СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является помощником в изучении, систематизации и обобщении знаний по алгебре за курс средней школы. Материал представлен в наглядной и удобной для восприятия форме — в виде таблиц, что существенно упрощает его запоминание.

Обобщающий курс изложен последовательно — от простого к сложному. Книга содержит практически все изучаемые в школьной программе определения, правила, формулы, теоремы, изложенные в разделах «Числовые множества», «Вычисление и преобразование выражений», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Элементы теории множеств, математической логики, комбинаторики, теории вероятностей и статистики».

Теоретический материал проиллюстрирован примерами, которые позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий. В приложениях приведены данные, необходимые для решения практических задач.

Пособие предназначено для учащихся средней школы при самоподготовке к различным видам контроля, основному и единому государственным экзаменам, а также для учителей математики.

Желаем успехов!

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральными называются числа, которые используются при счёте предметов.

Натуральный ряд	Особенности записи	Особенности чтения
Обозначение: *N*. $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 \ldots\}$ 0 не является натуральным числом. 1 — наименьшее натуральное число. Наибольшего натурального числа не существует. Последовательность всех натуральных чисел называется **натуральным рядом**. В натуральном ряду каждое следующее число на единицу больше предыдущего	Записываются в десятичной системе исчисления с помощью цифр: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Если запись натурального числа состоит из одной цифры, его называют **однозначным** числом; из двух цифр — **двузначным** числом; из трёх цифр — **трёхзначным** числом. Самые употребляемые числа имеют не больше 12 цифр в записи. Числа, которые имеют больше 12 цифр, относятся к группе больших чисел	Для чтения натуральных чисел их разбивают, начиная справа, на группы по три цифры в каждой. Первые три цифры справа — это класс единиц, 3 следующие — это класс тысяч, далее идут классы миллионов, миллиардов и т. д. Каждая из цифр класса называется его **разрядом**

Числа 1, 10, 100, 1000 и т. д. называются **разрядными единицами**. Так, 1 — это единица разряда единиц; 10 — единица разряда десятков; 100 — единица разряда сотен и т. д.

Таблица классов и разрядов

Классы	Разряды
1-й класс: единицы	1-й разряд: единицы; 2-й разряд: десятки; 3-й разряд: сотни
2-й класс: тысячи	1-й разряд: единицы тысяч; 2-й разряд: десятки тысяч; 3-й разряд: сотни тысяч
3-й класс: миллионы	1-й разряд: единицы миллионов; 2-й разряд: десятки миллионов; 3-й разряд: сотни миллионов
4-й класс: миллиарды	1-й разряд: единицы миллиардов; 2-й разряд: десятки миллиардов; 3-й разряд: сотни миллиардов

Любое натуральное многозначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых.
Представление числа в виде $385042 = 300000 + 80000 + 5000 + 40 + 2 = 3 \cdot 100000 + 8 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2$ называется разложением числа на разрядные слагаемые или суммой разрядных слагаемых.
ВАЖНО! Сумма разрядных слагаемых натурального числа равна этому числу.

Действия с натуральными числами

Арифметические действия	**Свойства**
Сложение	
$a+b=c$ слагаемые, сумма	$a+b=b+a$ $a+(b+c)=(a+b)+c$ $a+0=a$
Вычитание (действие, обратное сложению)	
$a-b=c$ уменьшаемое, вычитаемое, разность	$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$ $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$ $a-(b-c)=(a-b)+c$ $a-0=a$ $a-a=0$
Умножение	
$a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ слагаемых}}$ $a\cdot b=c$ множители, произведение Вариант обозначения: $a\times b$	$a\cdot b=b\cdot a$ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$ $a\cdot 1=a$ $a\cdot 0=0$

Деление (действие, обратное умножению)

$a : b = c$

делимое делитель частное

Варианты обозначений: $\frac{a}{b}$ или a/b.

Если частное c является натуральным числом, то говорят, что a делится (без остатка) на b.

Если частное c не является натуральным числом, то говорят, что a не делится (без остатка) на b.

Разделить с остатком число a на число b — значит найти два таких числа q и r, что $a = b \cdot q + r$ и $r < b$.

ВАЖНО! Остаток должен быть меньше делителя.

делимое неполное частное

$a : b = q$ (ост. r)

делитель остаток

$(a : b) : c = a : (b \cdot c)$

$a : (b : c) = (a : b) \cdot c$

$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$

$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$

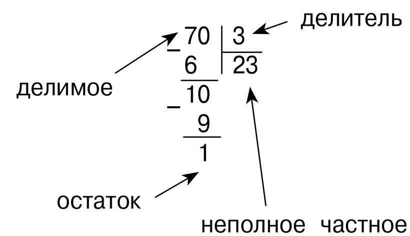
$a : a = 1$

$a : 1 = a$

$0 : a = 0$ $(a \neq 0)$

На нуль делить нельзя.

✓ Деление с остатком:



Проверка: $70 = 3 \cdot 23 + 1$

Действия	Свойства
Возведение в степень	
Выражение a^n называется **степенью числа *a***. Вторая степень числа называется **квадратом** числа, третья степень — **кубом** числа. показатель степени $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$ основание степени	$a^1 = a$ $\quad$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$ $\quad$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ! Таблица квадратов представлена в приложении 1 данного пособия (с. 222).

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**. Только в результате сложения и умножения натуральных чисел также получаются натуральные числа.
Свойства сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень представляют собой равенства, которые можно использовать не только слева направо, но и справа налево.

Порядок действий

Действия 1-й ступени: сложение и вычитание.
Действия 2-й ступени: умножение и деление.
Действия 3-й ступени: возведение в степень.

Алгоритм действий	Пример
В **выражении без скобок** сначала выполняют действия большей ступени. Если выражение содержит действия одной ступени, то их выполняют в порядке, в котором они записаны, — слева направо. Возведение в степень ⇨ умножение/деление ⇨ сложение/вычитание.	Запись решения в строчку: 4 1 2 5 6 3 $\boxed{17-5\cdot 6:3-2+4:2}=17-30:3-2+2=17-10-$ $-2+2=7-2+2=7$
В **выражении со скобками** сначала выполняют все действия в скобках, затем действия большей ступени. Скобками пользуются, чтобы изменить порядок действий. Действия в скобках ⇨ возведение в степень ⇨ умножение/деление ⇨ сложение/вычитание.	Запись решения по действиям: 1 3 5 2 4 6 $\boxed{(3+1)\cdot 2+6^2:3-7}=13$ 1) $3+1=4$; 2) $6^2=36$; 3) $4\cdot 2=8$; 4) $36:3=12$; 5) $8+12=20$; 6) $20-7=13$

Делители и кратные

Определение	Примеры
Делителем натурального числа n называется такое натуральное число k, на которое число n делится без остатка. Обозначение: $n \vdots k$ (читается «n делится на k»)	Делители числа 15: 1, 3, 5 и 15. Делители числа 31: 1 и 31
Натуральное число k называется **кратным** натуральному числу n, если число n делится на число k без остатка. Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных. ПРИМЕЧАНИЕ. Слово «кратно» можно заменить словами «делится на...»	Кратные числа 15: 15, 30, 45 и т. д. Кратные числа 31: 31, 62, 93 и т. д.

Простые и составные числа

Определение	Пример
Простым называется натуральное число, которое делится на 1 и на само себя	Число 31 является простым, так как делится только на 1 и 31
Натуральное число, имеющее более двух делителей, называется **составным**. Любое составное число можно разложить на два множителя, каждый из которых больше 1	Число 15 является составным, так как имеет четыре делителя. $15 = 3 \cdot 5$ — число 15 разложено на множители 3 и 5

Число 1 не является ни простым, ни составным.

Признаки делимости

Признак делимости — правило, позволяющее без выполнения деления определить, является ли число кратным заранее заданному числу.

Краткая формулировка признака делимости		Примеры
На 2	Последняя цифра в записи числа — 0, 2, 4, 6 или 8	850; 26; 15 794
На 3	Сумма цифр числа делится на 3	321 (3+2+1=6⋮3)
На 4	Число оканчивается двумя нулями или число, образованное двумя последними цифрами, делится на 4	2500; 1324; 508
На 5	Последняя цифра в записи числа — 0 или 5	1760; 3085
На 8	Число оканчивается тремя нулями или число, образованное тремя последними цифрами, делится на 8	71 000; 29 032; 5160
На 9	Сумма цифр числа делится на 9	846 (8+4+6=18⋮9)
На 10	Последняя цифра в записи числа — 0	930
На 11	Сумма цифр на нечётных местах равна сумме цифр на чётных местах	2695 (2+9=6+5). 32 065 (3+0+5=2+6)
На 25	Число оканчивается на 00, 25, 50 или 75	3600; 90 825; 375

Наибольший общий делитель

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа a и b, называется **наибольшим общим делителем** этих чисел. Аналогично определяется наибольший общий делитель для трёх и более натуральных чисел.

КРАТКАЯ ЗАПИСЬ

Наибольший общий делитель	**НОД(*a*; *b*)**

Алгоритм нахождения НОД	Пример
1) Разложить эти числа на простые множители	Найдём наибольший общий делитель чисел 60, 80 и 48.
2) Из множителей подчеркнуть те, которые входят в разложение всех чисел	$60=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 3\cdot 5$; $80=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 5$; $48=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 3$
3) Найти произведение подчёркнутых множителей	$НОД(60; 80; 48)=2\cdot 2=4$

Если все данные числа делятся на одно из них, то это число и является наибольшим общим делителем данных чисел.

✓ $НОД(15; 30)=15$, так как $30 \vdots 15$.

Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

✓ Числа 15 и 17 — взаимно простые, так как $НОД(15; 17)=1$.

Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным чисел *a* и *b* называется наименьшее натуральное число, которое кратно и *a*, и *b*. Аналогично определяется наименьшее общее кратное для трёх и более натуральных чисел.

КРАТКАЯ ЗАПИСЬ

Наименьшее общее кратное	**НОК(*a*; *b*)**

Алгоритм нахождения НОК	Пример
1) Разложить эти числа на простые множители	Найдём наименьшее общее кратное чисел 60, 80 и 48.
2) Выписать множители, входящие в разложение одного из чисел	$60=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{3}\cdot\underline{5}$; $80=2\cdot2\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot5$; $48=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$
3) Дописать к ним недостающие множители из разложения других чисел	$НОК(60;80;48)=(2\cdot2\cdot3\cdot5)\cdot2\cdot2=240$
4) Найти произведение получившихся множителей	

Если одно из данных чисел делится на все остальные числа, то это число и является наименьшим общим кратным данных чисел.

✓ $НОК(15;30)=30$, так как $30 \vdots 15$.

В некоторых случаях возможно найти НОК, перебирая кратные большего числа.

✓ Для нахождения НОК(12; 20) из кратных числа 20 выберем то, которое делится и на 12. Кратные 20: 20, 40, 60. Подходит число 60.

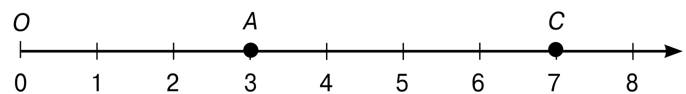
Сравнение

Натуральный ряд является **упорядоченным множеством**, то есть для любых двух натуральных чисел m и n справедливо одно из соотношений:

$m = n$ (m равно n), $m > n$ (m больше n), $m < n$ (m меньше n).

Из двух натуральных чисел меньшим является то, которое в натуральном ряду стоит левее, а бóльшим — то, которое в натуральном ряду стоит правее.

✓ Точка $A(3)$ левее точки $C(7)$, поэтому $3 < 7$.



Натуральные числа можно сравнивать, не обращаясь к натуральному ряду, а используя правила сравнения.

Правила сравнения натуральных чисел	**Пример**
С разным количеством цифр	
Из двух натуральных чисел с разным количеством цифр больше то число, у которого цифр больше	621 — 3 цифры, 75 — 2 цифры; $621 > 75$
С одинаковым количеством цифр	
Из двух натуральных чисел с одинаковым количеством цифр больше то, у которого больше единиц в наивысшем одноимённом разряде (сравнение проводится поразрядно, начиная со старшего разряда)	$18\,75\underline{6}\,028 > 18\,75\underline{4}\,994$, так как $6 > 4$