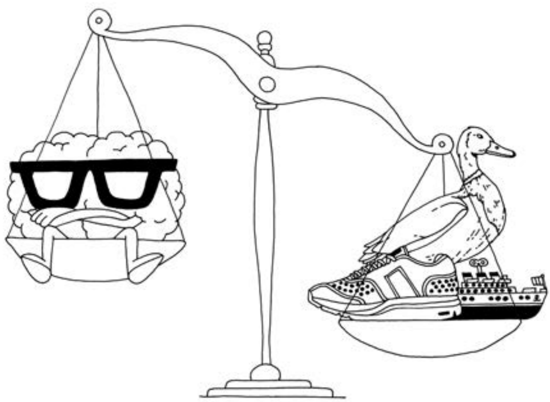
ГЛАВА 3

«Пернатая» математика

Практические задачи



В этой главе я собрал головоломки, в основе которых лежит происходящее в реальном мире. В одних задействованы знакомые объекты, например чаши, кувшины, фитили и картофель. Другие описывают ситуации из повседневной жизни, такие как соревнования по бегу, полет на самолете, а также поход за покупками. С этой старейшей из всех задач в этой книге мы и начнем.

51

Сотня кур

Если петух стоит 5 денежных единиц, курица 4 единицы, а цыпленок ¼ единицы, сколько петухов, кур и цыплят можно купить за 100 единиц так, чтобы всего получить 100 пернатых?

Китайский математик Чжэнь Луань придумал эту задачу в середине VI века, хотя впервые подобные задачи (как приобрести 100 животных трех видов за 100 денежных единиц) появились столетием ранее, и тоже в Китае.

Это замечательная головоломка: удивительно лаконичная, с неочевидным решением. Проверив в уме несколько чисел, вы совсем запутаетесь. Любимая загадка китайцев о сотне животных распространилась в Индии, на Ближнем Востоке и в Европе. Сборник головоломок Алкуина под названием «Задачи для развития молодого ума», о котором я уже упоминал, содержит три варианта этой головоломки: продаются кабаны, свинки и поросята по десять, пять и половине динария; лошади, коровы и овцы — по три солида*, одному и двадцать четвертой части солида; верблюды, ослы и овцы по пять, одному и двадцатой части солида. Последний вариант, возможно, отдавая должное происхождению головоломки, Алкуин называет задачей восточного торговца.

Современные читатели при решении подобных задач сразу же представят их в виде уравнений. Если вы покупа-

* Динарий — римская серебряная монета, ходившая во времена Республики и начала Империи, впервые была отчеканена в 268 г. до н. э. Солид — римская золотая монета, выпущенная в 309 г. императором Константином. *Прим. ред.*

ете x петухов, y кур и z цыплят, то вопрос Чжэнь Луаня можно перефразировать так:

1. $x + y + z = 100$ (поскольку всего должно быть 100 птиц).
2. $5x + 4y + z/4 = 100$ (потому что общая сумма составляет 100 единиц).

Решив эти уравнения, вы получите ответ.

Чжэнь Луань, Алкуин и их современники решали задачи такого рода посредством догадок, проб и ошибок. У них не было возможности использовать алгебру, поскольку после крушения античной цивилизации эта наука надолго прервала свое развитие и начала возрождаться сначала на Востоке с IX века, а потом и в Европе. Однако решать подобные задачи с помощью уравнений гораздо проще и, пожалуй, интереснее. В задачах о сотне животных мне нравится именно то, что они одними из первых демонстрировали огромную силу алгебраических методов. Эти головоломки сыграли определенную роль в развитии и распространении новых математических методов, причем не только в виде блестящего доказательства их эффективности, но и в качестве интересных логических проблем, которые потребовали от математиков средних веков и эпохи Возрождения более глубокого анализа.

Алгебра — раздел математики, в котором числа и величины представлены в уравнениях в виде символов, например x, y и z. Слово «алгебра» происходит от арабского *al-jabr* — «восстановление». Багдадский ученый IX столетия Аль-Хорезми использовал это слово для обозначения математической операции, которая в современной науке подразумевает взятие какого-нибудь члена из одной части уравнения и его «восстановление» в другой. С помощью восстановления и других операций Аль-Хорезми разработал методы решения простых уравнений.

Египетский математик Абу Камил, живший в IX–X веках, написал ряд работ с подробным анализом идей Аль-Хорезми. В одной из них шла речь о задачах с покупкой 100 птиц за 100 денежных единиц. «Мне известен тип задач, который может показаться захватывающим, оригинальным и притягательным людям как высокого, так и низкого положения, как ученым, так и безграмотным, — писал он. — Однако, обсуждая друг с другом решения, люди обмениваются не совсем верными суждениями и догадками, поскольку не видят наглядного принципа или системы… Чтобы сделать этот вопрос понятнее, я решил написать книгу».

Давайте решим эту задачу. У нас есть два уравнения:

1. $x + y + z = 100$ (поскольку всего должно быть 100 птиц).

2. $5x + 4y + z/4 = 100$ (потому что общая сумма составляет 100 единиц).

Как правило, для решения подобных уравнений (в школе их называют *системой уравнений*) необходимо столько уравнений, сколько есть переменных. Например, для трех переменных нам понадобится три уравнения.

В данном случае у нас два уравнения. Однако уравнение предоставляет нам дополнительную информацию, позволяющую решить задачу. Мы можем исходить из того, что птицы не продаются половинами, четвертями и что их количество не может обозначаться отрицательной величиной. (Давайте предположим, что нам необходимо купить как минимум одну особь.) Следовательно, значения x, y и z должны быть натуральными числами и, разумеется, меньше 100.

Приступим к работе. Умножьте второе уравнение на четыре, чтобы избавиться от дроби:

(1) $20x + 16y + z = 400$.

После нескольких операций «восстановления» получится, что

$z = 400 - 20x - 16y$.

Подставив это значение вместо z в уравнении (1), получим:

(2) $x + y + 400 - 20x - 16y = 100$.

Это уравнение можно привести к такому виду:

$19x + 15y = 300$.

Теперь у нас есть одно уравнение с двумя переменными, которое можно решить с учетом других условий.

Единственные положительные целые значения x и y, которые мы можем в него подставить, найденные методом проб и ошибок, — это $x = 15$ и $y = 1$. (Обратите внимание: 300 делится на 5, а значит, $19x + 15y$ тоже делится на 5, поэтому x должно быть кратным 5. Этому условию отвечают только значения $x = 5$, 10 и 15, но подстановка первых двух значений не позволяет решить уравнение.) Следовательно, $z = 100 - x - y = 100 - 16 = 84$.

Ответ: за 100 денежных единиц можно купить 15 петухов, 1 курицу и 84 цыпленка.

В своем труде Абу Камил пишет, что в зависимости от цены трех птиц у этой задачи иногда есть одно решение (как в данном примере), а порой ни одного или, наоборот, несколько. В пример он приводит следующую задачу.

52

Сотня птиц

Если утка стоит 2 драхмы*, голубь — половину, а куры треть драхмы, сколько уток, кур и голубей у вас будет, когда вы купите 100 птиц за 100 драхм?

Помимо изобретения новой математики средневековые арабские ученые также приняли индийскую систему счисления, состоящую из десяти цифр, включая ноль. Арабские цифры (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0) пришли в Европу примерно в XIII веке. Одной из первых европейских книг, где они использовались, была Liber Abaci («Книга абака», или «Трактат

* Драхма — денежная единица в Древней Греции, а также в современной Греции до введения евро. *Прим. ред.*

по арифметике») итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибона́ччи). Этот труд содержит сведения о вычислениях и измерениях, а также математические головоломки, в том числе задачи о птицах, такие как следующая.

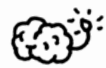
Купите 30 птиц за 30 динариев: куропаток по 3 динария, голубей по 2 динария и воробьев по ½ динария. Эта задача решается замечательным образом, поэтому предоставляю вам возможность сделать это самостоятельно.

На протяжении трех следующих столетий почти все авторитетные математики эпохи Возрождения предложили свои варианты этой задачи, где шла речь о покупке дроздов, жаворонков, иволг, мухоловок, скворцов, гусей, каплунов и прочих пернатых. Такие задания оказались не только занимательным развлечением, но и обеспечили нас данными об истории южно-европейской орнитологии и гастрономии.

Решив одну задачу о птицах, вы сможете решить их все; для этого необходимо просто записать условия в виде системы уравнений и найти ответ в виде целых чисел.

Во многих других головоломках ситуацию также следует представить как систему уравнений. Как правило, в них не хватает уравнений для всех переменных, поэтому при решении приходится полагаться на тщательно продуманный метод проб и ошибок или математическое озарение. Следующая задача — моя любимая, причем не только потому, что количество данных кажется невероятно скудным (всего два уравнения на *четыре* переменные), но и потому, что фигурирующее в ней число имеет непосредственное отношение к известному бренду.

53

7-ELEVEN* 

Покупатель заходит в магазин 7-Eleven и покупает несколько товаров.

— С вас 7,11 фунта, — говорит кассир.
— Забавно… — отвечает покупатель.
— Да, — говорит кассир, — я только перемножил цены этих четырех товаров.
— А разве вы не должны были их сложить?
— Согласен, но сумма цен дает то же число.

Сколько стоит каждый товар?

Для решения задачи нужно знать пару простых математических фактов. Во-первых, простое число — это целое число, которое делится только на себя и на 1. Список простых чисел начинается так:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19…

Во-вторых, нужно знать основную теорему арифметики и, самое важное, главное правило простых чисел, а именно: каждое целое число можно представить в виде произведения уникального множества простых чисел. Например:

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$711 = 3 \times 3 \times 79$
$123\,456 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 643$

* 7-Eleven («Семь-одиннадцать») — сеть небольших магазинов в разных странах мира; нынешний владелец — компания Seven-Eleven Japan. В самом начале магазины работали с 7 утра до 11 вечера, поэтому и получили такое название. *Прим. пер.*

В каждом случае число можно разбить на простые множители только одним способом. Возможно, вы принимали это правило как нечто само собой разумеющееся, даже не зная его названия. Как бы там ни было, основная теорема арифметики поможет вам составить одно из уравнений, необходимых для решения данной задачи.

Для деления больших чисел на простые множители вам может понадобиться калькулятор или компьютер. Но даже несмотря на это, задача остается невероятно увлекательной.

Что связывает великого математика XIX столетия Симеона Дени Пуассона с актером Брюсом Уиллисом, героем голливудских боевиков? Оба решили представленную ниже головоломку. Биограф Пуассона писал, что эта головоломка стала той искрой, которая разожгла интерес юного француза к математике. «Без всяких размышлений о таких вещах, не зная ни условных обозначений, ни алгебраических методов, без какой-либо предварительной подготовки он решил [ее] самостоятельно — и в тот самый день почувствовал, что в нем родилась любовь к математике, от которой он не должен отказываться. Так начался его путь к славе». Браво!

На Брюса Уиллиса эта головоломка повлияла столь же жизнеутверждающе. В фильме «Крепкий орешек 3: Возмездие» он и актер Сэмюэл Джексон решили эту задачу, чтобы обезвредить бомбу с часовым механизмом. Если это смогли сделать Уиллис и Джексон, сможете и вы.

54

Три кувшина

У вас есть 8-литровый кувшин с вином и два пустых кувшина емкостью 5 и 3 литра. Ни на одном из них нет мерной шкалы.

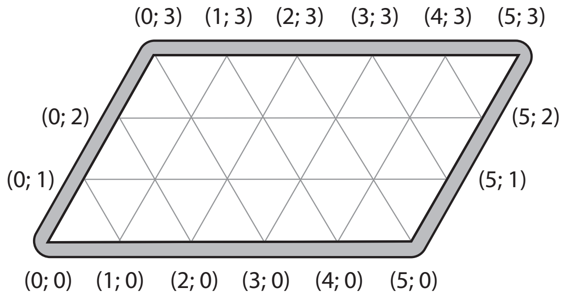
Налейте в один из кувшинов ровно 4 литра вина.

Впервые эта задача появилась в летописи XIII века аббата Альберта из городка Штаде близ Гамбурга. Этот опус включает самое подробное описание средневекового похода паломников из Северной Европы в Рим, написанное в форме диалога между двумя странствующими монахами Тирри и Фирри. В их шутливых беседах содержится несколько головоломок. «Раздели вино, — говорит Тирри Фирри, поддразнивая его задачей с тремя кувшинами, — иначе останешься без ничего».

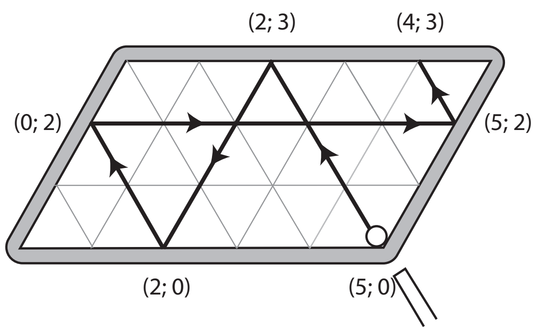
Решать эту головоломку действительно весело, и я предоставляю вам возможность сделать это обычным способом, то есть, переливая вино из одного кувшина в другой, посмотреть, чем это закончится. Сделайте это, прежде чем продолжите читать.

Теперь я покажу вам *другой* способ решения задачи о трех кувшинах, используя шары, перемещающиеся по бильярдному столу необычной формы.

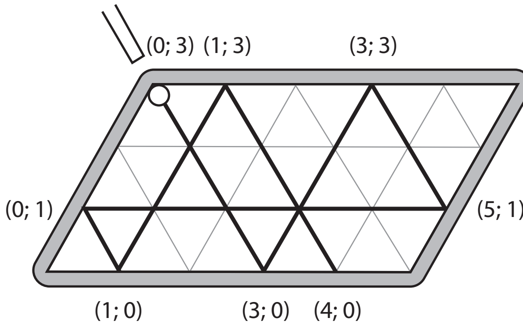
Бильярдный стол (см. рисунок) представляет собой параллелограмм со сторонами пять и три единицы, состоящий из равносторонних треугольников. Я обозначил их на рисунке, поскольку эти треугольники образуют систему координат (x, y). В ней значения x расположены по горизонтали, а y — по диагонали.



На следующем рисунке показано, что произойдет, если поместить шар в позицию с координатой (5; 0) и отправить его вдоль стороны треугольника. Шар отскочит от стенок бильярдного стола в точках (2; 3), (2; 0), (0; 2), (5; 2) и (4; 3), прежде чем двинется дальше. (Математические бильярдные столы лишены трения, поэтому шары перемещаются в том направлении, в каком вы их отправляете.)



А теперь рассмотрим удар по шару, расположенному в точке (0; 3). Он отскочит от стенок в точках (3; 0), (3; 3), (5; 1), (0; 1), (1; 0), (1; 3) и (4; 0), прежде чем продолжит свой путь.



Давайте тщательнее проанализируем эти координаты:

Удар 1	Удар 2
(5; 0)	(0; 3)
(2; 3)	(3; 0)
(2; 0)	(3; 3)
(0; 2)	(5; 1)
(5; 2)	(0; 1)
(4; 3)	(1; 0)
	(1; 3)
	(4; 0)

Не кажутся ли вам эти числа знакомыми? Надеюсь, что да! Ведь это и есть два возможных решения задачи о трех кувшинах.

Для того чтобы не запутаться, обозначим 5-литровый кувшин буквой А, а 3-литровый буквой Б.

Сначала оба кувшина пусты.

Наполним кувшин А. Состояние кувшинов такое: А = 5 литров, Б = 0 литров. Запишите это значение как (5; 0).

Теперь перелейте жидкость из кувшина А в кувшин Б. В кувшине А остается 2 литра, а кувшин Б полон, то есть в нем 3 литра. Кувшины находятся в точке (2; 3).

Вылейте жидкость из кувшина Б в третий кувшин. Теперь кувшины в точке (2; 0).

Перелейте жидкость из кувшина А в кувшин Б: (0; 2).

Снова наполните кувшин А: (5; 2)

Перелейте жидкость из кувшина А в кувшин Б: (4; 3).

Все: в кувшине А 4 литра, а значит, задача решена.

Объем жидкости в кувшинах А и Б в точности соответствует координатам точек, в которых шар отскакивает от стенок бильярдного стола после удара из точки (5; 0).

Если бы при поиске решения головоломки мы сначала наполнили кувшин Б, то объем жидкости в кувшинах А и Б можно было бы описать координатами точек, в которых шар отскакивает от стенок бильярдного стола после удара из позиции (0; 3).

Метод решения задач с кувшинами посредством шаров открыл британский статистик Морис Твиди в 1939 году, когда ему было двадцать лет. Каждый раз, когда шар отскакивает от стенок ромбовидного стола, траектория его движения приводит вас к следующему действию.

Если вам когда-либо понадобится вылить определенное количество жидкости из полной посуды в две пустые емкости поменьше без мерной шкалы, объем которых равен x и y, все, что вам нужно будет сделать, — это построить ромбовидный бильярдный стол со сторонами x и y и катать по нему шары.

Господа Уиллис и Джексон, если вы читаете эти строки, примите мои слова к сведению.

55

ДВА ВЕДРА

Вы стоите у ручья с двумя ведрами вместимостью семь и пять галлонов. Как набрать шесть галлонов воды за минимальное количество переливаний?

Идея переливания жидкости из одного сосуда в другой лежит в основе ряда других занимательных головоломок.

56

КОФЕ С МОЛОКОМ

В термосе у вас кофе, в чашке — молоко. Вы налили некоторое количество кофе в чашку с молоком, а затем перелили немного напитка назад в термос так, чтобы уровень жидкости в обеих емкостях был таким же, как изначально.

Чего больше — кофе в чашке или молока в термосе?

Эта задача вам на завтрак, а следующая предназначена для более позднего времени дня.

57

ВОДА И ВИНО

У вас есть пинта воды в одном кувшине и пинта вина в другом. Вылейте полпинты воды в вино и перемешайте. В кувшине с вином теперь пинта вина и полпинты воды. Вылейте полпинты разбавленного вина в кувшин с водой так, чтобы в каждом кувшине оказалось по одной пинте жидкости. Перемешайте. Продолжайте переливать по полпинты из одного кувшина в другой.

После скольких переливаний в двух кувшинах будет одинаковое содержание вина в жидкости?

Жидкость не единственное вещество, которое льется. Примерно таким же свойством обладает песок. Ниже представлен вариант задачи с кувшинами, в котором необходимо измерять время, а не объем.

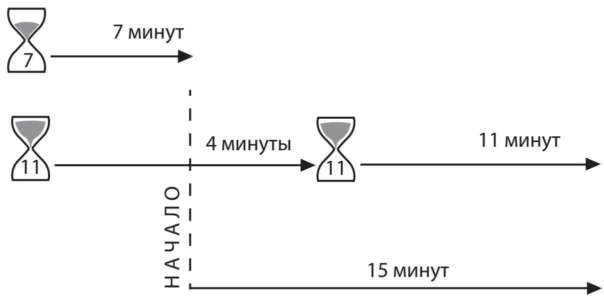
58

15 МИНУТ СЛАВЫ

С помощью песочных часов на 7 и 11 минут отмерьте ровно четверть часа.

Я помогу вам решить эту задачу. Итак, у нас есть пара песочных часов и мы будем их переворачивать. Перевернув одни часы, мы смогли бы отмерить только либо 7, либо 11 минут, то есть вернулись бы к тому, с чего начали.

Давайте проанализируем числа — это полезно. Наши песочные часы отмеряют 7 и 11 минут, а нам необходимо отмерить 15 минут. Разность между одиннадцатью и семью равна четырем, а это то же число, что и разность между пятнадцатью и одиннадцатью. Значит, при решении нам нужно придерживаться следующей стратегии.



Переверните двое часов. Через семь минут в 7-минутных часах упадут последние песчинки, а вторые часы будут отсчитывать время еще 4 минуты. Именно этот интервал нам и нужен: здесь начнем отсчет 15 минут. Через четыре минуты 11-минутные часы опустеют. Сразу же переверните их — и через 11 минут получите ровно 15 минут, как показано на рисунке.

Впрочем, это не самое лучшее решение, ведь на него у нас ушло целых 22 минуты, хотя отмерить надо было четверть часа. Найдите более подходящий способ.

Измерять время можно и с помощью фитиля.

59

ПУТАНИЦА С ФИТИЛЯМИ

У вас есть набор фитилей, каждый из которых сгорает за один час. Длинные и тонкие фитили горят неравномерно: один участок может гореть быстрее, чем другой.

Разрезание фитиля пополам не гарантирует, что каждая половина сгорит за полчаса.

1. С помощью двух фитилей отмерьте 45 минут.
2. С помощью одного фитиля как можно точнее отмерьте 20 минут.

Соль этой задачи в том, что понимание математики позволяет исключить условие неравномерности горения и точно отмерить промежутки времени. Мне нравится, что в этой головоломке математика берет верх над физикой.

Ниже предложена еще одна головоломка о том, как преодолеть несовершенство физического мира.

60

НЕПРАВИЛЬНАЯ МОНЕТА

В случае подбрасывания обычной монеты вероятность выпадения орла или решки равна 50 : 50. Допустим, ваша монета с дефектом, из-за чего вероятность выпадения орла или решки составляет не 50 : 50, а какое-то другое соотношение. Можно ли сделать так, чтобы она вела себя как обычная монета? Необходимо найти такую комбинацию подбрасываний, которая обеспечит результат 50 : 50.

Монеты — важнейший инструмент в мире головоломок; в следующей главе мы поговорим о них подробнее.

Рычажные весы были единственным инструментом для взвешивания предметов вплоть до XVIII столетия, когда были изобретены пружинные весы с одной чашей. Будучи распространенным измерительным прибором, рычажные весы часто были героями математических головоломок, начиная с эпохи Возрождения до эпохи Просвещения и позднее. Решите одну из них.

61

Разделите муку

У вас есть рычажные весы и две гири весом 10 и 40 граммов. Разделите 1 килограмм муки на две части — 200 и 800 граммов — за три взвешивания.

Предположим, у нас есть набор килограммовых гирь, соответствующих первым шести членам последовательности удваивающихся чисел: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Комбинируя эти шесть гирь, можно получить любой вес от 1 до 63 килограммов. Например:

$$3 = 2 + 1.$$

Другими словами, для того чтобы получить 3 килограмма, необходимо взять две гири весом 2 и 1 килограмм.

$$13 = 8 + 4 + 1;$$
$$27 = 16 + 8 + 2 + 1;$$
$$63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

В действительности шесть гирь образуют *минимальный набор*, позволяющий измерить любой вес в килограммах от 1 до 63.

Почему это так, можно понять, рассматривая выражение веса в двоичных числах. В двоичной системе счисления используются только цифры 1 и 0. Двоичные числа — это числа десятичной системы, записанные с помощью 1 и 0: 1, 10, 11, 100, 110 и т. д. Числа 1, 10, 100, 1000, 10 000 и 100 000 в двоичной системе счисления соответствуют десятичным числам 1, 2, 4, 8, 16 и 32. Таким образом, двоичные числа — это своего рода инструкции в отношении того, как выстраивать числа с помощью последовательности, в которой каждый очередной член в два раза больше предыдущего. Таким образом, в двоичной системе следующие числа записываются так:

3 — это 11
13 — 1101
27 — 11 011
63 — 111 111

Цифра 1 в крайнем правом столбце соответствует 1, цифра 1 в соседнем столбце — 2, цифра 1 в следующем столбце — 4 и т. д. Аналогичным образом цифра 0 в крайнем правом столбце означает отсутствие цифры 1, цифра 0 в соседнем столбце означает отсутствие цифры 2, цифра 0 в следующем столбце — отсутствие цифры 4 и т. д.

Итак, возьмем число 13, которое записывается в двоичной системе как 1101. Эта группа цифр справа налево означает: одна цифра 1, нет цифры 2, одна цифра 4 и одна цифра 8. Другими словами, 13 = 1 + 4 + 8 — как и было сказано.

Но давайте больше не будем отвлекаться на двоичные числа, какой бы интересной ни была эта тема. Вернемся к весам и гирям.

Поскольку наш набор гирь (1, 2, 4, 8, 16, 32) позволяет измерить любой вес в килограммах от 1 до 63, мы можем взвесить любое целое количество килограммов от 1 до 63, положив на *одну* из чаш весов соответствующую комбинацию гирь. А что, если использовать обе чаши?

62

ЗАДАЧА БАШЕ О ВЗВЕШИВАНИИ

У вас есть рычажные весы. С помощью какого минимального набора гирь можно измерить любой вес от 1 до 40 килограммов в целых числах, если гири можно класть на любую чашу?

Эта задача включена в книгу Леонардо Пизанского Liber Abaci («Книга абака», или «Трактат об арифметике»), хотя она более известна как задача о гирях французского математика Клода Гаспара Баше.

Баше был поэтом, переводчиком и математиком, а также автором сборника головоломок. В 1612 году он опубликовал первое издание книги Problèmes Plaisants et Délectables Qui Se Font Par Les Nombres («Занимательные и приятные числовые задачи»). В ней собраны многие из тех головоломок, с которыми вы здесь уже встречались, такие как переправа через реку, покупка сотни птиц и переливание жидкости в трех кувшинах. На протяжении трех столетий сборник Problèmes Plaisants считался стандартным текстом по занимательной математике, на нем основывалась вся последующая литература о головоломках. Кроме того, в книге Баше представлен самый известный анализ задачи с рычажными весами.

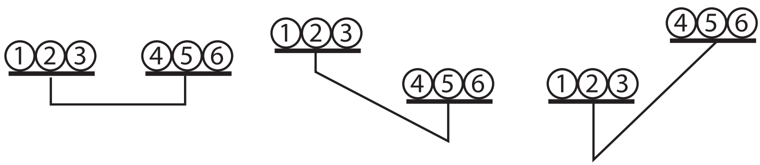
Баше внес еще один важнейший вклад в историю математики: перевел «Арифметику» древнегреческого математика Диофанта на латынь. Именно на одной из страниц этого перевода французский математик Пьер Ферма написал, что нашел чудесное доказательство теоремы, сформулированной под влиянием этого текста, но не может записать его, поскольку поля книги слишком узкие. Доказательство последней теоремы Ферма (уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений, выраженных в целых ненулевых числах a, b и c, если n больше 2) ускользало от математиков на протяжении 350 лет, что сделало ее за это время самой знаменитой нерешенной задачей в математике.

Вот вам задача для подготовки:

У вас есть восемь идентичных монет. Девятая монета фальшивая: она выглядит так же, но весит чуть меньше остальных монет. Сможете ли вы найти ее всего за два взвешивания?

Возможно, вы захотите решить эту задачу самостоятельно, в таком случае не читайте написанное далее. Я привожу здесь решение, чтобы вы смогли справиться со следующими головоломками.

Чтобы решить задачу о фальшивой монете, разделите монеты на три группы по три монеты. Если мы обозначим их номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, то первый раз взвешиваем монеты 1, 2, 3 и монеты 4, 5, 6. При этом чаши весов будут либо уравновешены, либо нет.



Если чаши весов уравновешены, как показано на рисунке слева, значит, более легкая монета — это номер 7, 8 или 9. Если одна чаша весов перевешивает другую, как на среднем рисунке, то более легкая монета — это номер 1, 2 или 3.

Если же чаши весов расположены как на рисунке справа, значит, это монета номер 4, 5 или 6. Во всех трех случаях мы можем сузить вероятность поиска более легкой монеты с одной из девяти до одной из трех.

Теперь, при втором взвешивании, нам остается только сравнить вес одной из оставшихся монет с другой монетой, отложив третью в сторону. Более тяжелая монета перевесит чашу весов, а если чаши будут уравновешены, то фальшивая монета — та, что вы отложили. Вот и все.

Следующая задача стала широко известной во время Второй мировой войны. Она привела лучшие умы союзников в такое смятение, что кто-то даже предложил подкинуть фальшивую монету на вражескую территорию, чтобы вызвать хаос в мозговом центре немцев.

63

ФАЛЬШИВАЯ МОНЕТА

У вас есть 11 одинаковых монет. Двенадцатая монета — фальшивая. С виду она такая же, как все, но отличается весом. Вам неизвестно, легче она или тяжелее остальных.

Сможете ли вы за три взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее других монет?

Кстати, для весов с одной чашей (таких как современные цифровые весы, показывающие вес в килограммах) тоже можно придумать интересные головоломки с фальшивыми монетами.

64

СТОПКА ФАЛЬШИВЫХ МОНЕТ

У вас десять стопок монет, по десять монет достоинством один фунт в каждой. Девять стопок состоят из подлинных однофунтовых монет, а в одной — все монеты фальшивые. Вам известен вес однофунтовой монеты, а также то, что фальшивая монета на 1 грамм тяжелее настоящей. Какое минимальное количество взвешиваний требуется для того, чтобы определить стопку фальшивых монет на весах с одной чашей?

Преемником Клода Гаспара Баше в части придумывания головоломок считается француз Эдуард Люка, чьи труды по занимательной математике появились в конце XIX века. Помимо того что Люка был виднейшим математиком своего времени и добился больших успехов в понимании простых чисел, он изобретал новые головоломки и анализировал классические задачи такого рода. Рассказанная далее история подлинная и взята из французского учебника по математике 1915 года. Автор пишет, что случай произошел на научной конференции много лет назад. Несколько известных математиков, в том числе выдающихся, прохаживались после обеда и беседовали. Люка вступил с ними в разговор и предложил решить представленную далее задачу. Одни математики ответили неправильно, другие промолчали. Задачу так никто и не решил.

Вам слово, дорогой лектор.

65

Из Гавра в Нью-Йорк

Ежедневно в полдень океанский лайнер отправляется из Гавра в Нью-Йорк; в то же самое время из Нью-Йорка в Гавр тоже выходит лайнер. Путь через океан в любом направлении занимает ровно семь дней и семь ночей. Сколько лайнеров до прибытия в Нью-Йорк встретит на своем пути лайнер, вышедший из Гавра сегодня?

Мне нравится эта задача, поскольку притом что речь в ней идет о рядовом событии (корабли отправляются и прибывают в порт), присутствует также интересная математическая изюминка. Существует множество замечательных головоломок о транспорте, которые зачастую касаются того, о чем люди размышляют во время путешествий.

66

ПОЛЕТ ТУДА И ОБРАТНО

Самолет совершает рейс из пункта А в пункт Б и обратно. В безветренный день полет занимает одинаковое количество времени в обоих направлениях. Но что произойдет, если погода будет ветреной? Полет в два конца займет больше или меньше времени, столько же, как обычно, или это зависит от направления ветра?

Допустим, ветер дует в одном направлении на протяжении всего полета. Очевидно, что при попутном ветре при движении самолета туда и обратно полет в два конца займет меньше времени, чем при полном отсутствии ветра. Можно предположить, что самолет летит из пункта А в пункт Б по прямой линии туда и обратно. Для начала проанализируйте, что произойдет, если самолет летит из пункта А в пункт Б при попутном ветре, ускоряющем его движение на этом участке пути, а возвращается при встречном, замедляющем его перемещение в обратном направлении. Будет ли влияние ветра полностью нейтрализовано в этом случае? Подумайте также о том, как будет лететь самолет, если ветер станет дуть под углом к траектории полета.

Изучение приборной панели во время длинной поездки на автомобиле тоже дает повод для арифметических развлечений.

67

ПРОБЕГ АВТОМОБИЛЯ

Обычно в современных автомобилях устанавливают два одометра (измеряют количество оборотов колеса). Первый измеряет общий пробег автомобиля за весь период эксплуатации (его показания не обнуляются), а второй измеряет путь, пройденный автомобилем за одну поездку (его показания можно обнулить). Если показания любого из одометров будут состоять из одних девяток, то следующее число, которое он покажет, будет включать в себя только нули.

Допустим, первые четыре цифры на одометрах одинаковые, как показано на рисунке.

Если не обнулять счетчик пробега за одну поездку, при каком общем пробеге на обоих одометрах снова первые четыре цифры будут одинаковыми?

А теперь задумаемся над тем, как мы передвигаемся благодаря собственным усилиям.

68

ОБГОН

1. Вы принимаете участие в забеге и обгоняете человека, бегущего вторым. Какое место вы занимаете?
2. Вы участвуете в забеге и обгоняете человека, бегущего последним. Какое место вы занимаете теперь?

69

Стили бега

Констанс и Дафни участвуют в забеге ровно на 26,2 мили. Констанс бежит весь марафон с постоянной скоростью: 1 миля за 8 минут. Дафни бежит с разной скоростью, чередуя рывки с медленным бегом, и покрывает каждую милю за 8 минут и 1 секунду. Другими словами, какую бы милю дистанции вы ни взяли — первую, последнюю или, скажем, отрезок с 13,6 мили до 14,6 мили, — Констанс пробежит ее ровно за 8 минут, а Дафни на секунду больше.

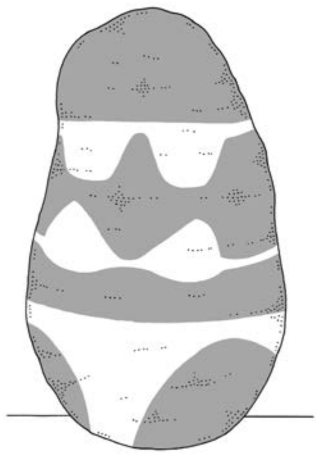
Может ли Дафни выиграть этот забег?

Не предоставляя слишком много информации, хочу отметить, что это возможно, причем главное — найти правильную стратегию. На мой взгляд, задачу можно отнести к разряду парадоксов, а не головоломок. Существуют логические парадоксы — предположения, приводящие к внутренне противоречивым выводам, и шуточные парадоксы — на первый взгляд абсурдные утверждения, которые после внимательного анализа оказываются истинными. Ниже предлагаются две задачи такого типа.

70

Вялый картофель

Стокилограммовую кучу картофеля оставили лежать на солнце. Вес картофеля на 99 процентов состоит из воды. После дня пребывания на солнце часть воды испарилась, и теперь 98 процентов веса картофеля приходится на воду. Чему равен новый вес картофеля?



Следующая задача была опубликована в издании 1896 года книги Уолтера Роуза Болла Mathematical Recreations and Essays* — первой важной книги по занимательной математике, написанной на английском языке. Впервые увидев свет в 1892 году, эта книга выдержала 14 изданий, причем последние четыре (вышедшие после смерти автора), 1939-го, 1942-го, 1974-го и 1987 годов, включали в себя поправки и дополнительные разделы, написанные известным канадским геометром Гарольдом Коксетером. Помимо всего того, чем Роуз Болл занимался в Кембридже, где он построил свою научную карьеру, он основал одно из старейших в мире сообществ иллюзионистов Pentacle Club. В своем завещании математик распорядился передать деньги Оксфордскому и Кембриджскому университетам, каждый из которых учредил кафедру Роуза Болла по математике.

---

* Издана на русском языке: *Роуз Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения. М. : Мир, 1986.

71

ПЛАН ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ

Вам предложили новую работу со стартовой заработной платой 10 тысяч фунтов в год. Начальник просит вас выбрать один из способов ее повышения.

План А: повышение на 500 фунтов каждые полгода, то есть каждые шесть месяцев ваша заработная плата на следующие шесть месяцев увеличивается на 500 фунтов.

План Б: ежегодное повышение на 2000 фунтов.

Какой план вы выберете?

72

ДЕЛЕНИЕ ТРОСТИ

Дик распиливает свою трость на две части. Если точка деления выбирается случайным образом, какова в среднем длина меньшей части трости?

Одна из самых известных задач Эдуарда Люка — это *ménage**, или задача о супружеских парах, в которой необходимо определить, каким количеством способов можно рассадить за столом пары мужчин и женщин так, чтобы мужчины чередовались с женщинами и ни один мужчина не сидел рядом со своей женой. Решение этой задачи слишком сложное для нашей книги; сам Люка включил его в виде приложения в научный

* От франц. *ménage* — «домашнее хозяйство» или «организация домашнего хозяйства». *Прим. ред.*

труд о теории чисел, а не в книги о занимательной математике. Но если вам любопытно, я сообщу ответ: для двух пар сделать это невозможно, для трех пар существует 12 способов, для четырех — 96 способов, а для пяти — 3120 способов.

Тем не менее весьма забавно, что званые ужины могут стать поводом для изобретения замечательных головоломок.

73

РУКОПОЖАТИЯ

Эдвард и Люси пригласили на ужин четыре пары. Каждый человек пожимает руку только тому, кого не встречал раньше. Затем Эдвард спрашивает свою жену и восьмерых гостей, скольким людям они пожали руки, и получает девять разных ответов.

Скольким приглашенным пожала руку Люси?

Мы можем сделать ситуацию не столь официальной.

74

РУКОПОЖАТИЯ И ПОЦЕЛУИ

Эдвард и Люси пригласили на ужин нескольких друзей. Некоторые из них не состоят в браке, а некоторые образуют разнополые пары. Мужчины приветствуют друг друга рукопожатиями. Женщины приветствуют и мужчин, и женщин поцелуями. (Разумеется, двое из одной пары не приветствуют друг друга.) Каждый гость на вечеринке приветствует Эдварда, Люси и всех остальных

> гостей. Исходя из того, что всего было шесть рукопожатий и 12 поцелуев, сколько гостей присутствовало на ужине и сколько среди них людей, не состоящих в браке?

Задачи о званых ужинах сводятся к анализу комбинаций. Хотя порой их слишком много, чтобы все подсчитать. Так что не делайте этого. А когда пойдете в театр, не забудьте свой билет.

75

ПОТЕРЯННЫЙ БИЛЕТ

> Сто человек выстроились в очередь, чтобы занять свои места в театральном зале на 100 мест. Первый человек в очереди не может найти билет, поэтому занимает случайно выбранное место. Каждый из оставшихся садится на свое место, если оно не занято; в противном случае каждый занимает место, выбранное случайным образом.
>
> Какова вероятность того, что последний посетитель театра займет место, указанное в его билете?

В этой главе представлены головоломки о гипотетических случаях из реальной жизни. Теперь пора заняться тем, что происходит на самом деле.

10 увлекательных головоломок

Хорошо ли вы знаете географию?

Правила: пользоваться калькуляторами не разрешается.

1. Назовите самый крупный город в Европе, название которого (на русском языке) содержит только один слог.

2. Какой штат США находится ближе всего к Африке?

   Флорида;
   Северная Каролина;
   Нью-Йорк;
   Массачусетс;
   Мэн.

3. Расположите следующие города с запада на восток.

   Эдинбург;
   Глазго;
   Ливерпуль;
   Манчестер;
   Плимут.

4. Расположите следующие города с севера на юг.

   Алжир;
   Галифакс (Новая Шотландия);
   Париж;
   Сиэтл;
   Токио.

5. Расположите следующие города с севера на юг.

   Буэнос-Айрес;
   Кейптаун;
   Остров Пасхи;
   Монтевидео;
   Перт (Австралия).

6. Какая европейская страна имеет общую границу с наибольшим числом других стран Европы?

7. Расположите следующие географические объекты по величине численности населения в порядке возрастания.

   Шетландские острова;
   Остров Мэн;
   Остров Уайт;
   Джерси;
   Фолклендские острова.

8. У какой страны мира самая длинная береговая линия?

9. Франция — страна с самым большим количеством часовых поясов (12), поскольку в ее состав входят заморские территории и департаменты. В какой из крупнейших стран мира только один часовой пояс?

10. Аконкагуа, Эльбрус, Килиманджаро и Мак-Кинли — самые высокие горы в Южной Америке, Европе, Африке и Северной Америке. Расположите их по высоте.