СОДЕРЖАНИЕ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

$$|a| = \begin{cases} a, \ a \geq 0, \\ -a, \ a < 0 \end{cases}$$

(т. е. модуль любому выражению приписывает знак «+»).

Помни!

- модуль любого числа есть число неотрицательное;
- модули противоположных чисел равны.

1 Решение уравнений вида $|x| = a$

АЛГОРИТМ

❶ **Уравнения легко решать, пользуясь таблицей:**

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
решений нет	$x = 0$	$x_1 = a; x_2 = -a$

ПРИМЕР 1

Решить уравнение: $|x - 5| = 12$.

Решение.

① Так как $12 > 0$, то

$x - 5 = 12$	или	$x - 5 = -12$
$x = 12 + 5$		$x = -12 + 5$
$x = 17$		$x = -7$

Ответ: $-7; 17$.

ПРИМЕР 2

Решить уравнение: $|x - 5| = -12$.

Решение.

① Так как $-12 < 0$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

2 Решение уравнений вида $|f(x)| + |g(x)| = a$; $|f(x)| = |g(x)|$

АЛГОРИТМ

❶ **Определить промежутки знакопостоянства для выражений $f(x)$ и $g(x)$.**

⇩

❷ **Пользуясь координатной прямой, выделить промежутки с разными сочетаниями знаков выражений $f(x)$ и $g(x)$.**

⇩

❸ **Решить заданное уравнение на каждом из полученных промежутков, раскрывая скобки модуля, пользуясь определением модуля.**

⇩

❹ **Записать в ответ все решения, полученные на каждом из промежутков.**

ПРИМЕР 1

Решить уравнение: $|x - 2| + |5 - x| = 7$.

Решение.

① Определим промежутки знакопостоянства выражений, стоящих в скобках модуля.

$x - 2 = 0$	$5 - x = 0$
$x = 2$	$x = 5$
$-$ 2 $+$	$+$ 5 $-$

② Удобнее выделить промежутки, отметив полученные результаты на общем рисунке.

	$(-\infty; 2)$	$(2; 5)$	$(5; +\infty)$
$5 - x$	$+$	$+$	$-$
$x - 2$	$-$	$+$	$+$

③ Таким образом, легко видеть, что мы получили 3 промежутка, описывающих 3 различных ситуации.

I. $x \in (-\infty; 2]$.

$5 - x > 0$, значит $|5 - x| = 5 - x$;

$x - 2 < 0$, значит $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$.

Значит, уравнение на данном промежутке имеет вид:
$-(x - 2) + (5 - x) = 7$; $-x + 2 + 5 - x = 7$;
$-2x = 0$; $x = 0$; $0 \in (-\infty; 2]$; $x = 0$.
Аналогично скобки модуля раскрываем на каждом из оставшихся промежутков.

II. $x \in (2; 5]$.
$(x - 2) + (5 - x) = 7$; $x - 2 + 5 - x = 7$;
$3 \neq 7$; решений нет.

III. $x \in (5; +\infty)$.
$(x - 2) - (5 - x) = 7$; $x - 2 - 5 + x = 7$;
$2x = 14$; $x = 7$; $7 \in (5; +\infty)$; $x = 7$.

4 В ответ записываем все решения, полученные на каждом из промежутков.
Ответ: 0; 7.

ПРИМЕР 2

Решить уравнение: $|x^2 + x - 6| = |x^2 + 2x - 15|$.

Решение.

1 Определим промежутки знакопостоянства выражений, стоящих в скобках модуля.

$x^2 + x - 6 = 0$	$x^2 + 2x - 15 = 0$
$x_1 = -3,\ x_2 = 2$	$x_1 = -5,\ x_2 = 3$

2 Удобнее выделить промежутки, отметив полученные результаты на общем рисунке.

$x^2 + 2x - 15x$	+		−		−		−		+
$x^2 + x - 6$	+		+		−		+		+
x		-5		-3		2		3	

3 На пяти промежутках получили три различные ситуации.

I. $x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.
$\cancel{x^2} + x - 6 = \cancel{x^2} + 2x - 15$; $-x = -9$; $x = 9$.
$9 \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

II. $x \in (-5; -3] \cup [2; 3)$.
$(x^2 + x - 6) = -(x^2 + 2x - 15)$;
$x^2 + x - 6 = -x^2 - 2x + 15$; $2x^2 + 3x - 21 = 0$;
$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-21) = 9 + 168 = 177$;
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{177}}{4};$$
$$x_1 \approx \frac{-3 + 13,3}{4} \approx 2,6;\ x_2 \approx \frac{-3 - 13,3}{4} \approx -4,1.$$
Оба корня принадлежат рассматриваемым промежуткам.

III. $x \in (-3;\ 2)$.

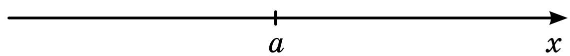
$-(x^2 + x - 6) = -(x^2 + 2x - 15)$;

$-x^2 - x + 6 = -x^2 - 2x + 15$; $x = 9$; $x \notin (-3;\ 2)$.

④ ***Ответ***: $9;\ \dfrac{-3+\sqrt{177}}{4};\ \dfrac{-3-\sqrt{177}}{4}$.

Замечание!

Не имеет значения, в какой из промежутков будет включён его конец. Например:

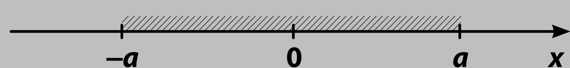


Можно рассмотреть промежутки $(-\infty;\ a]$ и $(a;\ +\infty)$, или $(-\infty;\ a)$ и $[a;\ +\infty)$, или $(-\infty;\ a)$, $(a;\ +\infty)$ и $\{a\}$. Аналогично решают и неравенства, содержащие модуль.

3 Решение неравенств вида $|x| < a$ и $|x| > a$, где $a > 0$

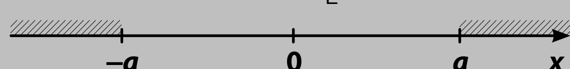
АЛГОРИТМ

❶ **Выражение $|x| < a$ означает, что точка координатной прямой с координатой x находится от начала отсчёта (точки с координатой 0) на расстоянии меньше a. Другими словами: $x \in (-a;\ a)$, т. е. $-a < x < a$.**



или

Выражение $|x| > a$ означает, что точка координатной прямой с координатой x находится от начала отсчёта (точки с координатой 0) на расстоянии больше a. Другими словами: $x \in (-\infty;\ -a) \cup (a;\ +\infty)$, т. е. $\left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a. \end{array}\right.$



Замечание!

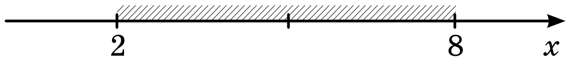
Выражение $|x| = 0$ означает, что $x = 0$.

ПРИМЕР 1

Решить неравенство: $|x - 5| < 3$.

Решение.

① $-3 < x - 5 < 3$; $-3 + 5 < x < 3 + 5$; $2 < x < 8$



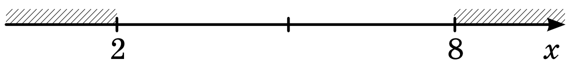
Ответ: $x \in (2; 8)$.

ПРИМЕР 2

Решить неравенство: $|x - 5| > 3$.

Решение.

① $\left[\begin{array}{l} x-5<-3, \\ x-5>3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x<-3+5, \\ x>3+5; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>8. \end{array}\right.$



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (8; +\infty)$.

4 Решение неравенств вида $|f(x)| > |g(x)|$

АЛГОРИТМ

❶ **Определить промежутки знакопостоянства для выражений $f(x)$ и $g(x)$.**

❷ **Пользуясь координатной прямой, выделить промежутки с разным сочетанием знаков выражений $f(x)$ и $g(x)$.**

❸ **Решить заданное неравенство на каждом из полученных промежутков, раскрывая скобки модуля, пользуясь определением модуля.**

❹ **Записать в ответ все решения, полученные на каждом из полученных промежутков.**

ПРИМЕР

Решить неравенство: $|x - 3| + |x + 6| \geq |5 - x|$.

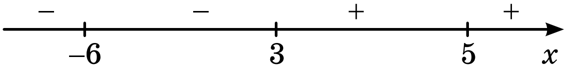
Решение.

①

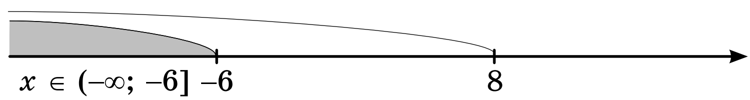
$x - 3 = 0$	$x + 6 = 0$	$5 - x = 0$
$x = 3$	$x = -6$	$x = 5$

②

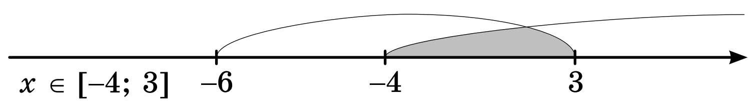
	$(-\infty; -6)$	$(-6; 3)$	$(3; 5)$	$(5; +\infty)$
$5 - x$	+	+	+	−
$x + 6$	−	+	+	+
$x - 3$	−	−	+	+



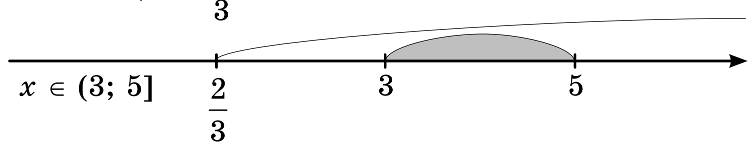
③ I. $x \in (-\infty; -6]$.
$-(x - 3) - (x + 6) \geq 5 - x$; $-x + 3 - x - 6 \geq 5 - x$;
$-x \geq 8$; $x \leq 8$.



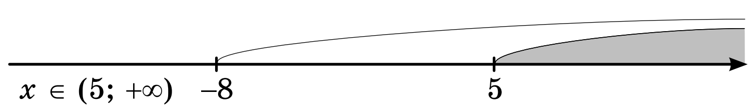
II. $x \in (-6; 3]$.
$-(x - 3) + (x + 6) \geq 5 - x$; $-x + 3 + x + 6 \geq 5 - x$;
$x \geq -4$.



III. $x \in (3; 5]$.
$(x - 3) + (x + 6) \geq 5 - x$; $x - 3 + x + 6 \geq 5 - x$;
$3x \geq 2$; $x \geq \dfrac{2}{3}$.



IV. $x \in (5; +\infty)$.
$(x - 3) + (x + 6) \geq -(5 - x)$; $x - 3 + x + 6 \geq -5 + x$;
$x \geq -8$.



④ Объединив решения, полученные на каждом из четырёх промежутков, получим:
$x \in (-\infty; -6) \cup [-4; +\infty)$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1) Решить уравнение:

а) $|x - 7| + |2x + 3| = 0$;

б) $|x^2 + 2x - 3| = 21$;

в) $|x| + |x + 7| = 7$.

2) Решить неравенство:

а) $|x + 7| \geq 7$;

б) $|x - 3| + |x + 3| < 6$;

в) $|5x - 2| \leq |3 - x|$;

г) $|x^2 + 2x| > 3$.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональные уравнения — это уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня. Решение иррациональных уравнений следует начинать с нахождения области допустимых значений.

5 Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = a$

АЛГОРИТМ

❶ **Определить ОДЗ.**

⇩

❷ **Избавиться от корня, возведя в квадрат обе части уравнения.**

⇩

❸ **Записать ответ, учитывая ОДЗ.**

Помни!
Уравнение $\sqrt{f(x)} = a$ не имеет решений, если $a < 0$. Так как $\sqrt{f(x)} \ge 0$ при любом x из ОДЗ.

ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x+3} = 6$.

Решение.

① ОДЗ: $x + 3 \ge 0$; $x \ge -3$; $x \in [-3; +\infty)$.

② Избавляемся от корня, возведя в квадрат обе части уравнения.

$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = 6^2$; $x + 3 = 36$; $x = 36 - 3$; $x = 33$;

$33 \in [-3; +\infty)$.

③ ***Ответ***: 33.

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

6

АЛГОРИТМ

❶ **Определить ОДЗ.**

❷ **Определить значения *x*, при которых равенство может выполниться, т. е. $g(x) \geq 0$.**

❸ **Возвести в квадрат обе части данного уравнения и решить полученное уравнение.**

❹ **Записать ответ, учитывая п. 1 и п. 2.**

Помни!
Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ не имеет решений, если $g(x) < 0$, так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$ при любом x из ОДЗ.

ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x+3} = x - 6$.

Решение.

① ОДЗ: $x + 3 \geq 0$; $x \geq -3$; $x \in [-3; +\infty)$.

② Равенство выполняется при условии, что и правая часть уравнения $x - 6 \geq 0$, т. е. $x \geq 6$, $x \in [6; +\infty)$. Таким образом, корни заданного уравнения ищем на промежутке $x \in [6; +\infty)$.

③ $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-6)^2$; $x + 3 = x^2 - 12x + 36$;

$x^2 - 13x + 33 = 0$.

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33 = 169 - 132 = 37$;

$$x_1 = \frac{13+\sqrt{37}}{2 \cdot 1} = \frac{13+\sqrt{37}}{2} \approx \frac{13+6,1}{2} \approx 9,55;$$

$$x_2 = \frac{13-\sqrt{37}}{2} \approx 2,15;\ \frac{13-\sqrt{37}}{2} \notin [6; +\infty).$$

④ ***Ответ***: $x = \dfrac{13+\sqrt{37}}{2}$.

7 Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

АЛГОРИТМ

1. Определить ОДЗ.
2. Возвести в квадрат обе части данного уравнения и решить полученное уравнение.
3. Записать ответ, учитывая ОДЗ.

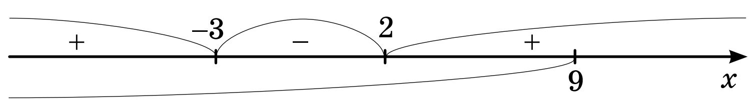
ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + x - 6} = \sqrt{9 - x}$.

Решение.

① ОДЗ:

$x^2 + x - 6 \geq 0$	$9 - x \geq 0$
$x^2 + x - 6 = 0$	$-x \geq -9$
$x_1 = -3;\ x_2 = 2$	$x \leq 9$



$x \in (-\infty; -3] \cup [2; 9]$.

② $\left(\sqrt{x^2 + x - 6}\right)^2 = \left(\sqrt{9 - x}\right)^2$;

$x^2 + x - 6 = 9 - x$;

$x^2 + 2x - 15 = 0;\ x_1 = -5;\ x_2 = 3$.

③ ***Ответ***: $-5;\ 3$.

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = a$

8

АЛГОРИТМ

❶ **Преобразовать уравнение к виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} + a$.**

⇩

❷ **Определить ОДЗ.**

⇩

❸ **Определить значения x, при которых может быть выполнено равенство из п. 1., т. е. $\sqrt{g(x)} + a \geq 0$.**

⇩

❹ **Возвести в квадрат обе части равенства и решить полученное уравнение.**

⇩

❺ **Записать ответ, учитывая п. 2 и п. 3.**

ПРИМЕР

Решить уравнение: $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-5} = 3$.

Решение.

① $\sqrt{x+8} = \sqrt{x-5} + 3$.

② ОДЗ: $x + 8 \geq 0$; $x \geq -8$ и $x - 5 \geq 0$; $x \geq 5$; $x \in [5; +\infty)$.

③ Равенство выполняется при условии $\sqrt{x-5} + 3 \geq 0$. (Так как $\sqrt{x-5} \geq 0$ и $3 > 0$, то правая часть уравнения не принимает отрицательных значений.)

④ $\left(\sqrt{x+8}\right)^2 = \left(\sqrt{x-5}+3\right)^2$; $x + 8 = x - 5 + 6\sqrt{x-5} + 9$; $6\sqrt{x-5} = x + 8 - x - 4$; $6\sqrt{x-5} = 4$; $3\sqrt{x-5} = 2$; $\left(3\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2$; $9(x - 5) = 4$; $x - 5 = \frac{4}{9}$; $x = 5\frac{4}{9}$.

⑤ ***Ответ***: $5\frac{4}{9}$.

9

Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)} - a\sqrt{g(x)} = 0$ способом введения новой переменной

АЛГОРИТМ

❶ **Определить ОДЗ.**

⇩

❷ **Ввести новую переменную $t = \sqrt{g(x)}$, тогда $t \geq 0$.**

⇩

❸ **Преобразовать исходное уравнение и подставить t. Решить полученное уравнение.**

⇩

❹ **Подставляя полученные решения из п. 3 в п. 2, найти значения x.**

⇩

❺ **Записать в ответ значения x из п. 4, учитывая ОДЗ.**

ПРИМЕР

Решить уравнение: $x - 4 - 2\sqrt{x-1} = 0$.

Решение.

Уравнение $x - 4 - 2\sqrt{x-1} = 0$ решают с помощью введения новой переменной.

① ОДЗ: $x - 1 \geq 0$, $x \geq 1$.

② Пусть $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$.

③ $(x - 1) - 2\sqrt{x-1} - 3 = 0$; $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = 3$; $t_2 = -1$.

④ Так как $-1 \ngeq 0$, то $\sqrt{x-1} = 3$; $x - 1 = 9$; $x = 10$.
Учитывая ОДЗ, видим, что 10 — корень уравнения.

⑤ ***Ответ***: 10.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Решить уравнение:

1) $\sqrt{2x-1} = -2$;

2) $\sqrt{2x-1} = 0$;

3) $\sqrt{2x-1} = 5$;

4) $\sqrt[3]{2x-1} = -2$;

5) $\sqrt{2x-1} = 3 - x$;

6) $\sqrt{x-3} = \sqrt{5-x}$;

7) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x^2 - x + 6} = x$.