Содержание

Вступительное слово от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания данной книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и Princeton University Press очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Физика – это славный отвар из разных ингредиентов. Не существует одного универсального подхода, когда имеешь дело с самой Природой. Опыты и наблюдения, безусловно, эффективны, но, кроме них, есть еще понятия, картинки, воображение, математика и физическая интуиция, завершенные логической последовательностью. Мы похожи на исследователей лабиринта с удивительными открытиями на каждом повороте – не для слабонервных!

Изучение физики и преподавание физики (две стороны одной медали) происходят примерно одинаково во всем мире. Есть лаборатории, лекции, проблемные семинары, компьютерные вычисления и книги – любой подход, который может помочь нам понять предмет. Да и сами книги используют разные подходы. Некоторые – «сверху вниз», начиная с физических законов, а затем разрабатывая примеры и приложения. Другие основаны на истории, развивая физику так, будто автор воображает, что она была изобретена или могла бы быть изобретена, если бы реальная история не была так полна ответвлений и тупиков. Иные книги основаны на концептуальном подходе, избегая математики, как чумы. Некоторые нашпигованы математическим анализом, но тонки в понятиях, иллюстрациях и применениях. У каждого подхода есть свои достоинства.

В книге «Красота простой физики» Пол Нахин рассматривает предмет в более свежем разрезе. Он показывает нам несколько действительно интересных примеров применения простых физических законов к разнообразным случаям, вопросам и головоломкам.

Здесь освещается множество тем: мы узнаем, как выжать больше энергии из восполняемых источников, в главах «Энергия из движения воды» и «Энергия из движения воздуха». Есть футуристичная глава «Быстрое путешествие по транзитной трубе Большого круга». Мы узнаем, как лучше всего ловить бейсбольный мяч, как измерить силу тяжести в нашем гараже, а также почему небо ночью темное. Мы узнаем об ошибке, которую сделал сам Исаак Ньютон. Мы даже узнаем, как вычислить, который из трех выключателей в подвале включает лампочку на чердаке, лишь один раз поднявшись по лестнице!

Я много почерпнул из этой книги. Я занимаюсь физикой и преподаю ее уже много лет, но всегда есть что-то новое, чего ты еще не знаешь. Например, я долго пользовался пространственным анализом для решения задач по механике, требуя согласованности в фундаментальных измерениях массы, длины и времени в уравнениях. Тем не менее в этой книге я встретил несколько красивых примеров, которых не видел раньше!

Эта книга не обходит анализ стороной. Предполагается, что читатель знает основные начальные понятия дифференциального и интегрального исчисления. Математику не заметают под коврик: если путь решения задачи пролегает через взятие одного-двух интегралов, Нахин не машет рукой, говоря: «Ну а теперь, с очевидностью, следует, что...». Он вникает в суть и показывает вам все детали. Так что если вы уже хорошо разбираетесь в простой алгебре, то можете просмотреть эти задачи, любуясь прямым, ясным изложением; но если вы только начинаете разбираться или, наоборот, подзабыли предмет, то можете вникнуть в каждый шаг, чтобы узнать то, что никогда не изучали, или то, что вы, возможно, забыли.

Если вы читали что-нибудь из предыдущих книг Нахина, то не будете удивлены, что эта также будет до отвала наполнена развлекательными, неформальными и иногда удивительными примерами на любую тему. Будь вы практикующим ученым, простым смертным с некоторым знанием математики и физики или обучающимся любого уровня (если вы знакомы с дифференциальным исчислением или готовы ему научиться), вам обязательно понравится зарыться в великолепные главы данной книги.

Т. М. Хеллиуэлл,
почетный профессор физики кафедры Бертона Беттингена,
колледж Харви Мадда,
Клермонт, Калифорния,
февраль 2015

Предисловие с задачами

Физика должна преподаваться настолько просто,
насколько это возможно. Но не проще.

– Альберт Эйнштейн

Термодинамики наука,
По существу, совсем пустяк.
Пытаешься как проще,
Выходит все не так.

– Марк Země

Математический анализ – это, в принципе,
просто хорошо организованный здравый смысл.

– Джордж Дарвин[2]

Я сделал любопытное наблюдение о том, как типичный «человек с улицы» (допуская, что это понятие действительно что-то означает) реагирует на оглашение нового, удивительного научного открытия. Обычно это изумление, но порой реакция чрезмерная. Например, несколько лет назад исследовательская группа в CERN (известная лаборатория физики частиц высоких энергий около Женевы) сообщила, что они наблюдали сверхсветовое нейтрино. Я помню то, что *сам* подумал, когда услышал сенсационный репортаж по телевизору, – да, ребятам просто надо проверить свои измерительные приборы! (И точно, оказалось, что было плохое соединение кабеля.)

Тем не менее один из моих школьных знакомых, с которым я иногда переписываюсь по электронной почте, к моему смущению, просто прыгал от восторга. Будучи юристом, который, как я подозреваю, не очень разбирается в физических и математических аргументах, лежащих в основе специальной теории относительности, мой корреспондент был очень расстроен, когда я ответил на его восторженное письмо скептичным взглядом на отчет CERN. На следующий год, в 2012-м, неловкая ситуация повторилась – мой корреспондент в роли восторженного чирлидера и я – утомленный ругатель вечеринок, – когда было объявлено вероятное открытие бозона Хиггса (так называемой частицы Бога) в той же лаборатории CERN. В этом, как я вынужден был поверить, была их заслуга. Но я до сих пор не понимал, *почему* этот умный человек, проработавший корпоративным юристом не один десяток лет, был так готов (действительно был положительно настроен) прыгнуть на фургон с оркестром, который неизменно появляется вокруг каждой сенсационной и фантастической новости из мира физики.

На самом деле я должен признать, что мой школьный знакомый не так потерян с научной точки зрения, как многие другие американцы. В гостевой редакционной статье в Американском журнале физики (октябрь 1996 года) Майкл Шермер (автор книги «Почему люди верят в странные вещи» 1997 года) процитировал опрос 1990 года, проведенный Гэллапом, в котором указывалось, что более половины взрослых американцев верят в астрологию, чуть менее половины – что динозавры и люди жили одновременно и более трети верят в привидения. Я подозреваю, что с тех пор эти проценты не сильно изменились (или если они изменились, то не к лучшему). Его объяснение этому таково: «[люди] не могут принять… реальность».

Таким образом, у нас широко распространено увлечение предметами, перечисленными в опросе Гэллапа, а также такая же очевидная чепуха, как Бермудский треугольник, монстр из озера Лох-Несс, снежный человек и, конечно же, миф о том, что Соединенные Штаты якобы скрывают инопланетный космический корабль в таинственной Зоне 51 на сверхсекретной авиабазе в Нью-Мексико. Голливудские кинематографисты любят такие глупости. Почему бы и нет? Это приносит им *огромные* деньги от легковерных, и многие из их научно-фантастических фильмов не сделали ничего, чтобы препятствовать распространению веры простых людей в сумасшедшую «науку»[3].

Подумав об этом некоторое время, я пришел к выводу: подобный энтузиазм вызван тем, что эти объявления кажутся волшебством. Если нейтрино могут двигаться быстрее скорости света, тогда, черт возьми, может быть, все действительно полезные вещи, над которыми мы охали и ахали в «Звездном пути» (*Star Trek*), могли бы действительно произойти – такие как встреча с экзотическими инопланетянами в других галактиках и путешествие назад во времени. Унылое следствие, к которому я пришел, заключается в том, что многие люди, должно быть, чувствуют, что повседневный мир каким-то образом испытывает острый дефицит (или, по крайней мере, нехватку) восторга. Это осознание заставило меня грустить, в основном потому, что это очень неправильно. Обычный мир, в котором мы живем, уже изумителен, и не нужно впадать в заблуждение. Большинство людей просто принимают как должное многие вещи, которые при приложении к ним самой малой толики математики, становятся совершенно удивительными и даже чудесными.

Чего не хватает моему корреспонденту и тем, кто находится в такой же ситуации, так это знаний фундаментальной физики и математики. В Америке существует давняя традиция, чтобы образованные люди имели такие знания, начиная с самых ранних дней существования республики. Идеи Ньютона, которые к середине 1700-х годов преподавались в европейских и английских университетах, оказали глубокое влияние на отцов-основателей. Например, Франклин на самом деле пытался встретиться с Ньютоном, когда в молодости жил в Лондоне, а Мэдисон (будучи студентом из Принстона) написал эссе, сравнивающее мир человеческих дел с миром природы. И включение Джефферсоном в Декларацию независимости длинного раздела «естественного права» может быть напрямую связано с его чтением «Принципов Ньютона» и трудами других (таких как Локк и Вольтер), на которых также оказали аналогичное влияние[4].

Поспешу вас заверить, что знания, о которых я говорю, – это не знания физика-теоретика или доктора математических наук, обладающих исключительной способностью манипулировать эзотерическими символами современной математики. Теперь, очевидно, если вы изучаете то, что происходит внутри «кротовой норы», или то, на что была похожа Вселенная через 10–15 секунд после Большого взрыва, то глубокое понимание общей теории относительности, квантовой электродинамики и тензорного исчисления будет, безусловно, большим подспорьем. Но это вовсе не то, чем мы собираемся заниматься в этой книге. Темы, обсуждаемые здесь, будут гораздо ближе к дому, чем внутренняя часть «кротовой норы» или детали грандиозного гигантского взрыва, который был Большим взрывом. Вместо этого мы будем исследовать вещи, которые мы видим (или могли бы поместить перед глазами, если хотели бы немного поэкспериментировать) в нашей повседневной жизни.

Пожалуйста, не поймите меня неправильно – глубокое понимание математической физики (а этого, повторяю, нам здесь не нужно) действительно может открыть двери в удивительные миры. Иные из них настолько удивительны, что я думаю, что мой школьный корреспондент метафорически взорвется от волнения (и поэтому завалит меня еще большим количеством писем). Возьмем, к примеру, эссе[5], появившееся почти 25 лет назад, которое начинается шокирующими словами: «Представьте себе странную инопланетную цивилизацию, которая развивается внутри огромного изолятора, который медленно охлаждается. Предположим, что без ведома жителей изолятор перейдет в металлическую фазу ниже определенной температуры. Жители этого необычного мира со временем выведут законы физики и химии. Однако когда изолятор остыл, он внезапно стал металлическим проводником. Жителям покажется, что в физических законах произошло внезапное изменение: электромагнитные поля большой дальности больше не будут существовать, изменится распространение радиоволн и т. д. В зависимости от биологических свойств жителей вполне вероятно, что новые законы физики и химии не будут поддерживать жизнь, и переход, таким образом, будет означать немедленную смерть для всей цивилизации. Есть ли вероятность, что в нашей Вселенной может произойти внезапное изменение законов физики? Такой вопрос может показаться нелепым, если бы не тот факт, что в стандартной модели слабых и электромагнитных взаимодействий *подобный переход уже произошел!* [выделено в оригинальном эссе]».

Авторы объяснили, что это изменение в физических законах произошло очень давно, сразу после Большого взрыва, что привело к появлению тех законов физики, которые знакомы нам сегодня. Но может ли такое внезапное изменение произойти снова? Согласно одной теории, обсуждаемой в эссе, ответ – да, если безмассовый фотон, который мы знаем сегодня, внезапно стал массивным. Одним из следствий этого будет то, что длина радиоволн будет ограничена диапазоном 1 сантиметр! И поэтому, хотя домашнее кабельное телевидение все еще сможет работать, сотовые телефоны, автомобильные радиоприемники и радары управления воздушным движением работать не будут. Придя к этим поразительным выводам, авторы привели несколько страниц довольно мощной математической физики.

Но это вовсе не то, что мы собираемся делать здесь. Темы, обсуждаемые в данной книге, будут гораздо более типичными для «реальной жизни». Необходимая физика будет включать такие элементарные понятия, как закон Архимеда, закон Ома, законы движения Ньютона, законы сохранения энергии и импульса, вычисление центра массы совокупности массивных тел и определения момента инерции для простых геометрических объектов, таких как полые и сплошные сферы и цилиндры. (Когда мы будем использовать эти понятия, я напомню вам детали, которые будут нам нужны.) Необходимыми математическими инструментами будут алгебра, тригонометрия, векторы и – время от времени – даже немного дифференциального исчисления на уровне первокурсника в колледже. То есть я ожидаю, что вы знаете материал, который освоили многие способные старшеклассники, прежде чем отправиться в колледж. Хорошо, иногда я буду расширять математику чуть выше уровня первокурсника (может быть, до уровня второкурсника), но когда я это сделаю, то постараюсь быть более аккуратным в расчетах – и поэтому вы сможете узнать здесь и что-то новое из математики, кроме ожидаемой физики!

В этом же духе я вспоминаю, как однажды прочел то, что сейчас называю определением физики Джулии Чайлд / Рэйчел Рэй, по словам одного школьника, чей разговор с одноклассником подслушал учитель: «Возьмите немного алгебры, добавьте щепотку геометрии. Затем добавьте еще алгебры, тригонометрии и кое-что, что должно быть математикой в колледже. Плюс куча вещей из химии, которые вы забыли, и даже немного биологии[6]. Смешайте все вместе, и получите физику». В соответствии с изречением Эйнштейна я очень старался сделать дискуссии простыми, но не настолько простыми, чтобы, как посетовал профессор Земански, они просто были ошибочными.

Некоторые читатели могут быть настроены немного скептически и совсем не поддаться убеждению, что такие элементарные инструменты действительно могут объяснить интересные, сложные вопросы. На это беспокойство у меня есть драматическое опровержение. Самой высокосекретной научной разработкой Второй мировой войны была атомная бомба[7], и любые публичные разговоры о природе такого устройства были верным способом попасть в серьезные неприятности. Чтобы оценить, насколько эти неприятности могли быть большими, рассмотрим, что произошло после того, как в начале 1944 года появился короткий фантастический рассказ[8]. Эта история содержала удивительно подробное описание атомной бомбы как урановой бомбы, устройства U-235, запущенного нейтронным детонатором. Это было шокирующим для людей в Вашингтоне, округ Колумбия, которые были задействованы в аппарате безопасности, прикрепленном к Манхэттенскому проекту (поскольку программа атомной бомбы США была намеренно названа неправильно). Угрозы утечки безопасности было достаточно, чтобы и ФБР, и контрразведка армии США свалились на головы как автора, так и редактора журнала[9].

После того как война закончилась, секретность слегка ослабили, но были еще вопросы, о которых нельзя говорить. Например, почти сразу после атомных бомбардировок в Японии в августе 1945 г. Генри Смит (1898–1986), заведующий кафедрой физики в Принстонском университете, опубликовал отчет в формате книги под названием «Общий отчет о разработке методов с использованием атомной энергии». Энергия для военных целей. Он сделал это по приказу генерала Лесли Гроувса (1896–1970), руководителя Манхэттенского проекта, чтобы служить (как утверждается) общественным интересам. Но не все о бомбе было в отчете Смита. Действительно, в своем вступлении к докладу Гроувс предупредил читателей, чтобы они не просили дополнительную информацию, помимо того что было напечатано, и угрожал всем, кто пытался это сделать, преследованием по закону о шпионаже!

Одним из элементов, который явно отсутствовал, был расчет так называемой критической массы урановой делительной бомбы с цепной реакцией на быстрых нейтронах (или *устройство* – эвфемизм, использованный в Лос-Аламосе по соображениям безопасности), то есть минимальная масса U-235 спонтанно взорвалась бы. Знание критической массы имеет решающее значение для попытки; если оно окажется слишком большим, чтобы его можно было использовать в качестве доставляемого (самолетом) оружия, тогда просто не было бы смысла создавать устройство. В отчете было высказано предположение, что такая масса может составлять от 1 до 100 килограммов, но фактическое значение было удержано в секрете.

Ведущий физик-теоретик во время Второй мировой войны в Германии, Вернер Гейзенберг (1901–1976), которому в 1932 году была присуждена Нобелевская премия по физике, серьезно воспрепятствовал усилиям нацистов по созданию атомной бомбы из-за грубой ошибки в расчете критической массы для U-235. Он думал, что она будет очень большой, порядка тонны. Эта ошибка была на самом деле фатальной, и даже опережая американцев более чем на три года, немцы не запустили реактор, а тем более не создали бомбу. Сегодняшняя версия событий состоит в том, что Гейзенберг просто действительно не понимал, как на самом деле будет работать атомная бомба, но после войны он счел целесообразным преднамеренно заявить о своей «ошибке» из-за моральных возражений против разработки такого разрушительного оружия. Большинство историков науки теперь считают, что Гейзенберг распространил эту историю, чтобы дистанцироваться от его добровольной поддержки нацистских военных действий и «объяснить» его фундаментальную физическую ошибку[10], в действительности не является правдой. Затем, в 1947 году, в Американском физическом журнале появилась заметка, в которой, используя простые физические аргументы и математику средней школы, было показано, как рассчитать критическую массу, которая будет «около 2,5 кг[11]».

Автор заметки, китайский физик-теоретик Хофф Лу (1914–1997) в Шеньянском государственном университете, был защищен от угрозы Гроувса, поскольку разработал все это, используя только известные законы физики и математики[12]. У него не было «внутреннего допинга» от кого-либо, кто участвовал в Манхэттенском проекте.

Фактическое значение критической массы зависит от множества факторов, включая чистоту U-235 в делящейся массе, плотность массы и ее форму, а также характер окружающей оболочки, удерживающей нейтроны (так называемая обкладка). Значение, предложенное Лу, было, безусловно, ближе к реальности, чем значение Гейзенберга.

Лу сделал то же, что и мы сделаем здесь, хотя и несколько менее драматично. То, что я сделаю в этой книге, иллюстрирует, насколько неправ был математик Г. Х. Харди, когда объявил: «[Знание] немного… физики… не имеет никакого значения в обычной жизни[13]».

Ну и наконец, вот четыре быстрых примера уровня сложности вопросов, с которыми мы столкнемся.

Предположим, у нас есть две одинаковые наклонные плоскости, как показано на рис. П1, и два цилиндра (из одного материала) с одинаковыми радиусами и массами. Один представляет собой полую цилиндрическую тонкостенную оболочку (а), а другой – сплошной (б). Мы можем удовлетворить требования, сделав монолитный цилиндр короче, чем полый. Теперь, если мы выпустим оба цилиндра в одно и то же мгновение, то есть каждый начнет катиться по своей плоскости под действием силы тяжести, какой из них первым доберется до нижней точки? Что говорит вам ваша интуиция? Физика этого вопроса такая же, как физика океанических приливов. Мы позже *аналитически* решим данный пример в книге, и вы сможете увидеть, была ли ваша интуитивная догадка верной. Аналитический подход скажет нам не только то, какой из них выигрывает, но также и *насколько* победитель обгонит проигравшего.

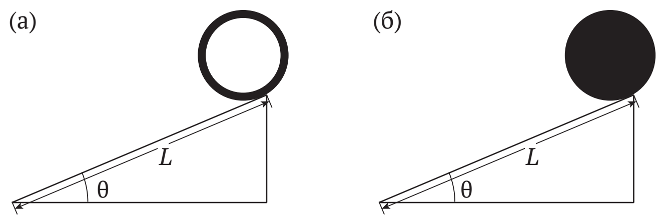

Рис. П1. Два цилиндра в начале соревнования

Предположим, у нас есть два жестких прямых стержня одинаковой длины L. Эти стержни шарнирно соединены в точке b, а нижний стержень шарнирно прикреплен к земле в точке a, как показано на рис. П2. В точках b и c две точечные массы m, а массы самих двух стержней незначительны по сравнению с m (поэтому мы будем рассматривать стержни как безмассовые). В начальный момент структура стоит прямо, затем слегка отклоняется от равновесия и начинает падать (рис. П2). Она продолжает оставаться прямой при падении или *изгибается* в соответствие с одним из двух вариантов, показанных на рис. П3? А конкретнее, *если* происходит изгиб, то происходит ли это так, как показано в (a) или в (b)? Что говорит вам ваша интуиция? Этот вопрос представляет собой простую модель поведения высокой тонкой трубы при ее падении (вспомните все телевизионные новостные видеоролики, которые вы видели о старых зданиях, разрушаемых взрывчаткой). Мы ответим на этот вопрос аналитически одновременно с изучением первого примера.

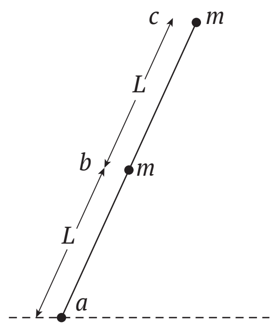

Рис. П2. Падающая труба

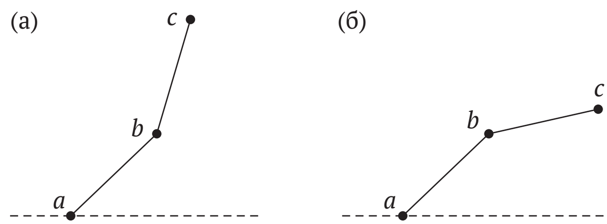

Рис. П3. Как изогнется труба?

На рис. П4 показаны два бобслея, A и B, которые собираются мчаться по двум (разным) трассам без трения. Каждый изначально имеет чисто горизонтальную скорость v_0. Путь A всегда горизонтален, в то время как путь B напоминает путь американских горок, но никогда не поднимается выше пути A. Кто победит в гонке? (Решение в конце главы 1.)

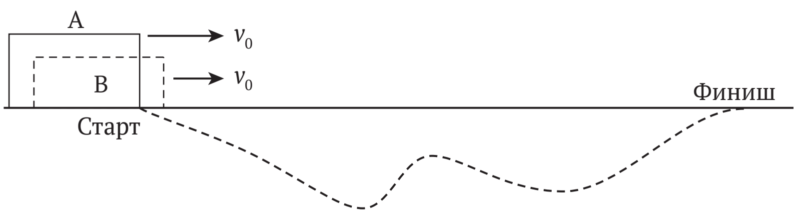

Рис. П4. Который бобслей выиграет гонку?

Водитель автомобиля, едущего по дороге с уклоном 8 % (дорога поднимается на 8 метров на каждые 100 метров горизонтальной длины), видит пешехода на приближающемся пешеходном переходе и нажимает на тормоза. Колеса блокируются, и на дороге остаются следы торможения длиной 32 метра. Обозначенное ограничение скорости составляет 40 км/ч. Нарушил ли водитель правила дорожного движения? Если бы вместо уклона 8 % вверх, был такой же по величине кулон вниз, как бы изменился ваш ответ? (Ответы на эти вопросы – см. главу 4 – могут иметь серьезные юридические последствия в случае, если водитель собьет пешехода.)

Теперь, дав вам эти примеры грядущих событий, я наконец даю ход естественному вопросу: *как* именно я выбрал то, что включить в эту книгу? В конце концов, повседневный мир изобилует увлекательной физикой, и нам понадобится книга гораздо больше, чем эта, чтобы рассмотреть хотя бы небольшую часть всего этого (и подъемный кран, чтобы поднимать ее). Так что, откровенно говоря, то, что на следующих страницах в значительной степени произвольно, является компромиссом между тем, что лично мне кажется интересным, и моей целью достижения какого-то репрезентативного баланса в «простой физике».

Некоторых может удивить отсутствие некоторых тем: нет ничего, например, ни об эффекте Доплера, ни о системах с переменной массой, темы, которые я исходно очень хотел включить в книгу. Это важные темы, можете быть уверенны; однако это не физическая энциклопедия, а сборник задач «простой физики». Я исключил Доплера просто из-за соображений экономии места и исключил ракеты, теряющие массу в реактивной струе, капли дождя, набирающие массу при падении через туман, и другие системы с переменной массой, потому что пришел к выводу, что их «простая физика» будет более сложной, чем я хотел бы использовать. Тем не менее я включил главу о системе скоростного транспорта, использующей геодезическую вакуумированную трубу, хотя там используется довольно сложная математика, потому что я решил, что это *слишком* интересно, чтобы пройти мимо.

Мне действительно очень жаль поднимать вопрос систем переменной массы, потому что планировал включить в эту дискуссию следующую забавную историю о великом шотландском физике Джеймсе Клерке Максвелле (1831–1879). В письме своему другу, которое он отправил из Кавендишской лаборатории в Кембридже, Англия, 15 февраля 1878 г., Максвелл написал (в ответ на вопрос своего друга): «Я не знаю, как применять законы движения к телам переменной массы, поскольку для таких тел поставлено не больше экспериментов, чем для тел с отрицательной массой. Все такие работы должны помечаться “В Кембридж, штат Массачусетс” и направляться в США». («…All such questions should be labeled ‘Cambridge, Mass.’ and sent to U.S.» – на самом деле Максвелл пишет, что надо ставить пометку «Кембридж, Масса», и направлять ему – US.)

Этот, казалось бы, странный отрывок имеет смысл, когда вы понимаете, что Максвелл был известен (помимо своей физики) острым чувством юмора. Ну что же, теперь я *включил* эту историю, и поэтому все хорошо.

Одна из основных целей, которые я преследовал при написании этой книги, состояла в том, чтобы опровергнуть широко распространенное, но совершенно ошибочное убеждение: «математика – это просто набор теорем, доказательств и скучных таблиц умножения» (перефразируя одно очень ошибочное утверждение, которое я однажды подслушал), и поэтому она не может привести к новым знаниям, а только к тавтологиям: *тавтология* – это просто причудливый способ сказать «идти по кругу». Например, если после долгого и кропотливого анализа все ваши уравнения сокращаются к виду $1 = 1$, ну, это, конечно, верно, но не ново и даже не интересно! Я думаю, вы обнаружите, что ни одна из глав в этой книге *не* является тавтологией[14].

Первая глава специально предназначена для быстрой проверки того, есть ли у вас знания математики, необходимые для этой книги (также там много фоновой физики), и вам следует прочитать эту главу, чтобы проверить, как у вас с этим обстоят дела. Но следующий абзац – простой, быстрый тест ваших математических знаний.

Какова будет ваша реакция если вы видите на плакате болельщиков на спортивном мероприятии в средней школе: «Мы – номер $\frac{1}{2}\log_{10}100$!!!». Если вы задумались, это тоже неплохо… но если вы *засмеялись*, то вы, вероятно, *уже* готовы к продолжению чтения данной книги[15].

Примечания

1. Марк Земански (1900–1981) – американский профессор физики в Городском колледже Нью-Йорка. Он являлся соавтором первой «Университетской физики» – фантастически успешной книги, впервые опубликованной в 1949 году и сейчас существующей в 13-й редакции, о которой бесчисленные первокурсники колледжа с 1950-х годов до наших дней думают с любовью (или, в некоторых случаях, со страхом).

2. Физик-математик сэр Джордж Дарвин (1845–1912) был сыном Чарлза Дарвина, известного теорией эволюции, и профессором астрономии в Кембриджском университете.

3. Если вы хотите прочесть обучающую книгу о прискорбном увлечении Голливуда «невозможной» наукой, советую обратить внимание на книгу Тома Роджерса «Оскорбительно глупая физика кино: лучшие ошибки Голливуда, глупости и разрушение законов Вселенной» (Tom Rogers, *Insultingly Stupid Movie Physics: Hollywood's Best Mistakes, Goofs, and Flat-Out Destructions of the Basic Laws of the Universe*, Sourcebooks Hysteria, 2007). Вот пример того, о чем я говорю и чего нет в книге Роджерса. В фильме «Звездные войны» планета Альдераан мгновенно уничтожается злыми приспешниками Дарта Вейдера, с использованием лучевого оружия, выстрелившего из звезды Смерти. Если мы предположим, что Альдераан является двойником Земли (того же радиуса и массы), то для этого требуется энергия, выделяемая при детонации 5×10^{22} т тротила. Это *очень* много тротила! Единственное, что могло усугубить эту ситуацию, – это сказать, что оружие питается от батареи размера D. (я надеюсь, что чтение данной заметки не даст будущим режиссерам новых идей). Чтобы узнать, как рассчитать энергию, необходимую для уничтожения планеты, см. мою книгу «Электрическое одеяло миссис Перкинс» (*Mrs. Perkins's Electric Quilt*, Princeton University Press, 2009, pp. 150–152.

4. См., например: I. Bernard Cohen, *Science and the Founding Fathers: Science in the Political Thought of Jefferson, Franklin, Adams, and Madison*, W. W. Norton, 1996. Более короткое чтение – статья А. Б. Аронса «Ньютон и американская политическая традиция» (A. B. Arons, «Newton and the American Political Tradition», *American Journal of Physics*, March 1975, pp. 209–213).

5. Mary M. Crone and Marc Sher, «The Environmental Impact of Vacuum Decay», *American Journal of Physics*, January 1991, pp. 25–32.

6. Простая физика и биология пересекаются. Классическим примером является связь между метаболизмом и размером для определения того, на-

сколько большими (и маленькими) могут быть живые существа. Представьте, что для каждого живого существа есть характерная длина L, которая «означает его размер». Тогда масса существа изменяется как L^3, а площадь его поверхности изменяется как L^2. Внутреннее метаболическое тепло, генерируемое существом, изменяется как масса (как L^3), в то время как способность рассеивать это тепло изменяется как площадь поверхности (как L^2). Теперь $\lim_{L\to\infty} \dfrac{L^3}{L^2} = \infty$ и $\lim_{L\to\infty} \dfrac{L^3}{L^2} = 0$. Это означает, что существа, которые становятся «слишком большими», будут перегреваться (когда вы видите лошадь весом 400 килограммов, стоящую на пастбище в -1 °C, – это, вероятно, не причиняет ей особых неудобств), в то время как существа, которые становятся «слишком маленькими», замерзнут. (Этот последний пункт является фундаментальным недостатком фильма 1957 года «Невероятный уменьшающийся человек», фильма, который Том Роджерс (примечание 3) пропускает в своей превосходной книге.)

7. Во время войны, конечно, было множество суперсекретных проектов, в том числе бомбовый прицел Нордена (который, как говорят, мог «положить бомбу в бочку с высоты 7 километров»), радар и противодействие ему, радиовзрыватель артиллерийского снаряда и взлом немецких кодов «Энигмы». Однако я считаю, что «Бомба» в конечном итоге был проект номер один.

8. «Дедлайн» Клива Картмилла (1908–1964), опубликованный в журнале «Поразительная научная фантастика» (*Astounding Science Fiction*) в марте 1944 г.

9. О том, что произошло потом, вы можете прочитать в эссе («Давайте назовем это хобби») Мюррея Ленстера (псевдоним Уильяма Ф. Дженкинса (1896–1975)), в сборнике научно-фантастических рассказов, которые он редактировал (*Great Stories of Science Fiction*, Random House, 1951).

10. См. Филипп Болл «Служение рейху: борьба за душу физики при Гитлере» (Philip Ball, *Serving the Reich: The Struggle for the Soul of Physics under Hitler*, University of Chicago Press, 2014); Джереми Бернштейн «Урановый клуб Гитлера: Секретные записи в Фарм-Холле» (Jeremy Bernstein, *Hitler's Uranium Club: The Secret Recordings at Farm Hall*, American Institute of Physics, 1996); «Операция “Эпсилон”: стенограммы фермерского зала» (*Operation Epsilon: The Farm Hall Transcripts*, University of California Press, 1993).

11. Полное расщепление 1 кг U-235 высвобождает энергию в 20 000 т тротила. (См. последний пример в постскриптуме, чтобы узнать больше о проекте «Бомба».)

12. О физике атомной бомбы («On the Physics of the Atomic Bomb», *American Journal of Physics*, November–December 1947, p. 513). Расчеты Лу очень похожи на то, что было сделано американскими учеными несколькими годами ранее, см.: Robert Serber, *The Los Alamos Primer: The First Lectures on How to Build an Atomic Bomb*, University of California Press, 1992, pp. 25–28. У людей в Лос-Аламосе было черное чувство юмора по поводу их работы: Сербер упоминает, что одна из спроектированных бомб была настолько огромной, что если ее взорвать, она убила бы всех на Земле и поэтому не должна была быть «доставляемой». У нее было кодовое название «Помойка», потому что главное – не где она взорвется, а куда ее можно выбросить!

13. В своей книге 1940 года «Апология математики». Харди (1877–1947) был одним из величайших математиков первой половины XX века, и его утверждение является примером способности даже по-настоящему умных людей говорить то, о чем они потом могут пожалеть.

14. Тавтологии не ограничиваются математикой. Мой любимый пример – это то, что аспирант-физик (временно дезориентированный из-за своего предварительного устного экзамена на докторскую степень) мог легко выпалить, когда оправлялся от сурового испытания: «Никогда еще в истории вещи не были такими, какие они сегодня, чем сейчас».

15. Вот более серьезный, *практический* вопрос по математике и физике, над которым вы должны подумать. Если вы совершаете перелет в оба конца из *A* в *B*, а затем обратно в *A*, увеличивает ли постоянный ветер, дующий из A в B время полета; или оно не изменяется, по сравнению с тем, что ветра нет совсем? *Не гадайте* – сделайте математический анализ (это просто алгебра средней школы). Вы можете найти ответ в конце главы 1.

1. Математическая разминка

Подумай сам, жизнь без арифметики
была бы похожа на комнату ужасов.
– *Сидней Смит*[1] *(в письме от 22 июля 1835 г.)*

В этой вступительной главе я рассмотрю несколько математических примеров, похожих на те задачи, которые встретятся нам в «простой физике» и которые могут встретиться (или, во всяком случае, не исключены) в «обычной жизни». Я думаю, любой сможет понять цель этих задач, но требуется написать хотя бы немного формул, чтобы понять их решение. Математические примеры очень отличаются друг от друга, и их единственной «объединяющей» (если я могу использовать это слово) особенностью является нарастающая сложность. Главный вопрос, который вы должны задать себе, когда будете читать каждый пример: могу ли уследить за ходом рассуждений? Если вы можете сказать «да», даже если не можете изначально провести подробный расчет самостоятельно, то вашего понимания математики достаточно для этой книги.

Пример № 1

Наш первый пример на развитие аналитического мышления требует не формальной математики, а скорее логики и немного повседневных знаний (подсказка: зажженные лампочки нагреваются). Подумайте об этом, когда будете работать над остальными примерами, и, как и в случае с проблемой ветра и самолета в конце предисловия, я дам вам ответ в конце главы.

Представьте, что вы находитесь в многоэтажном доме с тремя электрическими выключателями в подвале и 100-ваттной лампочкой на чердаке. Каждый из трех выключателей имеет два положения, помеченные ВКЛ и ВЫКЛ, но только один из переключателей управляет нужной вам лампочкой. Вы не знаете, какой именно. Все три переключателя исходно выключены. Один из способов определения управляющего переключателя заключается в следующем: включите любой из выключателей, а затем поднимитесь на чердак, чтобы увидеть, горит ли лампа. Если это так, задача решена. Если это не так, вернитесь в подвал, включите любой другой выключатель, а затем вернитесь на чердак, чтобы снова посмотреть, горит ли лампа. Если это так, то переключатель, который вы только что включили, управляет лампочкой. Если лампа не горит, то лампой управляет выключатель, который никогда до сих пор не включали. Таким образом, вы можете выяснить, какой переключатель управляет лампочкой, не более чем за два похода на чердак.

Существует, однако, еще одна процедура, которая гарантирует, что вы сможете определить нужный вам выключатель всего за один подъем на чердак. Как это сделать?

Пример № 2

Эта задачка также не требует реальной математики, но, опять же, для своего решения потребует логических рассуждений (и хотя бы элементарного понимания, что такое кинетическая и потенциальная энергии). Предположим, вы стреляете из пистолета, посылая пулю вертикально вверх в воздух. Решите, будет ли время полета пули вверх больше или меньше времени падения ее на Землю, если учесть сопротивление воздуха? Вы можете подумать, что вам нужно знать детали закона сопротивления воздуха, но это не так. Все, что вам нужно знать, – это то, что сопротивление воздуха существует[2]. Вы можете исходить из того, что гравитационное поле Земли постоянно на всем пути движения пули вверх-вниз (оно остается неизменным, независимо от высоты полета пули). Как и в примере № 1, попробуйте подумать об этой задаче, пока будете работать с остальными примерами, и я дам вам ответ в конце главы. Подсказка: потенциальная энергия – это энергия, зависящая от высоты тела (принимая поверхность Земли за нулевой опорный уровень, тело массой m на высоте h имеет потенциальную энергию mgh, где g – ускорение силы тяжести, примерно 10 м/с^2), а кинетическая энергия зависит от скорости движения (масса m, движущаяся со скоростью v, имеет кинетическую энергию $mv^2/2$).

Пример № 3

Этот вопрос требует некоторых математических расчетов, но в действительности это простейшая арифметика, а именно: много умножения и деления действительно больших чисел. Итак, собственно задача: в научно-фантастическом рассказе 1956 года «Экспедиция» Фредерика Брауна (1906–1972) завязкой сюжета становится следующая ситуация. На первом космическом корабле, отправляющемся колонизировать Марс, есть 30 свободных мест, причем места должны быть заполнены путем случайного выбора 30 человек из 500 мужчин и 100 женщин. Какова вероятность того, что в результате отбора будет выбран один мужчина и 29 женщин (именно это случилось в рассказе)?

Представим себе 30 посадочных мест, выстроенных в ряд, слева направо, а затем вычислим общее количество различных способов заполнения 30 мест выбором из 600 человек, без учета пола (мы предполагаем, что каждый человек однозначно идентифицируется). Это число, обозначим его N_1, численно равно[3]

$$N_1 = (600)(599)(598)\ldots(571) = \frac{600!}{570!}.$$

Далее, обозначим как N_2 число всех возможных различных способов заполнения 30 мест набором из 29 женщин и одного мужчины, тогда искомая вероятность будет равна $P = N_2/N_1$. Чтобы определить N_2, прибегнем к следующему рассуждению:

всего есть 30 способов усадить одного мужчину на 30 мест

и

всего есть 500 способов выбрать одного мужчину из 500, чтобы посадить на это место.

Тогда

$$N_2 = (30)(500)(100)(99)(98)\ldots(72) = 15\,000\frac{100!}{71!}.$$

Таким образом, *формальным* решением задачи станет следующее выражение:

$$P = \frac{N_2}{N_1} = \frac{15\,000\dfrac{100!}{71!}}{\dfrac{600!}{570!}} = 15\,000\frac{(100!)(570!)}{(71!)(600!)}.$$

Я использовал слово *формальное* только потому, что мы еще не получили значение вероятности P в виде конечного числа.

Дело в том, что факториалы в этом выражении – это огромные числа, числа, которые слишком велики для непосредственного вычисления на ручном калькуляторе (мой калькулятор терпит неудачу уже при попытке вычислить факториал 70). Поэтому, чтобы справиться с этой проблемой, я буду использовать асимптотическое приближение Стирлинга[4] для $n!$: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$. Далее:

$$\begin{aligned}
P &= 15\,000\frac{\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{100}e^{-100}100^{100}\right)\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{570}e^{-570}570^{570}\right)}{\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{71}e^{-71}71^{71}\right)\left(\sqrt{2\pi}\sqrt{600}e^{-600}600^{600}\right)} \\
&= \left\{15\,000e^{-(100+570-71-600)}\sqrt{\frac{(100)(570)}{(71)(600)}}\right\}\left\{\frac{100^{100}570^{570}}{71^{71}600^{600}}\right\} \\
&= \left\{15\,000e\sqrt{\frac{(100)(570)}{(71)(600)}}\right\}\left(\frac{100}{71}\right)^{71}100^{29}\left(\frac{570}{600}\right)^{570}\frac{1}{600^{30}} \\
&= \left\{15\,000e\sqrt{\frac{(100)(570)}{(71)(600)}}\right\}\left\{\left(\frac{100}{71}\right)^{71}\left(\frac{570}{600}\right)^{570}\left(\frac{100}{600}\right)^{29}\frac{1}{600}\right\}.
\end{aligned}$$

Каждый из множителей в фигурных скобках вполне может быть вычислен на карманном калькуляторе, и в результате получим:

$$P = 1{,}55 \times 10^{-23}.$$

Итак, сюжетная завязка в истории Брауна очень маловероятна. Но это не имеет значения, потому что хотя это и настолько маловероятно, что фактически означает «этого не может быть», все же чисто формально это не невозможно, и, кроме того, это довольно забавная история и стоит добровольного приостановления недоверия[5].

Пример № 4

Квадратные уравнения постоянно встречаются в математической физике (вы увидите пример этого в главе 9), а вот вам пример появления такого уравнения в решении задачи, которую многие вспомнят из курса средней школы. Читатели могут утешиться, узнав, что эта задача была неверно решена Мэрилин вос Савант в ее колонке в журнале Parade от 22 июня 2014 года (но, к ее чести, она быстро признала свой промах в колонке от 13 июля, после того как некоторые бдительные читатели обратили на это внимание).

Итак, Брэд и Анджелина, работая вместе, выполняют задание за 6 часов. Работая в одиночку, Брэд потратил бы на это задание на 4 часа больше времени, чем Анджелина, работающая самостоятельно. Сколько времени потребуется каждому на выполнение задачи?

Если мы обозначим время выполнения задания Анджелиной как x, то время Брэда будет $x + 4$. Таким образом, скорость решения задачи Анджелиной составляет $\frac{1}{x}$ в час, а скорость Брэда – $\frac{1}{x+4}$. За шесть часов Анджелина выполняет долю задания, равную $\frac{6}{x}$, а Брэд выполняет долю задания, равную $\frac{6}{x+4}$. В сумме эти две доли являются выполненным заданием (то есть их сумма равна 1), и таким образом получаем: $\frac{6}{x} + \frac{6}{x+4} = 1$. Приводя к общему знаменателю, в числителе получаем:

$$6(x + 4) + 6x = x(x + 4),$$

или

$$12x + 24 = x^2 + 4x,$$

и окончательно

$$x^2 - 8x - 24 = 0.$$

Известная формула для корней квадратного уравнения позволяет получить ответ:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 96}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{160}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{10}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{10}.$$

Поскольку значение x должно быть больше нуля, мы используем только знак $+$ (использование знака минус дает $x < 0$), и поэтому $x = 4 + 2\sqrt{10} = 10{,}32$. Таким образом, Анджелина может решить задачу самостоятельно за 10 часов 32 минуты, а Брэд может решить задачу самостоятельно за 14 часов 32 минуты.

Основное предположение в этом расчете заключается в том, что при совместной работе Брэд и Анджелина работают независимо и не мешают друг другу. Однако такое не обязательно возможно, в зависимости от характера задачи. Например, предположим, что «задание» представляет собой доставку грузов на машине. Если Брэд может один проехать на грузовике из А в Б за один час и если Анджелина может проехать на том же грузовике из А в Б самостоятельно за один час, сколько времени потребуется им двоим, чтобы проехать на том же грузовике из А в Б? Это все равно тот же самый час! Еще более возмутительным злоупотреблением логикой было бы утверждение, что если один солдат может выкопать окоп за 30 минут, то 1800 солдат могут выкопать окоп за одну секунду!

Пример № 5

Неидеализированная батарея (то есть ее внутреннее сопротивление $r > 0$ Ом), с напряжением холостого хода между ее клеммами V (т. е. когда батарея не отдает тока), подключается к резистору сопротивлением R Ом, как показано на рис. 1.1. Чему должно быть равно R, чтобы на нем рассеивалась максимальная мощность? Эта проблема обычно решается в учебниках с использованием дифференциального исчисления, но я сейчас покажу, что это математическое излишество, и все, что нам потребуется, – это немного простой алгебры.

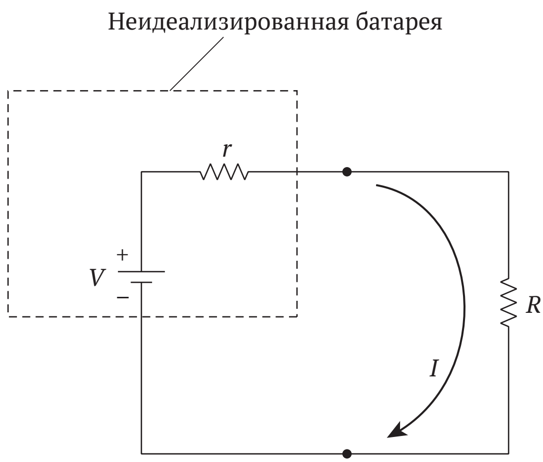

Рис. 1.1. При каком значении R выделяется наибольшая мощность?

Ток I, протекающий в цепи, равен (по закону Ома, если есть сомнения, см. примечание 1 в главе 8)

$$I = \frac{V}{r + R}.$$

Мощность P, рассеиваемая на резисторе R, равна (здесь E обозначено падение напряжения на резисторе R):

$$P = EI = (IR)I = I^2R,$$

и, следовательно:

$$P = V^2 \frac{R}{(R + r)^2}.$$

Очевидно, что $P = 0$, когда $R = 0$, и $P = 0$, когда $R = \infty$. Таким образом, существует некоторое значение R между нулем и бесконечностью, при котором P достигает своего наибольшего значения[i]. Это значение можно легко найти с помощью дифференциального исчисления (вычислить производную P по R и приравнять результат к нулю), но я покажу вам, что на самом деле нужна только алгебра. Вот как это делается:

$$\begin{aligned} P &= V^2 \frac{R}{R^2 + 2Rr + r^2} = V^2 \frac{R}{r^2 - 2Rr + R^2 + 4Rr} \\ &= V^2 \frac{R}{(r - R)^2 + 4Rr} = V^2 \frac{R}{\dfrac{(r - R)^2}{R} + 4r}. \end{aligned}$$

Мы явно максимизируем P, минимизируя знаменатель самой правой части этого уравнения, что, очевидно, произойдет в том случае, если $R = r$ (потому что это делает первый член знаменателя – который никогда не отрицателен – наименьшим, то есть равным нулю). Таким образом, оптимальная величина $R = r$, а максимальная мощность, рассеиваемая на R, будет равна $\dfrac{V^2}{4R}$.

Пример № 6

В этом примере вы увидите, как простая геометрия в сочетании с физикой позволяет измерить расстояние от Земли до Луны с фантастической точностью. Единственный физический закон, который нам понадобится, – это закон отражения, гласящий, что луч света, падающий на зеркало, отражается от этого зеркала под углом, равным углу падения, как показано на рис. 1.2. Этот закон впервые был описан Евклидом в III в. до н. э.; однако не получил объяснения до тех пор, пока несколько сотен лет спустя, в I в. н. э., Герон Александрийский не заметил, что закон отражения является следствием предположения о том, что путь луча ARB является *путем минимальной длины* для луча (в своей книге о зеркалах *Catoptrica*). То есть если бы точка R на зеркале была такой, что

---

[i] Интуитивно это понятно, но вообще говоря, это надо доказывать, и в математическом анализе данное утверждение носит название теорема Ролля. – *Прим. перев.*

$\theta_i \neq \theta_r$, то результирующая общая длина пути оказалась бы больше. Наблюдение Герона было первым использованием принципа *минимума действия* в математической физике; этот принцип играет центральную роль в современной теоретической физике.

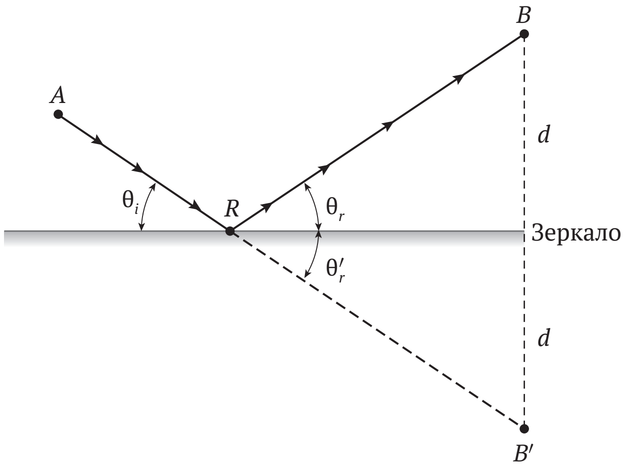

Рис. 1.2. Иллюстрация к доказательству закона отражения Героном

Вот простое геометрическое доказательство закона зеркального отражения, найденное Героном. Если B, точка прихода отраженного луча, находится на высоте d над зеркалом, то B' – изображающая точка для B, находится на глубине d «ниже» плоскости зеркала. Таким образом, RB и RB' – это гипотенузы двух конгруэнтных прямоугольных треугольников, и имеют равную длину, что означает, что $\theta'_r = \theta_r$ (снова обратимся к рис. 1.2). Тогда общая длина хода луча равна $AR + RB = AR + RB'$, и в то же время эта последняя сумма является длиной хода луча от A до B'. Самый короткий путь от A до B' (и, следовательно, наикратчайший путь для отраженного луча) проходит по прямой линии, и поэтому $\theta'_r = \theta_i$, откуда очевидно следует, что $\theta_r = \theta_i$. Вот так вот!

Закон отражения, среди прочего, находит применение в оптическом устройстве, называемом уголковым отражателем (см. рис. 1.3). Это простейшее устройство позволило астронавтам «Аполлона-11» в 1969 году принять участие в измерении расстояния от Земли до Луны с точностью до 2,5 м! Путь входящего луча света к зеркалу 1 может быть описан радиус-вектором (r_x, r_y), соответственно, отраженный от этого зеркала луч описывается вектором $(r_x, -r_y)$[6]. То есть одна из составляющих радиус-вектора пути меняет знак, а другая нет; зеркало 1, расположенное вдоль оси x, обращает y-компоненту. Отраженный луч движется дальше к зеркалу 2 вдоль оси y, и на этом зеркале меняет знак x-компонента радиус-вектора пути, то есть для радиус-вектора, отраженного от зеркала 2, имеем $(-r_x, -r_y) = -(r_x, r_y)$, что является полным обращением радиус-вектора исходного входящего луча. Обратите внимание: это означает, что отраженный луч от зеркала 2 строго параллелен лучу, падающему на зеркало 1, луч только смещается вбок и меняет на противоположное направление распространения, и это не зависит от величины угла α.

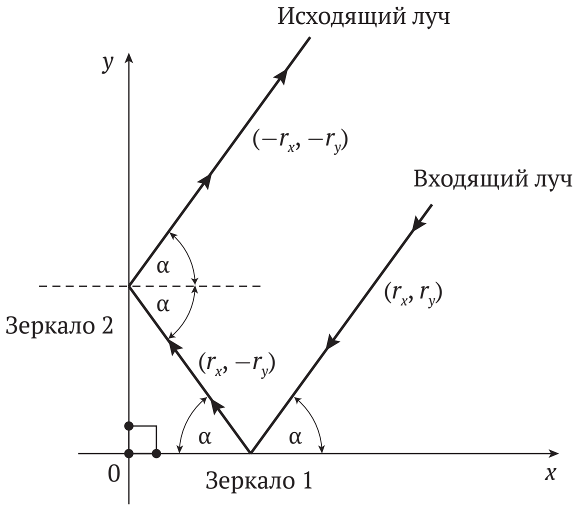

Рис. 1.3. Уголковый отражатель на плоскости

Можно ли сделать то же самое в трех измерениях? Ответ – да, и это легко понять, как только мы дадим следующую интерпретацию тому, что делает отражающее зеркало: зеркало меняет знак той компоненты радиус-вектора падающего луча, которая перпендикулярна к зеркалу, и оставляет другой компонент или компоненты неизменным(и). (Оглянитесь на двумерный случай, и вы увидите, что там произошло.) Итак, в случае трехмерного углового отражателя (представьте себе внутренний угол куба, состоящий из трех взаимно перпендикулярных зеркал, причем угол этого куба находится в начале координат x, y, z), предположим, что зеркала 1, 2 и 3 лежат в координатных плоскостях XY, XZ и YZ соответственно. Затем луч, отраженный от зеркала 1, имеет противоположную по знаку z-компоненту, луч, отраженный от зеркала 2, имеет противоположную по знаку y-компоненту, а луч, отраженный от зеркала 3, имеет противоположную по знаку x-компоненту.

После того как падающий луч отразится три раза, он выходит из кубического уголкового отражателя строго в противоположном направлении. Частные случаи, когда входящий луч попадает только в одно (или два) из зеркал, связаны с тем, что луч поступает параллельно одному (или двум) зеркалу, и поэтому одна (или две) компонента радиус-вектора луча оказывается равной нулю (и, конечно же, обращение нуля есть ноль). Астронавты «Аполлона-11» разместили на поверхности Луны несколько уголковых отражателей, которые затем стали мишенями для очень коротких (пикосекундных)[7] лазерных импульсов с Земли. Уголковый отражатель посылал отраженные импульсы почти точно туда, откуда они передавались, и время, затраченное на путь Земля–Луна–Земля, позволяло определить расстояние между ними. Такие измерения показали, что Луна очень медленно удаляется от Земли (всего на четыре сантиметра в год), и в главе 10 вы узнаете, почему.

Пример № 7

Вот простой тригонометрический пример из средней школы, используемый в крайне интересной физической задаче. В книге Роберта Сербера о проекте американской атомной бомбы (см. примечание 12 в предисловии) упоминается о возникновении уравнения

$$x\cos x = (1 - a)\sin x$$

в одной из теоретических задач, изучавшейся учеными в Лос-Аламосе. Здесь a – некая константа, и для любого конкретного значения a нужно найти положительные решения (решения для $x \leq 0$ не имели физического смысла и были неинтересны разработчикам бомбы).

Наглядный способ решения этой задачи состоит в том, чтобы построить на координатной плоскости левую и правую стороны уравнения и посмотреть, в каких точках пересекаются два графика. На рис. 1.4 это сделано для случая $a = 0{,}5$, и мы видим, что первое приближенное положительное решение находится при $x \approx 1{,}2$, а следующее – при $x \approx 4{,}6$. Конечно, существует бесконечное количество положительных значений x, в которых пересекаются графики, за пределами $x = 6$ на рис. 1.4. Я использовал компьютер, чтобы легко нарисовать эти графики, но вы можете себе представить, что лаборант со средним школьным образованием и набором математических таблиц мог бы легко рисовать такие графики вручную. Конечно, это была бы нудная и трудоемкая работа, и через некоторое время обработка большого количества различных значений для различных параметров a перестала бы быть увлекательным делом, но у ученых в Лос-Аламосе было много лаборантов, чтобы делать для них такие вещи в течение всего дня.

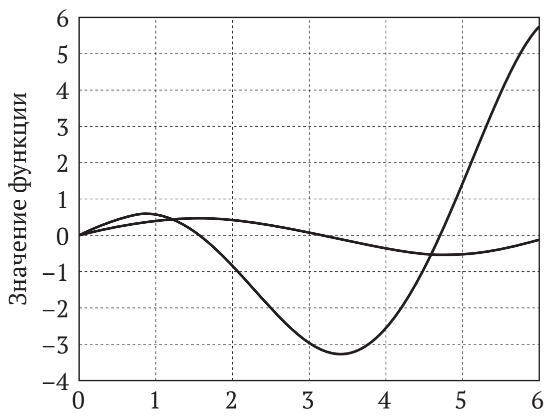

Рис. 1.4. Графическое решение уравнения $x\cos x = 1/2\sin x$

Пример № 8

Если бы пи не было круглым, не было бы и круглых пирогов!

– Автор, в возрасте 10 лет,
получает свое первое «научное» откровение

Все «знают», что число пи немного больше 3 (довольно близко к 22/7, как заметил Архимед более 2000 лет назад) и, чуть более точно, составляет 3,14159265... Но *как* мы можем вычислить значение числа пи? Это отношение длины окружности к диаметру, все правильно, но как это поможет вам понять, что мы знаем число пи с точностью до сотен миллионов, и даже *триллионов*, десятичных знаков[8]? Мы никак не можем *измерить* длину окружности с такой точностью. Но тогда как же мы *вычисляем* значение π? Это число встречается в бесчисленных формулах, используемых физиками и другими учеными и инженерами, и поэтому это важный вопрос.

Если коротко, для вычислений используется бесконечный сходящийся ряд для приближенного вычисления. Например, мы знаем (после обучения на первом курсе), что:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Но поскольку

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

можно просто подставить это разложение под интеграл и получить следующий результат:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots)dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots\right)\Bigg|_0^1.$$

Откуда получаем:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Таблица 1.1. Вычисление числа пи медленно сходящимся рядом

Длина ряда, членов	Сумма
100	3,1.......
1000	3,14......
10 000	3,141.....
100 000	3,1415....

Этот знаменитый результат[9] теоретически абсолютно верен, но, увы, он почти бесполезен для *вычисления числа пи*, потому что очень *медленно* сходится. Как писал об этом способе вычисления π (в 1737 году) великий швейцарский и российский математик Леонард Эйлер (1707–1783), чтобы получить всего 50 цифр, пришлось бы «трудиться почти вечно» («labor fere in aeternum»). Чтобы проиллюстрировать это утверждение, в табл. 1.1 показаны некоторые частичные суммы для нескольких значений числа членов ряда. Как вы можете видеть, мы должны увеличивать количество членов ряда в 10 раз (!) для определения *каждой* последующей значащей цифры числа пи (точки указывают, где сумма не дает правильных значений соответствующих разрядов). Итак, нам явно нужен ряд, который сходится намного быстрее (то есть использует гораздо меньше членов для получения заданного количества правильных цифр).

Как оказалось, это совсем не трудно сделать, так как все, что требуется, – это *небольшое* изменение того, что мы только что сделали. Запишем:

$$\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^{1/\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6},$$

получаем:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3^3} + \ldots,$$

и отсюда следует:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \ldots\right).$$

Этот ряд уже сходится довольно быстро, и сумма всего лишь 10 членов дает верные пять первых значащих цифр числа пи. Английский астроном Абрахам Шарп (1651–1699) использовал всего лишь 150 членов этого ряда (в 1699 году) для вычисления первых 72 цифр числа пи. Для физиков этого более чем достаточно!

Пример № 9

Однажды днем в начале лета
Лягушка Лили подсчитала,
Что пруд лилейная листва
Лишь на осьмушку покрывала.

Заметив также, что листва
За ночь умножилася вдвое,
Лили, решив, что жизнь долга,
Спокойно жизнь свою там строит.

Прекрасным кваканьем своим она была горда безмерно,
Но в математике времен была слегка тупа, наверное,

Четвертый день зажег свой свет,
И пруд листвой покрыт как кожей,
На нем журавль с грустной рожей,
Лили глотает на обед.

– Грустная и поучительная история про лягушек, прячущих голову в песок от неизбежного

Вот простой пример использования дифференциального исчисления в реальной и актуальной проблеме. Предположим, у нас есть *конечный*, *невозобновляемый* ресурс, который постоянно потребляется с возрастающей скоростью. То есть истощение ресурса растет в геометрической прогрессии. В частности, если количество потребляемого *сегодня* ресурса равно r_0, а величина потребления увеличивается с постоянной скоростью, то для некоторого постоянного приращения потребления k мы имеем закон истощения ресурса:

$$r(t) = r_0 e^{kt}, t \geq 0.$$

Таким ресурсом, к примеру, является нефть. Если мы знаем r_0, k и V (количество остающегося ресурса), то можем вычислить, сколько времени (T) потребуется для полного исчерпания ресурса. Значения r_0 и k нетрудно узнать в случае нефти, но значение V – это в основном игра в угадайку. Сколько же нефти осталось в мире? Десять разных «экспертов» дадут 10 разных ответов.

Для нефти возьмем текущее потребление, равное $r_0 = 6 \times 10^7$ кубометров в сутки и $k = 7$ % в год. Однако независимо от того, какое значение мы выберем для V, всегда найдется кто-то, считающий нас чересчур пессимистичными. Итак, давайте выберем значение, которое никто не смог бы назвать консервативным. Предположим, что вся планета Земля – это не что иное, как нефть. Теперь-то никто не сможет сказать, что есть «неоткрытые резервы»! Таким образом, считая радиус Земли равным $6{,}37 \times 10^6$ м, мы получим ее объем:

$$V = \frac{4}{3}\pi(6{,}37 \times 10^6)^3 \text{ м}^3 = 1{,}083 \times 10^{21} \text{ м}^3.$$

Это чудовищно многие кубометры нефти – но все еще конечное ее количество, – и поэтому мы спрашиваем: сколько пройдет времени, пока вся наша планета превратится в дым из выхлопной трубы последнего автомобиля?

Дифференциал количества нефти, потребляемой за время dt', равен $r(t')dt'$. Таким образом, количество потребляемой нефти за время от $t' = 0$ до $t' = t$ будет равно:

$$\int_0^t r(t')dt' = \int_0^t r_0 e^{kt'}dt' = r_0 \left(\frac{e^{kt'}}{k}\right)\Bigg|_0^t = \frac{r_0}{k}(e^{kt} - 1).$$

При $t = T$ израсходованная сумма, по определению, равна всей нефти, V, с которой мы начали при $t = 0$, и таким образом получим окончательное уравнение:

$$V = \frac{r_0}{k}(e^{kt} - 1),$$

выполняя простейшее преобразование, получим выражение для T:

$$T = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{kV}{r_0} + 1\right).$$

Поскольку $k = 0{,}07$ в год $= 1{,}92 \times 10^{-4}$ в день, получаем:

$$T = \frac{1}{1{,}92 \times 10^{-4}}\ln\left(\frac{1{,}92 \times 10^{-4} \times 1{,}083 \times 10^{21}}{6 \times 10^7} + 1\right) \text{ дней}$$
$$= (5208)\ln(0{,}3466 \times 10^{10}) \text{ дней}$$
$$= (5208)(21{,}966) \text{ дней} = 114\,399 \text{ дней} = 313+ \text{ лет}.$$

Еще три столетия, и вся планета исчезнет. Святые угодники, это может быть неприятно.

Но подождите! Вернувшийся астронавт только что доложил, что нефти стало больше. Луна! Луна тоже вся состоит из нефти! Радостные возгласы владельцев автомобилей, которые думали, что им придется учиться ездить на велосипеде, эхом разносятся по городам всего мира. Мир спасен – или нет? Теперь нам нужно рассчитать, насколько лунная нефть расширяет наши возможности.

Принимая радиус Луны равным $1{,}74 \times 10^6$ м, мы получим объем Луны:

$$\frac{4}{3}\pi(1{,}74 \times 10^6)^3 \text{ м}^3 = 0{,}022 \times 10^{21} \text{ м}^3.$$

Итак, начиная тратить нефть с объемами Земли и Луны вместе взятыми, получаем:

$$V = (1{,}083 \times 10^{21} + 0{,}022 \times 10^{21}) \text{ м}^3 = 1{,}105 \times 10^{21} \text{ м}^3$$

и

$$T = \frac{1}{1{,}92 \times 10^{-4}}\ln\left(\frac{1{,}92 \times 10^{-4} \times 1{,}105 \times 10^{21}}{6 \times 10^7} + 1\right) \text{ дней}$$
$$= (5208)\ln(0{,}3536 \times 10^{10}) \text{ дней}$$
$$= (5208)(21{,}986) \text{ дней} = 114\,503 \text{ дня}.$$

Таким образом, если мы сжигаем в топках не только всю Землю, но и всю Луну, то получаем дополнительные 104 дня. И вот тогда «заправка закроется» уже по-настоящему.

Маленькая математическая история, которую я вам только что рассказал, напоминает мне забавный анекдот о великом американском изобретателе Томасе Эдисоне. Практичный человек с небольшим формальным образованием, Эдисон тем не менее понимал ценность фундаментальных знаний, но также никогда не упускал случая показать, как умный человек может, используя смекалку, решать сложные проблемы. Однажды, нанимая молодого математика, Эдисон поручил ему задачу определения объема новой лампочки с колбой сложной формы. Математик тщательно описал форму лампочки сложным уравнением, а потом с трудом, в течение нескольких часов, интегрировал уравнение по трем измерениям, чтобы получить объем газа, заключенный в лампочке. Затем он с гордостью показал результат Эдисону.

Эдисон поздравил этого человека с тем, что он прекрасный математик, поскольку вычисленный ответ вполне соответствовал его собственному результату, к которому он пришел менее чем за 30 секунд. Когда изумленный математик спросил, как Эдисон это сделал, изобретатель (не говоря ни слова) просто наполнил колбу водой, а затем вылил воду из колбы в мерный стакан.

Эдисон высказал свою точку зрения: математика – это классная вещь, но используйте ее как инструмент, а не как костыль.

Решение примера № 1

Включите любой из выключателей, оставьте его включенным на минуту или около того, а затем выключите его. Затем сразу же включите один из двух других выключателей и поднимитесь на чердак. Если лампочка горит, то выключатель, который вы включали последним, управляет лампой. Если лампочка не горит, пощупайте ее. Если она горячая, то лампочкой управляет выключатель, который вы включили, а затем выключили. Если лампа холодная, то лампой управляет третий переключатель (тот, который вы не трогали).

Эта проблема и анекдот с лампочкой Эдисона напоминают мне глупую «техническую шутку», которую математики любят рассказывать: сколько математиков нужно, чтобы поменять лампочку? Ответ – один. Это потому, что он просто передает решение проблемы группе физиков, для которых (и здесь математики начинают ржать как кони) уже известно, что ответ больше, чем один. Главная польза от этой возмутительной клеветы на физиков состоит в том, что она иллюстрирует мощнейшее ноу-хау сведения неразрешенной проблемы к той, решение которой уже известно.

Решение примера № 2

На своем восходящем пути пуля увеличивает свою потенциальную энергию и уменьшает кинетическую, а также необратимо теряет часть своей полной энергии на трение и разогрев из-за сопротивления воздуха. Таким образом, когда пуля достигнет своей максимальной высоты, она начнет свое падение, имея потенциальную энергию меньше, чем у нее было кинетической энергии в момент выстрела. У падающей пули на любой высоте потенциальная энергия равна тому же значению, которое имела пуля на этой высоте при подъеме. Но из-за того, что часть начальной энергии пули была необратимо потрачена на трение, оставшаяся энергия (это ее кинетическая энергия) на этой высоте меньше, чем она была при подъеме. То есть на любой высоте при падении пуля всегда движется медленнее, чем при движении вверх. Таким образом, падение вниз займет больше времени, чем движение вверх.

Решение проблемы бобслея из предисловия

Возвращаясь к рис. П4, мы видим, что боб А имеет горизонтальную составляющую скорости v_0 и равную нулю вертикальную составляющую скорости в любой момент времени. Боб В также имеет начальную горизонтальную составляющую скорости v_0, которая увеличивается всякий раз, когда он движется вниз, потому что он ускоряется. Почему он ускоряется? Масса, покоящаяся на горизонтальной поверхности, давит на эту поверхность с силой, равной своему весу, и эта поверхность действует на тело с равной, но противоположной по направлению силой, называемой реакцией опоры. Если бы сила реакции не была равна весу, тело пришло бы в ускоренное движение и не находилось бы в состоянии покоя. Эти комментарии все еще остаются в силе, когда масса движется, но поскольку боб В движется вверх и вниз по своему криволинейному пути, сила реакции имеет горизонтальную составляющую – вправо при движении вниз (и эта сила придает бобу В ускорение) и влево при движении вверх (когда боб В замедляется). Когда боб В движется вверх, его горизонтальная составляющая скорости, конечно, возвращается к значению v_0, но она никогда не может быть меньше v_0 (вспомните, что трения нет). Таким образом, горизонтальная составляющая скорости В в каждый момент времени, по крайней мере, не меньше, чем у боба А, и поэтому боб В выигрывает гонку. Обратите внимание, что этот вывод будет верным независимо от формы траектории В (в предположении, что траектория В – это то, что математики называют гладкой функцией; то есть у нее нет таких острых углов, что боб В врежется в стену или слетит в сторону), хотя длина этой траектории явно больше, чем для боба А.

Решение проблемы из предисловия в сноске 15

Пусть d – расстояние между А и В, s – скорость самолета в неподвижном воздухе, а w – скорость ветра. Тогда общее время T, необходимое для полета туда и обратно, будет равно сумме времен, потраченных на путешествие по ветру, а затем против него:

$$T = \frac{d}{s+w} + \frac{d}{s-w} = \frac{d(s-w)+d(s+w)}{(s+w)(s-w)} =$$
$$= \frac{2sd}{s^2-w^2} = \frac{2sd}{s^2\left(1-\frac{w^2}{s^2}\right)} = \frac{2d}{s}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{w}{s}\right)^2}\right].$$

Когда нет ветра ($w = 0$), то $T = \frac{2d}{s}$, если же $w > 0$, знаменатель в скобках становится меньше, и мы имеем $T > \frac{2d}{s}$. Таким образом, устойчивый ветер всегда увеличивает общее время в пути.

Вот способ убедиться в этом без привлечения математики, рассмотрев предельный частный случай $w = s$. В этом случае на обратном участке полета самолет, летящий со скоростью s, сталкивается с встречным ветром, имеющим такую же скорость. Таким образом, самолет не движется и поэтому никогда не вернется в пункт А (то есть если $w = s$, то $T = \infty$).

Примечания

1. Сидней Смит (1771–1845), английский священнослужитель, был остроумным комментатором жизни в целом.

2. Все, что нужно предположить, – это физическую обоснованность закона, описывающего силу сопротивления воздуха $F(v)$, где v – скорость пули. Это означает, что выполняются три условия: (1) $F(v) > 0$ для $v > 0$, (2) $F(v) = 0$ для $v = 0$ и (3) $F(v)$ монотонно возрастает с увеличением v.

3. Я написал N_1 в факториальной записи, где если n – положительное целое число, то $n! = (n)\cdot(n - 1)\cdot(n - 2)\ldots(3)\cdot(2)\cdot(1)$. Например, $4! = 24$. Чуть менее очевидно, что если $n! = n(n - 1)!$, то можно сделать парадоксальный вывод о том, что $0! = 1$. Вы видите это? (Подставьте $n = 1$.)

4. Назван в честь шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692–1770), но фактически открыт (в 1733 году) английским математиком французского происхождения Абрахамом де Муавром (1667–1754). Число e является, конечно, одним из самых важных в математике, оно равно 2,7182818... Асимптотическая аппроксимация обладает тем свойством, что в то время как абсолютная погрешность неограниченно растет, относительная погрешность стремится к нулю. Вот почему мы используем символ ~, а не знак равенства. То есть если $E(n)$ – асимптотическое приближение некоторой функции $f(n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|E(n) - f(n)| = \infty$, но $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{E(n) - f(n)}{f(n)}\right| = 0$. Вы, конечно, можете сказать, что для арифметики это чересчур сложно, но в действительности эту формулу можно найти в любом хорошем математическим справочнике.

5. Я не буду специально раскрывать тайну истории Брауна, начавшейся с этого простого этюда из теории вероятности, но если вам интересно, вы можете найти рассказ «Экспедиция» в *Fantasia Mathematica* (Clifton Fadiman, ed.), Simon and Schuster, 1958. Я давно задавался вопросом, была ли история Брауна вдохновлена хитом великого Билла Хейли и его «Комет» от 1954 года – «Тринадцать женщин и один парень в городе» (фантазия об одиноком мужчине, пережившем ядерную войну).

6. Это векторное описание луча можно рассматривать как вектор скорости отдельного фотона в луче.

7. Причиной использования таких коротких импульсов является огромная скорость света. Луч света проходит 1 метр примерно за 3 наносекунды, и поэтому 1 сантиметр его путешествия занимает всего 1/30 наносекунды. Чтобы сделать точные измерения расстояния до Луны, длительность импульса должна быть *меньше* 1/30 наносекунды.

8. Физикам, инженерам и другим ученым редко нужно знать π с лучшей точностью, чем пять или шесть значащих цифр, так зачем *триллионы*? Один

из примеров таких «*для*» приходит от тех математиков, которые задаются вопросом, насколько равномерно распределены различные цифры в числе пи. Грубо говоря, действительно ли каждая из цифр 0, 1, 2 … 8, 9 появляется в 10 % случаев «наугад»? Математикам нужны эти триллионы цифр, чтобы «экспериментально» изучить этот вопрос. (Насколько я знаю, цифры в числе пи распределены *равномерно*.)

9. Полученный французским математиком Готфридом Лейбницем (1646–1716), который и открыл ее в 1674 году. Лейбниц был очень увлечен своей формулой, комментируя ее словами «Господь любит нечетные числа», очевидно, игнорируя этот ведущий четный множитель 4.