближенно численными методами. Создание и реализация методов также требует знания математической природы задач.

Основные положения математического аппарата магнитной газодинамики — теория характеристик, разрывных решений и др. — изложены в указанных выше руководствах. Постановка и частично решение новых математических задач теории квазилинейных уравнений, тесно связанных с моделированием задач газодинамики и МГД, имеется в проблемном обзоре И. М. Гельфанда [8], который следует рекомендовать и современному читателю. Заслуживает внимания недавно вышедшая монография А. Г. Куликовского, Н. В. Погорелова и А. Ю. Семенова [9], где затронуты общие математические вопросы и перечислены многие известные численные методы решения задач механики сплошных сред.

Отдельные вопросы, представляющие интерес в связи с математическим моделированием плотной плазмы, изложены в журнальных статьях одновременно с результатами моделирования. Без претензий на полноту библиографии, ссылки на статьи, близкие к обсуждаемым темам, даны в тексте книги. Более общее и цельное изложение имеется в обзорных статьях и сборниках, среди которых статьи с участием автора — [10–17]. Моделированию плазмы, в том числе в терминах МГД, посвящены монография Ю. Н. Днестровского и Д. П. Костомарова [18] и недавний обзор [19]. Некоторые подходы к тем же вопросам рассмотрены с точки зрения физика в монографиях А. И. Морозова [20, 21] и в написанном им же большом разделе «Плазмодинамика» в Энциклопедии низкотемпературной плазмы [22].

Из зарубежных работ обратим внимание в первую очередь на два сборника из многотомной серии «Methods in computational physics», переведенных на русский язык [23, 24], которые составлены из работ известных специалистов по разным вопросам математического моделирования плазмы, в том числе представляющим интерес в связи с тематикой данной книги.

Задачи магнитной газодинамики естественным образом структурируются в две группы. К первой группе относятся задачи плазмодинамики, моделирующие процессы в движущейся плазме, изучающие закономерности течений. Они используют аппарат уравнений МГД в его относительно полном объеме, а в некоторых вопросах даже вынуждены выходить за рамки МГД, обращаясь к более сложным ее модификациям. Эта группа представлена в книге изложением общих вопросов аппарата МГД в компактной форме (гл. 1), модифицированных МГД-моделей с акцентом на учет эффекта Холла (гл. 2), математической теории устойчивости (гл. 4) и иллюстрирована примерами математического моделирования в исследованиях течений плазмы в каналах (гл. 6).

Другую группу работ составляют задачи плазмостатики, преследующие цель моделирования равновесных плазменных конфигураций в магнитном поле, которые представляют большой интерес в разработке и исследованиях магнитных ловушек для удержания плазмы, относящихся к программе УТС. От уравнений магнитной газодинамики здесь остается одно уравнение равновесия. Вместе с уравнениями Максвелла для магнитного поля и электрического тока они образуют математический аппарат плазмостатики. В двумерных задачах эти уравнения сводятся к одному скалярному дифференциальному уравнению второго порядка, которое следует рассматривать как самостоятельную главу полулинейных уравнений эллиптического типа, представляющую интерес, помимо плазмостатики, в задачах теории горения и других моделях процессов взаимодействия реакции и диффузии. Здесь имеются нетривиальные результаты о возможных неединственности и несуществовании решений краевых задач и связанный с этим нестандартный подход к устойчивости решений.

Численное исследование равновесных магнитоплазменных конфигураций в терминах модели с уравнением Грэда—Шафранова успешно ведется в течение нескольких десятков лет. Новую струю в эту область внесла идея разработки ловушек нового типа — «Галатей», предложенных А. И. Морозовым, в которых токонесущие проводники, образующие магнитную конфигурацию, погружены в плазму [25].

Математическая модель плоских фигур равновесия с плазмой постоянного давления, окруженных магнитным полем в вакууме, строится с применением методов теории аналитических функций комплексного переменного.

Математическим моделям плазмостатики посвящена гл. 3.

В гл. 5 обсуждаются собственно вычислительные вопросы — о форме записи уравнений, выборе системы единиц и системы координат, о численных методах. Эти вопросы изложены коротко и сопровождаются комментариями, касающимися идеологии методов. Подробный перечень численных методов содержится, как сказано выше, в монографии [9]. Из зарубежных источников можно рекомендовать книгу Е. Оран и Д. Бориса [26]. Избранная форма изложения представляется целесообразной, так как задача превратить книгу в учебник или справочник по численным методам не ставилась. Предполагается, что читатель, ознакомившись с приведенными здесь соображениями, выберет подходящий для своих конкретных целей метод и глубоко освоит его с помощью первоисточника и собственной практики.

Здесь же приведен пример типичной задачи математической физики в конечной области, окруженной вакуумом, постановка граничного условия которой требует, строго говоря, решения внешней задачи Дирихле с уравнением Лапласа. Для разностного аналога задачи построено эффективное нелокальное граничное условие, «перенесенное из бесконечности» методом теории разностных потенциалов В. С. Рябенького.

Наконец, последняя глава представляет собой обзор математических моделей и результатов исследований одного и того же объекта —

течений плазмы в коаксиальных каналах плазменных ускорителей, которые в течение многих лет были предметом работы автора с коллегами и учениками. Эта глава ставит целью иллюстрировать работу изложенных в книге моделей и связанные с ними положения и обстоятельства.

Примеры решения задач на другие темы кратко приведены в тексте непосредственно с обсуждением соответствующих моделей и методов. Наиболее известные примеры относятся к исследованиям Z-пинча — сжатия плазменного цилиндра с продольным электрическим током давлением азимутального магнитного поля этого тока. Z-пинч — одна из ранних идей магнитного удержания. Хотя и не реализованная в полном объеме по причине обнаруженных неустойчивостей, она и сегодня представляет интерес в качестве объекта теории и элемента более сложных проектов и установок. Численное решение одномерной МГД-задачи о динамике Z-пинча, полученное С. И. Брагинским, И. М. Гельфандом и Р. П. Федоренко в 1958 г., — одна из первых в мире работ по вычислительной магнитной газодинамике [27]. Современный взгляд на физику и математическое моделирование Z-пинча изложен в книге В. С. Имшенника и Н. А. Бобровой [28].

Многолетний опыт работы автора в области математического моделирования плазмы и современных научно-технических разработок позволил прийти к выводу, что процесс вовлечения в эти работы молодых специалистов — начинающих научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся по прикладной математике, отнимает на начальном этапе немало времени. Несмотря на достаточное количество печатных изданий, как упомянутых выше, так и не упомянутых, войти в курс всех необходимых вопросов бывает трудно. Первоисточники разбросаны по изданиям, сильно различаются временем своего появления, а также вкусами, стилем и языком авторов. К тому же многие из них труднодоступны, хотя бы за давностью лет.

По этой причине предлагаемая книга ставит перед собой задачу в одном месте и в одном стиле изложить обсуждаемые здесь вопросы и сделать их доступными начинающему специалисту, желающему работать в области численного моделирования плотной плазмы. Хотелось бы, чтобы, войдя в курс дела и сориентировавшись в новой для него области знаний, читатель смог относительно быстро углубиться в интересующие его подробности с помощью, например, указанных в тексте литературных ссылок.

Коллективные работы, послужившие материалом для написания книги, выполнены в Институте прикладной математики АН СССР (ныне ИПМ им. М. В. Келдыша РАН) в тесном контакте с Институтом атомной энергии им. И. В. Курчатова (ныне РНЦ «Курчатовский институт»). Им способствовал научный и творческий климат обоих коллективов, обязанный выдающимся руководителям М. В. Келдышу, А. Н. Тихонову, А. П. Александрову, которые были в курсе этих работ и поддерживали их. Расчеты в области физики плазмы стали постоянной темой сотрудничества обоих институтов с конца 1950-х гг. по инициативе М. А. Леонтовича и И. М. Гельфанда. Впоследствии авторы работ ощущали доброжелательное влияние Б. Б. Кадомцева. Инициатором разработок некоторых магнитных ловушек для удержания плазмы и нескольких поколений плазменных ускорителей является А. И. Морозов. Он — автор физической постановки многих рассмотренных ниже задач и постоянный участник работ по моделированию и расчетам. Вычислительные работы по МГД-устойчивости проведены в основном по инициативе Л. С. Соловьева.

В проведении работ участвовали коллеги автора по ИПМ Н. М. Зуева, Н. И. Герлах, В. В. Палейчик, М. С. Михайлова и его ученики В. В. Савельев, А. М. Заборов. А. Н. Козлов, К. П. Горшенин, Г. А. Калугин, И. В. Белова, Т. А. Ратникова, Н. Б. Петровская, Н. С. Жданова. Следует подчеркнуть роль Н. М. Зуевой, которой выполнен большой цикл расчетов МГД-устойчивости. Ее совместные с Л. С. Соловьевым работы в значительной мере определили план и содержание гл. 4. Безусловно полезными оказались постоянные обсуждения разных этапов работы с коллегами в ИПМ С. К. Годуновым, В. С. Рябеньким, О. В. Локуциевским, В. Ф. Дьяченко, Р. П. Федоренко, Н. Н. Ченцовым, В. С. Имшенником, А. В. Забродиным, К. И. Бабенко, В. В. Русановым, М. Б. Гавриковым, Л. Г. Страховской, А. А. Самарским, С. П. Курдюмовым, Б. Л. Рождественским, Л. М. Дегтяревым, А. П. Фаворским, Ю. П. Поповым, В. М. Чечеткиным, Б. Н. Четверушкиным, Е. И. Левановым, Т. А. Сушкевич и за пределами ИПМ с А. Г. Куликовским, Г. А. Любимовым, А. А. Барминым, Д. П. Костомаровым, Г. В. Долголевой, Н. А. Кудряшовым, В. А. Курнаевым, В. И. Терёшиным, В. М. Асташинским. Помощь в наборе рукописи оказала Л. И. Михайлова.

Выражаю глубокую благодарность своим учителям, коллегам, ученикам и друзьям, которые в той или иной степени способствовали созданию этой книги.

Я благодарен также Российскому фонду фундаментальных исследований, поддержавшему издание книги (грант № 08-01-07018) и работы, которые определили значительную часть ее содержания (гранты № 06-01-00312 и предыдущие, начиная с 1994 г.).

Глава 1

МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

1.1. ПЛАЗМА КАК ОБЪЕКТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Математические модели плазмы рассматривают ее как сплошную среду, если она достаточно плотная в смысле известного критерия — длина свободного пробега частиц намного меньше характерного размера исследуемого явления. В этом случае среда может быть представлена едиными макропараметрами: скоростью, плотностью, давлением, температурой и др. В отличие от жидкости и газа плазма ионизована, т. е. состоит из двух компонент — электронов и положительно заряженных ионов, локальные отличия в движении которых делают ее электропроводной. В результате она характеризуется свойствами не только газа, но и проводника, в котором электрический ток индуцирует магнитное поле и взаимодействует с ним. Среда в целом предполагается электрически нейтральной (точнее «квазинейтральной»): суммарные заряды каждой из компонент в единице объема близки друг к другу. Если ионы однозарядны, то их концентрация близка к концентрации электронов $n^i \approx n^e$, а в случае заряда ионов кратности Z следует писать $Zn^i \approx n^e$. Нарушение этого предположения в условиях относительно высокой плотности среды означало бы наличие гигантских электрических полей и, следовательно, сил взаимодействия в конечных объемах.

Уравнения динамики плотной плазмы, следуя логике механики сплошных сред, отражают в первую очередь законы сохранения массы, импульса и энергии в любом конечном элементе объема [4]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\,\mathbf{v} = \mathbf{0}, \\ &\frac{\partial \rho\,\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\Pi} = 0, \\ &\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь ρ и $\mathbf{v}$ — плотность и скорость среды, $\hat{\Pi}$ — тензор плотности потока импульса, W — полная энергия единицы объема, $\mathbf{Q}$ — плотность потока энергии. В декартовых координатах тензор $\hat{\Pi}$ имеет вид

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \eta_{ij} - \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_j - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ij}\right). \tag{1.2}$$

Три первых слагаемых хорошо известны из газодинамики (см. например, [29]) и описывают перенос импульса движущейся средой, напряжения сил давления p и вязкости η_{ij}. В простейших предположениях тензор вязкости определяется неоднородностью скорости в пространстве

$$\eta_{ij} = \eta_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \eta_2 \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{1.3}$$

с коэффициентами первой η_1 и второй η_2 вязкостей. Последнее слагаемое в (1.2) называют максвелловским тензором напряжений, обязанным силе Ампера $(1/c)\,\mathbf{j} \times \mathbf{H}$, действующей на проводник с током в магнитном поле [2]. Векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{H}$ означают плотность электрического тока и напряженность магнитного поля.

Полная энергия

$$W = \rho\varepsilon + \rho\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} \tag{1.4}$$

складывается из внутренней (тепловой), кинетической и магнитной, отнесенных каждая к единице объема. Величина ε соответствует внутренней энергии единицы массы. Плотность потока энергии

$$\mathbf{Q} = \left(\varepsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \rho\,\mathbf{v} + p\,\mathbf{v} - \hat{\eta}\,\mathbf{v} + \mathbf{q} + \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{1.5}$$

включает в себя перенос тепловой и кинетической энергии движущейся средой, работу сил давления и вязкого трения, поток тепла, обязанный теплопроводности

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \tag{1.6}$$

где T — температура. Последнее слагаемое в (1.5) — вектор Пойнтинга

$$\frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{1.7}$$

описывает поток электромагнитной энергии. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ связана с током с помощью закона Ома

$$\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{H}\,, \tag{1.8}$$

где σ — проводимость плазмы. Правая часть (1.8) представляет собой электрическое поле в системе координат, движущейся со средой со скоростью $\mathbf{v}$.

Уравнения (1.1) содержат по сравнению с газодинамикой две дополнительные неизвестные векторные величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{H}$ и потому не образуют замкнутую систему. Чтобы ее замкнуть, воспользуемся уравнениями Максвелла для электромагнитного поля [30]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \\ &\operatorname{div}\mathbf{H} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Из них, очевидно, следует, что третье уравнение (1.9) выполнено тождественно по времени, если оно выполнено в какой-либо (например, начальный) момент времени. Это в дальнейшем всегда предполагается.

При описании макроскопических процессов в плотной плазме пренебрегают «током смещения» $\partial \mathbf{E}/c\partial t$ во втором уравнении Максвелла, величина которого имеет порядок релятивистских поправок (см. гл. 2). Тогда из уравнений (1.9) после подстановки в них электрического поля $\mathbf{E}$ из (1.8) следует уравнение индукции магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) - \operatorname{rot}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right). \tag{1.10}$$

Если проводимость плазмы σ конечна, его называют также уравнением диффузии магнитного поля. Количественной характеристикой диффузии является коэффициент при вторых производных (операторе Лапласа, если $\sigma = \mathrm{const}$)

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \tag{1.11}$$

который называется магнитной вязкостью.

Завершить замыкание системы рассматриваемых уравнений следует уравнением состояния, аналогичным уравнению Клапейрона для совершенного газа:

$$p = 2knT = (\gamma - 1)\rho\varepsilon; \quad \varepsilon = C_{\mathbf{v}}T; \quad C_{\mathbf{v}} = \frac{2k}{(\gamma-1)m^i}. \tag{1.12}$$

Здесь n — концентрация (число частиц в единице объема) электронов или однозарядных ионов, m^i — масса иона, k — постоянная Больцмана, γ — показатель адиабаты. Последний обозначен γ в силу газодинамической традиции: плазма — «одноатомный газ», и в практических задачах $\gamma = 5/3$. Коэффициент 2 при известном из кинетической теории газов выражении knT указывает на то, что p — суммарное давление ионной и электронной компонент плазмы, температуры и концентрации[1] которых предположены одинаковыми (более сложные постановки вопросов обсуждаются в гл. 2).

Теперь законы сохранения (1.1) с уравнениями (1.10) и (1.12) образуют замкнутую систему уравнений, если иметь в виду расшифровку обозначений (1.2)–(1.6) и «укороченное» (без тока смещения) уравнение (1.9). Она называется системой уравнений магнитной газодинамики[2] (МГД) и является обобщением уравнений обычной газодинамики, которая может рассматриваться как частный случай МГД в отсутствие магнитного поля ($\mathbf{H} \equiv 0$).

Уравнения МГД могут иметь разные формы записи, которые используются в зависимости от характера и особенностей конкретных задач. Консервативная (дивергентная) форма уравнений (1.1) наиболее адекватна упомянутым выше физическим законам сохранения. Поэтому в решении сложных задач с возможными разрывами или границами разных сред именно ее следует рекомендовать при выборе или конструировании численного алгоритма, несмотря на кажущийся громоздким математический аппарат. В теоретических и расчетных работах, посвященных относительно простым задачам с гладкими решениями, употребительны простые и компактные неконсервативные формы в первую очередь уравнений движения и энергии. Приведем одну из наиболее кратких часто встречающуюся в научной литературе форму записи МГД-уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\
\rho \frac{d\,\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \operatorname{div} \hat{\eta}; \\
\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{j^2}{\sigma} + \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + \sum \eta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}; \\
\frac{\partial\,\mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \operatorname{rot}\left(\frac{c\,\mathbf{j}}{\sigma}\right); \\
p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} e^{s/C_{\mathbf{v}}} = (\gamma - 1)\rho\varepsilon; \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}; \\
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

Здесь s — энтропия. Левая часть третьего уравнения может быть записана также в терминах внутренней энергии (температуры)

[1] Однозарядных ионов.

[2] В литературе чаще встречается термин «магнитная гидродинамика» без требования несжимаемости. Ниже везде следует считать, что оба термина означают одно и тоже.

без введения энтропии как новой функции. Легко проверить, что на гладких решениях уравнений (1.13)

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\varepsilon\, \mathbf{v}) + p \operatorname{div} \mathbf{v} \,. \tag{1.14}$$

Следует заметить, что практический опыт решения вычислительных задач магнитной газодинамики вынуждает в некоторых случаях смягчать известную логику противопоставления консервативной и простейшей форм уравнений механики сплошных сред. В задачах, формально требующих консервативной формы, тепловая энергия $\rho\varepsilon$ должна определяться вычитанием из полной энергии (1.4) ее кинетической и магнитной составляющих. Однако в ряде содержательных примеров эти две последние существенно больше тепловой, и она оказывается разностью двух относительно больших величин. Как известно, в этих случаях разность может иметь заметную погрешность, в частности, температура — оказаться отрицательной. По этой причине уравнению энергии иногда предпочтительнее придать форму (1.13) с последним вариантом (1.14) левой части, т. е. отнести в правую часть единственное неконсервативное слагаемое $p \operatorname{div} \mathbf{v}$. Тогда разностные схемы монотонного типа (см. гл. 5) обеспечивают на практике положительность температуры.

1.2. ТИП УРАВНЕНИЙ МГД. ХАРАКТЕРИСТИКИ. СООТНОШЕНИЯ НА НИХ. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

Уравнения магнитной газодинамики образуют квазилинейную систему, вообще говоря, второго порядка. Вторые производные по пространственным переменным содержатся в слагаемых правых частей уравнений (1.13), которые описывают диссипативные процессы: вязкость, теплопроводность и конечную проводимость плазмы. Последнюю называют иногда магнитной вязкостью, измеряемой коэффициентом ν_m (1.11). Из трех перечисленных видов диссипаций именно магнитной вязкости уделяется ниже больше внимания по сравнению с двумя первыми, которыми в весьма широком классе МГД-моделей можно пренебречь. С другой стороны вязкость и теплопроводность играют в математических вопросах рассматриваемой здесь одножидкостной МГД такую же роль как в обычной газодинамике, где они хорошо изучены.

Благодаря вторым производным система уравнений (1.13) — параболического типа, или, точнее говоря, параболически вырожденная: часть характеристик системы параллельны плоскости $t = \text{const}$, т. е. соответствуют бесконечной скорости звука [31]. Вырождение тем