



# СОДЕРЖАНИЕ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ .....	5
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ.....	12
Иррациональные уравнения.....	12
Системы иррациональных уравнений .....	17
Иррациональные неравенства.....	19
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ .....	25
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ .....	29
Простейшие показательные уравнения.....	29
Показательные уравнения, решаемые способом приведения к одному основанию .....	30
Показательные уравнения, решаемые способом подстановки .....	32
Показательные уравнения, решаемые способом почленного деления .....	33
Показательные уравнения, решаемые способом группировки ....	34
Системы показательных уравнений.....	36
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА.....	37
Простейшие показательные неравенства.....	37
Показательные неравенства, не являющиеся простейшими .....	37
ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ.....	42
Логарифмы, свойства логарифмов .....	42
Логарифмическая функция, её свойства и график .....	43
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ.....	48
Простейшие логарифмические уравнения.....	48
Логарифмические уравнения, решаемые методом потенцирования .....	49
Уравнения, решаемые методом подстановки .....	50
Уравнения, решаемые методом приведения к общему основанию.....	51
Уравнения вида $f_1(x)^{f_2(x)} = f_3(x)$ .....	53
СИСТЕМЫ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	55
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА .....	59
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ .....	67
Простейшие тригонометрические уравнения.....	67

Уравнения вида $f(ax + b) = c$ , где $f(x)$ — тригонометрическая функция .....	68
Уравнение вида $af^2(x) + bf(x) + c = 0$ , где $f(x) = \{\cos x; \sin x; \operatorname{tg} x; \operatorname{ctg} x\}$ .....	70
Однородные уравнения.....	71
Введение вспомогательного угла .....	73
Тригонометрические уравнения с нулём в правой части.....	74
<b>ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА</b> .....	78
Простейшие тригонометрические неравенства.....	78
Тригонометрические неравенства, приводимые к квадратным ....	85
<b>ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ</b> .....	87
$y = \sin x$ .....	87
$y = \cos x$ .....	88
$y = \operatorname{tg} x$ .....	89
$y = \operatorname{ctg} x$ .....	90
Обратные тригонометрические функции .....	91
Периодичность функции.....	92
Область определения и множество значений функции .....	93
Чётность, нечётность функции .....	94
Преобразование графика функции $f(x)$ в $Af(ax + b) + B$ .....	96
<b>ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ</b> .....	101
Производные элементарных функций .....	101
Правила вычисления производных .....	101
Геометрический смысл производной .....	103
Физический смысл производной.....	108
Применение производной к исследованию функций .....	111
<b>ИНТЕГРАЛ</b> .....	124
Первообразная .....	124
Интеграл .....	127
Площадь криволинейной трапеции.....	128
Применение интеграла к вычислению объёмов тел вращения....	136
<b>СПИСОК АЛГОРИТМОВ</b> .....	139
<b>ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО»</b> .....	145

# УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ



$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

(т. е. модуль любому выражению приписывает знак «+»).

## Помни!

- модуль любого числа есть число неотрицательное;
- модули противоположных чисел равны.

## Решение уравнений вида $|x| = a$

### АЛГОРИТМ



Уравнения легко решать, пользуясь таблицей:

①

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
решений нет	$x = 0$	$x_1 = a; x_2 = -a$

### ПРИМЕР 1



Решить уравнение:  $|x - 5| = 12$ .

*Решение.*

① Так как  $12 > 0$ , то

$x - 5 = 12$	или	$x - 5 = -12$
$x = 12 + 5$		$x = -12 + 5$
$x = 17$		$x = -7$

**Ответ:**  $-7; 17$ .

### ПРИМЕР 2



Решить уравнение:  $|x - 5| = -12$ .

*Решение.*

① Так как  $-12 < 0$ , то уравнение не имеет решений.

**Ответ:** нет решений.

# 2

## Решение уравнений вида $|f(x)| + |g(x)| = a$ ; $|f(x)| = |g(x)|$

### АЛГОРИТМ

- 1 Определить промежутки знакопостоянства для выражений  $f(x)$  и  $g(x)$ .



- 2 Пользуясь координатной прямой, выделить промежутки с разными сочетаниями знаков выражений  $f(x)$  и  $g(x)$ .



- 3 Решить заданное уравнение на каждом из полученных промежутков, раскрывая скобки модуля, пользуясь определением модуля.



- 4 Записать в ответ все решения, полученные на каждом из промежутков.



### ПРИМЕР 1

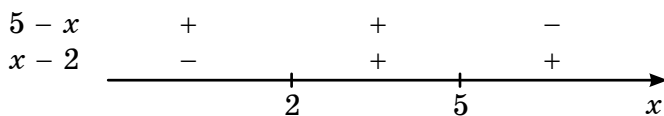
Решить уравнение:  $|x - 2| + |5 - x| = 7$ .

*Решение.*

- 1 Определим промежутки знакопостоянства выражений, стоящих в скобках модуля.

$x - 2 = 0$	$5 - x = 0$
$x = 2$	$x = 5$

- 2 Удобнее выделить промежутки, отметив полученные результаты на общем рисунке.



- 3 Таким образом, легко видеть, что мы получили 3 промежутка, описывающих 3 различных ситуации.

I.  $x \in (-\infty; 2]$ .

$5 - x > 0$ , значит  $|5 - x| = 5 - x$ ;

$x - 2 < 0$ , значит  $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ .

Значит, уравнение на данном промежутке имеет вид:  
 $-(x - 2) + (5 - x) = 7$ ;  $-x + 2 + 5 - x = 7$ ;  
 $-2x = 0$ ;  $x = 0$ ;  $0 \in (-\infty; 2]$ ;  $x = 0$ .

Аналогично скобки модуля раскрываем на каждом из оставшихся промежутков.

II.  $x \in (2; 5]$ .

$$(x - 2) + (5 - x) = 7; x - 2 + 5 - x = 7;$$

$3 \neq 7$ ; решений нет.

III.  $x \in (5; +\infty)$ .

$$(x - 2) - (5 - x) = 7; x - 2 - 5 + x = 7;$$

$$2x = 14; x = 7; 7 \in (5; +\infty); x = 7.$$

- ④ В ответ записываем все решения, полученные на каждом из промежутков.

**Ответ:** 0; 7.

### ПРИМЕР 2



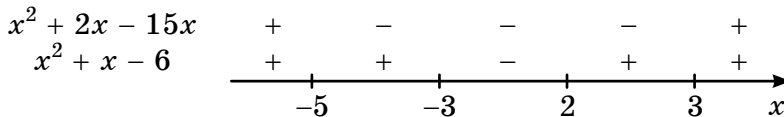
Решить уравнение:  $|x^2 + x - 6| = |x^2 + 2x - 15|$ .

**Решение.**

- ① Определим промежутки знакопостоянства выражений, стоящих в скобках модуля.

$x^2 + x - 6 = 0$	$x^2 + 2x - 15 = 0$
$x_1 = -3, x_2 = 2$	$x_1 = -5, x_2 = 3$

- ② Удобнее выделить промежутки, отметив полученные результаты на общем рисунке.



- ③ На пяти промежутках получили три различные ситуации.

I.  $x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$ .

$$x^2 + x - 6 = x^2 + 2x - 15; -x = -9; x = 9.$$

$9 \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$ .

II.  $x \in (-5; -3] \cup [2; 3)$ .

$$(x^2 + x - 6) = -(x^2 + 2x - 15);$$

$$x^2 + x - 6 = -x^2 - 2x + 15; 2x^2 + 3x - 21 = 0;$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-21) = 9 + 168 = 177;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{4};$$

$$x_1 \approx \frac{-3 + 13,3}{4} \approx 2,6; x_2 \approx \frac{-3 - 13,3}{4} \approx -4,1.$$

Оба корня принадлежат рассматриваемым промежуткам.

III.  $x \in (-3; 2)$ .

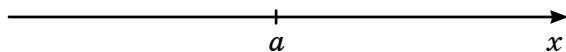
$$-(x^2 + x - 6) = -(x^2 + 2x - 15);$$

$$-x^2 - x + 6 = -x^2 - 2x + 15; x = 9; x \notin (-3; 2).$$

④ Ответ:  $9; \frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{-3 - \sqrt{177}}{4}$ .

### Замечание!

Не имеет значения, в какой из промежутков будет включён его конец. Например:



Можно рассмотреть промежутки  $(-\infty; a]$  и  $(a; +\infty)$ , или  $(-\infty; a)$  и  $[a; +\infty)$ , или  $(-\infty; a)$ ,  $(a; +\infty)$  и  $\{a\}$ .

Аналогично решают и неравенства, содержащие модуль.

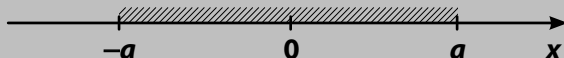
## 3

### Решение неравенств вида $|x| < a$ и $|x| > a$ , где $a > 0$

#### АЛГОРИТМ

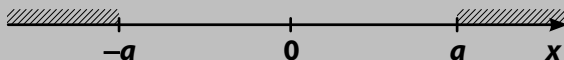
1

Выражение  $|x| < a$  означает, что точка координатной прямой с координатой  $x$  находится от начала отсчёта (точки с координатой 0) на расстоянии меньше  $a$ . Другими словами:  $x \in (-a; a)$ , т. е.  $-a < x < a$ .



или

Выражение  $|x| > a$  означает, что точка координатной прямой с координатой  $x$  находится от начала отсчёта (точки с координатой 0) на расстоянии больше  $a$ . Другими словами:  $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$ , т. е.  $\begin{cases} x < -a, \\ x > a. \end{cases}$



### Замечание!

Выражение  $|x| = 0$  означает, что  $x = 0$ .

**ПРИМЕР 1**

Решить неравенство:  $|x - 5| < 3$ .

*Решение.*

①  $-3 < x - 5 < 3; -3 + 5 < x < 3 + 5; 2 < x < 8$



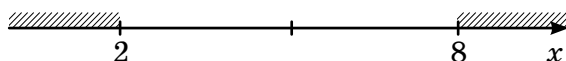
**Ответ:**  $x \in (2; 8)$ .

**ПРИМЕР 2**

Решить неравенство:  $|x - 5| > 3$ .

*Решение.*

①  $\begin{cases} x - 5 < -3, \\ x - 5 > 3; \end{cases} \begin{cases} x < -3 + 5, \\ x > 3 + 5; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x > 8. \end{cases}$



**Ответ:**  $x \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$ .

**Решение неравенств вида  $|f(x)| > |g(x)|$** **АЛГОРИТМ**

① Определить промежутки знакопостоянства для выражений  $f(x)$  и  $g(x)$ .



② Пользуясь координатной прямой, выделить промежутки с разным сочетанием знаков выражений  $f(x)$  и  $g(x)$ .



③ Решить заданное неравенство на каждом из полученных промежутков, раскрывая скобки модуля, пользуясь определением модуля.



④ Записать в ответ все решения, полученные на каждом из полученных промежутков.

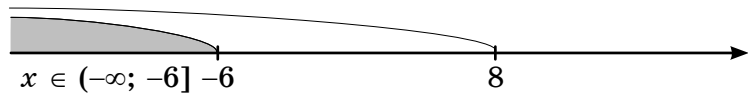


**ПРИМЕР**Решить неравенство:  $|x - 3| + |x + 6| \geq |5 - x|$ .**Решение.**

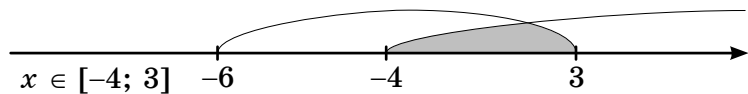
①	$x - 3 = 0$	$x + 6 = 0$	$5 - x = 0$
	$x = 3$	$x = -6$	$x = 5$

②	$5 - x$	+	+	+	-
	$x + 6$	-	+	+	+
	$x - 3$	-	-	+	+

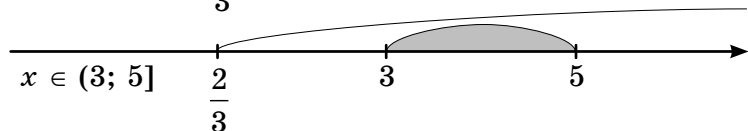
- ③ I.  $x \in (-\infty; -6]$ .  
 $-(x - 3) - (x + 6) \geq 5 - x; -x + 3 - x - 6 \geq 5 - x;$   
 $-x \geq 8; x \leq 8.$



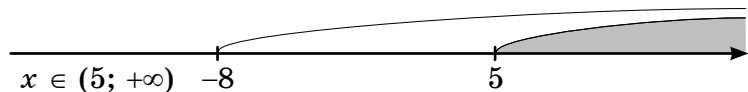
- II.  $x \in [-6; 3]$ .  
 $-(x - 3) + (x + 6) \geq 5 - x; -x + 3 + x + 6 \geq 5 - x;$   
 $x \geq -4.$



- III.  $x \in [3; 5]$ .  
 $(x - 3) + (x + 6) \geq 5 - x; x - 3 + x + 6 \geq 5 - x;$   
 $3x \geq 2; x \geq \frac{2}{3}.$



- IV.  $x \in (5; +\infty)$ .  
 $(x - 3) + (x + 6) \geq -(5 - x); x - 3 + x + 6 \geq -5 + x;$   
 $x \geq -8.$



- ④ Объединив решения, полученные на каждом из четырёх промежутков, получим:  
 $x \in (-\infty; -6] \cup [-4; +\infty).$



1) Решить уравнение:

а)  $|x - 7| + |2x + 3| = 0$ ;

б)  $|x^2 + 2x - 3| = 21$ ;

в)  $|x| + |x + 7| = 7$ .

2) Решить неравенство:

а)  $|x + 7| \geq 7$ ;

б)  $|x - 3| + |x + 3| < 6$ ;

в)  $|5x - 2| \leq |3 - x|$ ;

г)  $|x^2 + 2x| > 3$ .

# ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ



## ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональные уравнения — это уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня. Решение иррациональных уравнений следует начинать с нахождения области допустимых значений.

# 5

## Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = a$

### АЛГОРИТМ

1 Определить ОДЗ.



2 Избавиться от корня, возведя в квадрат обе части уравнения.



3 Записать ответ, учитывая ОДЗ.

### Помни!

Уравнение  $\sqrt{f(x)} = a$  не имеет решений, если  $a < 0$ . Так как  $\sqrt{f(x)} \geq 0$  при любом  $x$  из ОДЗ.



### ПРИМЕР

Решить уравнение:  $\sqrt{x+3} = 6$ .

*Решение.*

1 ОДЗ:  $x+3 \geq 0$ ;  $x \geq -3$ ;  $x \in [-3; +\infty)$ .

2 Избавляемся от корня, возведя в квадрат обе части уравнения.

$$(\sqrt{x+3})^2 = 6^2; x+3 = 36; x = 36 - 3; x = 33;$$
$$33 \in [-3; +\infty).$$

3 **Ответ:** 33.

АЛГОРИТМ

- 1 Определить ОДЗ.
- 2 Определить значения  $x$ , при которых равенство может выполняться, т. е.  $g(x) \geq 0$ .
- 3 Возвести в квадрат обе части данного уравнения и решить полученное уравнение.
- 4 Записать ответ, учитывая п. 1 и п. 2.

**Помни!**

Уравнение  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  не имеет решений, если  $g(x) < 0$ , так как  $\sqrt{f(x)} \geq 0$  при любом  $x$  из ОДЗ.

ПРИМЕР



Решить уравнение:  $\sqrt{x+3} = x-6$ .

*Решение.*

- 1 ОДЗ:  $x+3 \geq 0$ ;  $x \geq -3$ ;  $x \in [-3; +\infty)$ .
- 2 Равенство выполняется при условии, что и правая часть уравнения  $x-6 \geq 0$ , т. е.  $x \geq 6$ ,  $x \in [6; +\infty)$ .  
Таким образом, корни заданного уравнения ищем на промежутке  $x \in [6; +\infty)$ .
- 3  $(\sqrt{x+3})^2 = (x-6)^2$ ;  $x+3 = x^2 - 12x + 36$ ;  
 $x^2 - 13x + 33 = 0$ .  
 $D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33 = 169 - 132 = 37$ ;  
 $x_1 = \frac{13 + \sqrt{37}}{2 \cdot 1} = \frac{13 + \sqrt{37}}{2} \approx \frac{13 + 6,1}{2} \approx 9,55$ ;  
 $x_2 = \frac{13 - \sqrt{37}}{2} \approx 2,15$ ;  $\frac{13 - \sqrt{37}}{2} \notin [6; +\infty)$ .
- 4 *Ответ:*  $x = \frac{13 + \sqrt{37}}{2}$ .

# 7

## Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

### АЛГОРИТМ

① Определить ОДЗ.



② Возвести в квадрат обе части данного уравнения и решить полученное уравнение.



③ Записать ответ, учитывая ОДЗ.



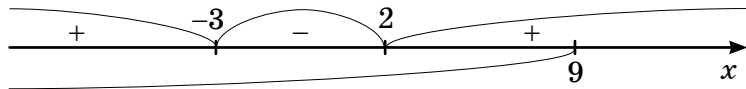
### ПРИМЕР

Решить уравнение:  $\sqrt{x^2 + x - 6} = \sqrt{9 - x}$ .

*Решение.*

① ОДЗ:

$x^2 + x - 6 \geq 0$	$9 - x \geq 0$
$x^2 + x - 6 = 0$	$-x \geq -9$
$x_1 = -3; x_2 = 2$	$x \leq 9$



$$x \in (-\infty; -3] \cup [2; 9].$$

②  $(\sqrt{x^2 + x - 6})^2 = (\sqrt{9 - x})^2;$

$$x^2 + x - 6 = 9 - x;$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0; x_1 = -5; x_2 = 3.$$

③ *Ответ:* -5; 3.

АЛГОРИТМ

1 Преобразовать уравнение к виду  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + a$ .



2 Определить ОДЗ.



3 Определить значения  $x$ , при которых может быть выполнено равенство из п. 1., т. е.  $\sqrt{g(x)} + a \geq 0$ .



4 Возвести в квадрат обе части равенства и решить полученное уравнение.



5 Записать ответ, учитывая п. 2 и п. 3.

ПРИМЕР



Решить уравнение:  $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-5} = 3$ .

*Решение.*

①  $\sqrt{x+8} = \sqrt{x-5} + 3$ .

② ОДЗ:  $x+8 \geq 0$ ;  $x \geq -8$  и  $x-5 \geq 0$ ;  $x \geq 5$ ;  $x \in [5; +\infty)$ .

③ Равенство выполняется при условии  $\sqrt{x-5} + 3 \geq 0$ .  
(Так как  $\sqrt{x-5} \geq 0$  и  $3 > 0$ , то правая часть уравнения не принимает отрицательных значений.)

④  $(\sqrt{x+8})^2 = (\sqrt{x-5} + 3)^2$ ;  $x+8 = x-5 + 6\sqrt{x-5} + 9$ ;  
 $6\sqrt{x-5} = x+8 - x - 4$ ;  $6\sqrt{x-5} = 4$ ;  $3\sqrt{x-5} = 2$ ;  
 $(3\sqrt{x-5})^2 = 2^2$ ;  $9(x-5) = 4$ ;  $x-5 = \frac{4}{9}$ ;  $x = 5\frac{4}{9}$ .

⑤ *Ответ:*  $5\frac{4}{9}$ .

### АЛГОРИТМ

1 Определить ОДЗ.



2 Ввести новую переменную  $t = \sqrt{g(x)}$ , тогда  $t \geq 0$ .



3 Преобразовать исходное уравнение и подставить  $t$ .  
 Решить полученное уравнение.



4 Подставляя полученные решения из п. 3 в п. 2, найти значения  $x$ .



5 Записать в ответ значения  $x$  из п. 4, учитывая ОДЗ.



### ПРИМЕР

Решить уравнение:  $x - 4 - 2\sqrt{x-1} = 0$ .

*Решение.*

Уравнение  $x - 4 - 2\sqrt{x-1} = 0$  решают с помощью введения новой переменной.

① ОДЗ:  $x - 1 \geq 0$ ,  $x \geq 1$ .

② Пусть  $t = \sqrt{x-1}$ ,  $t \geq 0$ .

③  $(x-1) - 2\sqrt{x-1} - 3 = 0$ ;  $t^2 - 2t - 3 = 0$ ;  $t_1 = 3$ ;  $t_2 = -1$ .

④ Так как  $-1 \not\geq 0$ , то  $\sqrt{x-1} = 3$ ;  $x-1 = 9$ ;  $x = 10$ .  
 Учитывая ОДЗ, видим, что 10 — корень уравнения.

⑤ *Ответ:* 10.



### ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить уравнение:

1)  $\sqrt{2x-1} = -2$ ;

5)  $\sqrt{2x-1} = 3-x$ ;

2)  $\sqrt{2x-1} = 0$ ;

6)  $\sqrt{x-3} = \sqrt{5-x}$ ;

3)  $\sqrt{2x-1} = 5$ ;

7)  $\sqrt{x+6} - \sqrt{x^2-x+6} = x$ .

4)  $\sqrt[3]{2x-1} = -2$ ;