ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

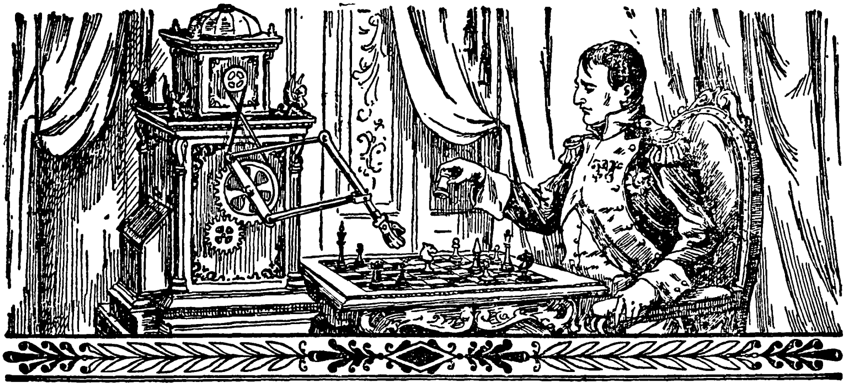
Не следует на эту книгу смотреть как на легкопонятный учебник алгебры для начинающих. Подобно прочим моим сочинениям той же серии, «Занимательная алгебра» — прежде всего не учебное руководство, а книга для вольного чтения. Читатель, которого она имеет в виду, должен уже обладать некоторыми познаниями в алгебре, хотя бы смутно усвоенными или полузабытыми. «Занимательная алгебра» ставит себе целью уточнить, воскресить и закрепить эти разрозненные и непрочные сведения, но главным образом — воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и возбудить охоту самостоятельно пополнить по учебным книгам пробелы своей подготовки. В этом отношении установка «Занимательной алгебры» противоположна задачам такой, например, книги, как «Числа и фигуры» Радемахера и Теплица[1], которая не требует от читателя «помнить то, чему мы учились по математике в юные годы». Моя книга, напротив, стремится помочь закреплению школьных знаний и навыков.

Чтобы придать предмету привлекательность и поднять к нему интерес, я пользуюсь в книге разнообразными средствами: задачами с необычными сюжетами, подстрекающими любопытство, занимательными экскурсиями в область истории математики, неожиданными применениями алгебры к практической жизни и т. п.

По объёму охватываемого алгебраического материала книга не выходит из рамок школьной программы, затрагивая почти все её отделы. Соответственно своему назначению «Занимательная алгебра» избегает трудных теоретических вопросов.

---

[1] Издание Главной редакции научно-популярной и юношеской литературы, ОНТИ, 1936.



ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

ПЯТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», желая подчеркнуть, что к четырём общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возведение в степень и два ему обратных действия.

Наши алгебраические беседы начнутся с «пятого действия» — возведения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы очень часто сталкиваемся с ним в реальной действительности. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объёмов, где обычно приходится возводить числа во вторую и третью степени. Далее: сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет, звук ослабевают пропорционально второй степени расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг Солнца (и спутников вокруг планет) связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времён обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, а более высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчёты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвёртыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода) —даже с шестой степенью. Исследуя силу, с какой текучая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекатывать по своему ложу камни в 4^6, т. е. в 4096 раз более тяжёлые, чем медленная[1].

С ещё более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскалённого тела — например, нити накала в электрической лампочке — от температуры. Общая яркость растёт при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном — с тридцатой степенью температуры («абсолютной», т. е. считаемой от минус 273°). Это означает, что тело, нагретое, например, от 2000 до 4000° (абсолютных), т. е. в 2 раза сильнее, становится ярче в 2^{12}, иначе говоря, более чем в 4000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы ещё будем говорить в другом месте.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной-двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно при вычислениях. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

9 500 000 000 000 000 000.

[1] Подробнее об этом см. в моей книге «Занимательная механика», гл. IX.

При выполнении астрономических расчётов приходится к тому же выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Рассмотренное расстояние изобразится в этом случае числом, имеющим на пять нулей больше:

$$950\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Массы звёзд выражаются ещё большими числами, особенно если их выражать, как требуется для многих расчётов, в граммах. Масса нашего Солнца в граммах равна

$$1\,983\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000.$$

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко ещё не самые большие астрономические числа.

Пятое математическое действие даёт вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собой определённую степень десяти:

$$100 = 10^2,\ 1000 = 10^3,\ 10\,000 = 10^4 \text{ и т. д.}$$

Приведённые раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

первый ... ... $950 \cdot 10^{21}$,
второй ... ... $1983 \cdot 10^{30}$.

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчётов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $950 \cdot 1983 = 1\,883\,850$ и поставить его впереди множителя $10^{21+30} = 10^{51}$:

$$950 \cdot 10^{21} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 188\,385 \cdot 10^{52}.$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 21 нулём, затем с 30 и, наконец, с 52 нулями, — не только удобнее, но и надёжнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

СКОЛЬКО ВЕСИТ ВЕСЬ ВОЗДУХ?

Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчёт: определим, во сколько раз масса земного шара больше массы всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силой около килограмма. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 кв. см, равен 1 кг. Атмосферная оболочка Земли как бы составлена вся из таких воздушных столбов; их столько, сколько кв. сантиметров содержит поверхность нашей планеты; столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что величина поверхности земного шара равна 510 млн. кв. км, т. е. $51 \cdot 10^7$ кв. км.

Рассчитаем, сколько квадратных сантиметров в квадратном километре. Линейный километр содержит 1000 м, по 100 см в каждом, т. е. равен 10^5 см, а кв. километр содержит $(10^5)^2 = 10^{10}$ кв. сантиметров. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17}$$

кв. сантиметров. Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим:

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом

$$6 \cdot 10^{21} \text{ тонн.}$$

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее её воздушной оболочки, производим деление:

$$6 \cdot 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

т. е. масса атмосферы составляет примерно миллионную долю массы земного шара[1].

---

[1] Знак $\approx$ означает приближённое равенство.

ГОРЕНИЕ БЕЗ ПЛАМЕНИ И ЖАРА

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при *всякой* температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) *уменьшается в два раза*.

Применим сказанное к реакции соединения древесины с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает ежесекундно 1 г древесины. Во сколько времени сгорит 1 г дерева при 20°? Мы уже знаем, что при температуре, которая на $580 = 58 \cdot 10$ градусов ниже, скорость реакции меньше в

$$2^{58} \text{ раз,}$$

т. е. 1 г дерева сгорит в 2^{58} секунд.

Скольким годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 повторных умножений на 2 и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

Следовательно,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot \left(2^{10}\right)^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 млн, т. е. $3 \cdot 10^7$, секунд; поэтому

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : \left(3 \cdot 10^7\right) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}.$$

Десять миллиардов лет! Вот во сколько примерно времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево, уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение орудий добывания огня ускорило этот страшно медленный процесс в миллиарды раз.

РАЗНООБРАЗИЕ ПОГОДЫ

Задача

Будем характеризовать погоду только по одному признаку — покрыто ли небо облаками или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно недель с различным чередованием погоды?

Казалось бы, немного: пройдёт месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в неделе будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной неделе чередоваться ясные и пасмурные дни?

Решение

Первый день недели может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две комбинации.

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный,
ясный и пасмурный,
пасмурный и ясный,
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение двух дней 2^2 различного рода чередований. В трёхдневный промежуток каждая из четырёх комбинаций первых двух дней сочетается с двумя комбинациями третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

В течение четырёх дней число чередований достигнет

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

За пять дней возможно 2^5, за шесть дней 2^6 и, наконец, за неделю $2^7 = 128$ различного рода чередований.

Отсюда следует, что недель с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 128. Спустя $128 \cdot 7 = 896$ дней необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 896 дней — срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целых 2 года, даже больше (2 года и 166 дней), в течение которых ни одна неделя по погоде не будет похожа на другую.

ЗАМО́К С СЕКРЕТОМ

Задача

В одном советском учреждении обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но, чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (36 букв) устанавливались на определённое слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все комбинации букв в кружках. На составление одной комбинации требовалось 3 секунды времени.

Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

Решение

Подсчитаем, сколько всех буквенных комбинаций надо было перепробовать.

Каждая из 36 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 36 букв второго кружка. Значит, двухбуквенных комбинаций возможно

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

К каждой из этих комбинаций можно присоединить любую из 36 букв третьего кружка. Поэтому трёхбуквенных комбинаций возможно

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

Таким же образом определяем, что четырёхбуквенных комбинаций может быть 36^4, а пятибуквенных 36^5, или 60 466 176. Чтобы составить эти 60 с лишним миллионов комбинаций, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждую,

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

секунд. Это составляет более 50 000 часов, или почти 6300 восьмичасовых рабочих дней — более 20 лет.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, имеется 10 на 6300, или 1 из 630. Это очень малая вероятность.

СУЕВЕРНЫЙ ВЕЛОСИПЕДИСТ

Задача

Некто купил себе велосипед, желая выучиться ездить на нём. Владелец велосипеда оказался на редкость суеверным человеком. Узнав о существовании повреждения велосипеда, именуемого «восьмёркой», он решил, что удачи ему не будет, если ему достанется велосипедный номер, в котором будет хоть одна цифра 8. Однако, идя за получением номера, он утешал себя следующим рассуждением. В написании каждого числа могут участвовать 10 цифр: 0, 1, ..., 9. Из них «несчастливой» является только цифра 8. Поэтому имеется лишь 1 шанс из 10 за то, что номер окажется «несчастливым».

Правильно ли это рассуждение?

Решение

Велосипедные номера — шестизначные. Всего имеется 999 999 номеров: от 000 001, 000 002 и т. д. до 999 999. Подсчитаем, сколько существует «счастливых» номеров. На первом месте может стоять любая из девяти «счастливых» цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. На втором — также любая из этих девяти цифр. Поэтому существует $9 \cdot 9 = 9^2$ «счастливых» двухзначных комбинаций. К каждой из этих комбинаций можно приписать (на третьем месте) любую из девяти цифр, так что «счастливых» трёхзначных комбинаций возможно $9^2 \cdot 9 = 9^3$.

Таким же образом определяем, что число шестизначных «счастливых» комбинаций равно 9^6. Следует, однако, учесть, что в это число входит комбинация 000 000, которая непригодна в качестве велосипедного номера. Таким образом, число «счастливых» велосипедных номеров равно $9^6 - 1 = 531\,440$, что составляет немногим более 53 % всех номеров, а не 90 % , как предполагал велосипедист.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что среди семизначных номеров имеется больше «несчастливых» номеров, чем «счастливых».

ИТОГИ ПОВТОРНОГО УДВОЕНИЯ

Разительный пример чрезвычайно быстрого возрастания самой маленькой величины при повторном её удвоении даёт общеизвестная легенда о награде изобретателю шахматной игры[1]. Не останавливаясь на этом классическом примере, приведу другие, не столь широко известные.

Задача

Инфузория парамеция каждые 27 часов (в среднем) делится пополам. Если бы все нарождающиеся таким образом инфузории оставались в живых, то сколько понадобилось бы времени, чтобы потомство одной парамеции заняло объём, равный объёму Солнца?

Данные для расчёта: 40-е поколение парамеций, не погибающих после деления, занимает в объёме 1 куб. м; объём Солнца примем равным 10^{27} куб. м.

Решение

Задача сводится к тому, чтобы определить, сколько раз нужно удваивать 1 куб. м, чтобы получить объём в 10^{27} куб. м. Делаем преобразования:

---

[1] См. мою книгу «Живая математика», гл. VII.

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 = 2^{90},$$

так как $2^{10} \approx 1000$.

Значит, 40-е поколение должно претерпеть ещё 90 делений, чтобы вырасти до объёма Солнца. Общее число поколений, считая от первого, равно $40 + 90 = 130$. Легко сосчитать, что это произойдёт на 147-е сутки.

Заметим, что фактически одним микробиологом (Метальниковым) наблюдалось 8061 деление парамеции. Предоставляю читателю самому рассчитать, какой колоссальный объём заняло бы последнее поколение, если бы ни одна инфузория из этого количества не погибла...

Вопрос, рассмотренный в этой задаче, можно предложить, так сказать, в обратном виде.

Вообразим, что наше Солнце разделилось пополам, половина также разделилась пополам и т. д. Сколько понадобится таких делений, чтобы получились частицы величиной с инфузорию?

Хотя ответ уже известен читателям (130), он всё же поражает своею несоразмерной скромностью.

Мне предложили ту же задачу в такой форме.

Листок бумаги разрывают пополам, одну из полученных половин снова делят пополам и т. д. Сколько понадобится делений, чтобы получить частицы атомных размеров?

Допустим, что бумажный лист весит 1 г, и примем для веса атома величину порядка $\frac{1}{10^{24}}$ г. Так как в последнем выражении можно заменить 10^{24} приближённо равным ему выражением 2^{80}, то ясно, что делений пополам потребуется всего 80, а вовсе не миллионы, как приходится иногда слышать в ответ на вопрос этой задачи.

В 100 000 РАЗ БЫСТРЕЕ

Электрический прибор, называемый *триггером,* содержит две электронные лампы (т. е. примерно такие лампы, которые применяются в радиоприёмниках). Ток в триггере может идти только через одну лампу: либо через «левую», либо через «правую». Триггер имеет два контакта, к которым может быть извне подведён кратковременный электрический сигнал (импульс), и два контакта, через которые с триггера поступает ответный импульс. В момент прихода извне электрического импульса триггер переключается: лампа, через которую шёл ток, выключается, а ток начинает идти уже через другую лампу. Ответный импульс подаётся триггером в тот момент, когда выключается правая лампа и включается левая.

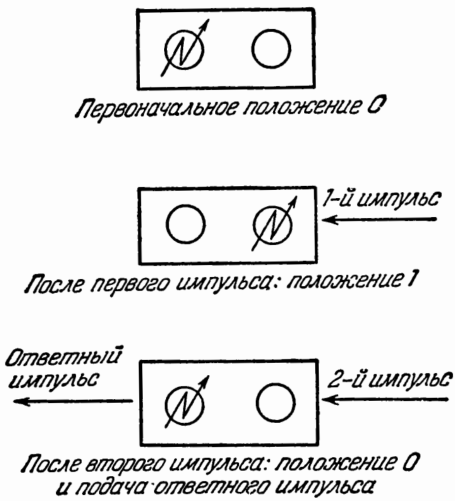


Рис. 1.

Проследим, как будет работать триггер, если к нему подвести один за другим несколько электрических импульсов. Будем характеризовать состояние триггера по его *правой* лампе: если ток через правую лампу *не идёт*, то скажем, что триггер находится в положении 0, а если ток через правую лампу идёт — то в положении 1.

Пусть первоначально триггер находился в положении 0, т. е. ток шёл через левую лампу (рис. 1). После первого импульса ток будет идти через правую лампу, т. е. триггер переключится в положение 1. При этом ответного импульса с триггера не поступит, так как ответный сигнал подаётся в момент выключения правой (а не левой) лампы.

После второго импульса ток будет идти уже через левую лампу, т. е. триггер снова попадёт в положение 0. Однако при этом триггер подаст ответный сигнал (импульс).

В результате (после двух импульсов) триггер снова придёт к начальному состоянию. Поэтому после третьего импульса триггер (как и после первого) попадёт в положение 1, а после четвёртого (как и после второго) — в положение 0 с одновременной подачей ответного сигнала и т. д. После каждых двух импульсов состояния триггера повторяются.

Представим себе теперь, что имеются несколько триггеров и что импульсы извне подводятся к первому триггеру, ответные импульсы первого триггера подводятся ко второму, ответные импульсы второго — к третьему и т. д. (на рис. 2 триггеры расположены один за другим справа налево). Проследим, как будет работать такая цепочка триггеров.

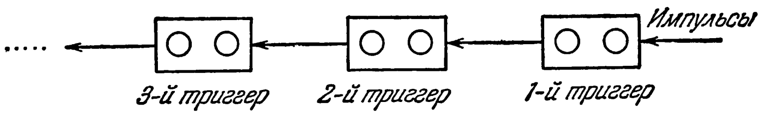


Рис. 2.

Пусть сначала все триггеры находились в положениях 0. Например, для цепочки, состоящей из пяти триггеров, мы имели комбинацию 00000. После первого импульса первый триггер (самый правый) попадёт в положение 1, а так как ответного импульса при этом не будет, то все остальные триггеры останутся в положениях 0, т. е. цепочка будет характеризоваться комбинацией 00001. После второго импульса первый триггер выключится (попадает в положение б), но подаст при этом ответный импульс, благодаря чему включится второй триггер. Остальные триггеры останутся в положениях 0, т. е. получится комбинация 00010. После третьего импульса включится первый триггер, а остальные не изменят своих положений. Мы будем иметь комбинацию 00011. После четвёртого импульса выключится первый триггер, подав ответный сигнал; от этого ответного импульса выключится второй триггер и также даст ответный импульс; наконец, от этого последнего импульса включится третий триггер. В результате мы получим комбинацию 00100.

Аналогичные рассуждения можно продолжать и далее. Посмотрим, что при этом получается:

1-й импульс – комбинация 00001
2-й импульс – комбинация 00010
3-й импульс – комбинация 00011
4-й импульс – комбинация 00100
5-й импульс – комбинация 00101
6-й импульс – комбинация 00110
7-й импульс – комбинация 00111
8-й импульс – комбинация 01000
………………………………………

Мы видим, что цепочка триггеров «считает» поданные извне сигналы и своеобразным способом «записывает» число этих сигналов. Нетрудно видеть, что «запись» числа поданных импульсов происходит не в привычной для нас десятичной системе, а в *двоичной* системе счисления.

Всякое число в двоичной системе счисления записывается нулями и единицами. Единица следующего разряда не в 10 раз (как в обычной десятичной записи), а только в 2 раза больше единицы предыдущего разряда. Единица, стоящая в двоичной записи на последнем (самом правом) месте, есть обычная единица. Единица следующего разряда (на втором месте справа) означает двойку, следующая единица означает четвёрку, затем восьмёрку и т. д.

Например, число $19 = 16 + 2 + 1$ запишется в двоичной системе в виде 10011.

Итак, цепочка триггеров «подсчитывает» число поданных сигналов и «записывает» его по двоичной системе счисления. Отметим, что переключение триггера, т. е. регистрация одного приходящего импульса, продолжается всего... *десятимиллионные доли секунды*! Современные триггерные счётчики могут «подсчитывать» до 1 000 000 импульсов в секунду и более. Это примерно в 100 000 раз быстрее, чем счёт, который может проводить человек без всяких приборов: глаз человека может отчётливо различать сигналы, следующие друг за другом не чаще, чем через 0,1 секунду.

Если составить цепочку из двадцати триггеров, т. е. записывать число поданных сигналов не более чем двадцатью цифрами двоичного разложения, то можно «считать» до $2^{20} - 1$; это число больше миллиона. Если же составить цепочку из 64 триггеров, то можно записать с их помощью знаменитое «шахматное число».