Глава 0

От симметрий уравнений с частными производными до вторичного исчисления

> Простак удивляется чудесам, мудрец удивляется общеизвестному.
>
> Конфуций

Поскольку предмет этой книги — довольно новый и, возможно, не слишком стандартный раздел современной чистой математики, читателю будет полезна ознакомительная экскурсия, которая настроит его на нужный лад. Провести такую экскурсию — задача нашей вводной главы, в которой, в весьма упрощённом и идеализированном виде, воспроизводится авторский опыт поиска *естественных* ответов на два тесно связанных очень общих вопроса.

1. Каковы основные структуры теории нелинейных уравнений с частными производными?
2. Каковы математические основания квантовой теории поля и её новейших обобщений?

Может создаться впечатление, что эти вопросы слишком общие для серьёзного исследования. В самом деле, чтобы двигаться в этом направлении, нужно задаться многими «глупыми» вопросами: что такое уравнение с частными производными, что такое его решение, как «наблюдать» эти решения и тому подобное. Эти вопросы, однако, не являются ни частными, ни метафизическими. В этой главе мы неформально обсудим, в каком контексте они очень естественно возникают и какого рода результаты можно получить, если начать отвечать на них систематически.

Заметим также, что при знакомстве с достаточно сложным новым разделом науки лучший способ продвинуться — начать с изучения симметричных моделей. В интересующем нас контексте это означает приступить к изучению симметрий общих уравнений с частными производными. Именно поэтому мы избрали симметрию в качестве отправной точки дальнейшего анализа.

Темы, которые мы затрагиваем в этой главе, будут в дальнейшем изучены во всех подробностях.

§ 0.1. Что такое симметрии уравнений с частными производными и что такое сами уравнения с частными производными?

Концептуальный ответ на эти вопросы не столь прост, как может показаться. В самом деле, рассмотрим уравнение с частными производными вида

$$F(x, u_i, \ldots, u_{(k)}) = 0, \tag{0.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, а $u_{(l)}$ — набор всех производных l-го порядка от зависимых переменных u по независимым переменным x, и зададимся вопросом, каковы симметрии уравнения (0.1). Если рассматривать это уравнение как соотношение между двумя группами переменных — зависимых и независимых, — то естественно было бы определить симметрию как преобразование независимых переменных и отдельно преобразование зависимых переменных, сохраняющее это соотношение. Точнее говоря, предлагается называть симметриями уравнения (0.1) преобразования вида

$$(x, u) \mapsto (\widetilde{x}(x), \widetilde{u}(u)), \tag{0.2}$$

которые после канонического продолжения на производные сохраняют соотношение (0.1).

За этой исторически первой конструкцией симметрий последовали ещё две, расширившие группу преобразований вида (0.2) сначала до

$$(x, u) \mapsto (\widetilde{x}(x), \widetilde{u}(x, u)),$$

а затем до

$$(x, u) \mapsto (\widetilde{x}(x, u), \widetilde{u}(x, u)). \tag{0.3}$$

К сожалению, все эти определения основываются на выборе симметрий, приспособленном к конкретным примерам, так что, идя по этому пути, никогда нельзя быть уверенным, что очередной анзац наподобие (0.2) или (0.3) является подлинным окончательным определением. Например, за преобразованиями (0.3) исторически последовали знаменитые контактные преобразования, открытые Софусом

Ли. Именно, он предложил рассмотреть в качестве симметрий уравнения (0.1) преобразования вида

$$(x, u, u_x) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{u}, \widetilde{u}_x),$$

где $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x, u, u_x)$, $\widetilde{u} = \widetilde{u}(x, u, u_x)$, $\widetilde{u}_x = \widetilde{u}_x(x, u, u_x)$, сохраняющие вместе с равенством (0.1) и уравнение

$$du - \sum u_{x_i} dx_i = 0.$$

Но, может быть, кто-то сможет найти что-то ещё? Сам Ли не нашёл ответа на этот вопрос, но он хорошо понимал, что выражение вида (0.1) — не самодостаточный объект, который надо напрямую подвергать преобразованиям, но всего лишь ярлык на таком объекте. В частности, открытие Софусом Ли контактных преобразований основывалось на геометрической интерпретации того, что стоит за ярлыками вида $F(x, u, u_x) = 0$ (см. более подробное обсуждение в статье [127]).

В целом ясно, что симметрии математического объекта должны быть его обратимыми морфизмами в себя («преобразованиями»). Из сказанного выше видно, что неясность в вопросе, что считать симметриями уравнений с частными производными, происходит из того обстоятельства, что мы толком не знаем, что такое, собственно говоря, уравнение с частными производными.

Этот последний вопрос не столь нелеп и не столь наивен, как может показаться. Напротив, ответив на него, мы приобретём много больше, чем «настоящее» определение симметрий уравнений с частными производными.

В дальнейшем мы будем иногда называть *ярлыками* выражения вида (0.1), которые обычно и называются уравнениями с частными производными: мы не хотим смешивать обиходное и концептуальное значение этого термина.

Перейдём теперь к необходимым предварительным сведениям.

§ 0.2. Джеты

Заметим, что ярлыки дифференциальных уравнений суть «алгебраические» соотношения между независимыми и зависимыми переменными и производными последних до некоторого порядка. Поэтому всякий ярлык задаёт подмногообразие в многообразии, одна из возможных локальных карт которого состоит из всех этих переменных и производных. Эти многообразия называются пространствами (или многообразиями) джетов; они нам нужны, чтобы реинтерпретировать ярлыки в инвариантной (бескоординатной) форме. Ниже собраны необходимые определения и элементарные свойства джетов.

Зафиксируем $(n+m)$-мерное многообразие E, где $m \geqslant 0$, и целое неотрицательное число k. Мы будем исследовать n-мерные подмногообразия в E. Пусть L, L' — два таких подмногообразия и $a \in L \cap L'$. Мы будем говорить, что L и L' имеют один и тот же джет порядка k в точке $a \in E$, если они касаются друг друга в этой точке до порядка k. Итак, k-джеты суть классы эквивалентности n-мерных подмногообразий в E с точностью до касания k-го порядка. Мы будем обозначать через $[L]_a^k$ джет порядка k для n-мерного подмногообразия $L \subset E$ в точке $a \in L$. Совокупность всех джетов порядка k для всевозможных n-мерных подмногообразий $L \subset E$ во всех точках $a \in E$ обозначается через $J^k(E, n)$. Множество $J^k(E, n)$, снабжённое естественной структурой гладкого многообразия, называется *пространством джетов k-го порядка* n-мерных подмногообразий в E.

Замечание. Если многообразие E расслоено с помощью отображения $\pi\colon E \to M$, $\dim M = n$, то можно рассмотреть класс n-мерных подмногообразий в E, являющихся графиками локальных сечений расслоения π. Джеты k-го порядка для таких графиков образуют открытое и плотное подмножество в $J^k(E, n)$, называемое *пространством джетов k-го порядка сечений расслоения* π и обозначаемое через $J^k(\pi) \subset J^k(E, n)$.

Пример ($k=0$). Очевидно, любые два n-мерных подмногообразия в E, проходящие через точку $a \in E$, имеют касание нулевого порядка в точке a. Следовательно, в каждой точке существует лишь один 0-джет и можно отождествить $J^0(E, n)$ с E.

Пример ($k=1$). Два мерных подмногообразия в E имеют касание первого порядка в точке a тогда и только тогда, когда их касательные пространства в точке a совпадают. Стало быть, джеты первого порядка в точке $a \in E$ отождествляются с n-мерными векторными подпространствами в касательном пространстве T_aE к E в точке a.

Подчеркнём, что все приведённые выше определения имеют смысл и при $k = \infty$; в частности, корректно определено множество $J^\infty(E, n)$, но, чтобы ввести на этом множестве гладкую структуру, нужно провести некоторую работу, что будет сделано ниже.

Естественные отображения

$$\alpha_{k,l}\colon J^k(E, n) \to J^l(E, n), \quad [L]_a^k \mapsto [L]_a^l,$$

где $\infty \geqslant k \geqslant l \geqslant 0$, связывают пространства джетов разных порядков в единое семейство. В частности, они индуцируют последовательность

$$E = J^0(E,n) \xleftarrow{\alpha_{1,0}} J^1(E,n) \xleftarrow{\alpha_{2,1}} \ldots \xleftarrow{\alpha_{k,k-1}} J^k(E,n) \xleftarrow{\alpha_{k+1,k}} \ldots, \tag{0.4}$$

обратный предел которой совпадает с $J^\infty(E,n)$.

Если дано подмногообразие $L \subset E$, $\dim L = n$, то мы получаем отображение

$$j_k(L)\colon L \to J^k(E,n), \quad L \ni a \mapsto [L]_a^k \in J^k(E,n).$$

Функция φ на $J^k(E,n)$ называется *гладкой*, если $\varphi \circ j_k(L) \in C^\infty(L)$ для всякого n-мерного подмногообразия $L \subset E$. Тем самым определяется структура алгебры гладких функций на $J^k(E,n)$, а значит, и структура гладкого многообразия на этом множестве. Отметим, что это определение работает и для $k = \infty$.

Непосредственно из определений вытекает, что $j_k(L)$ — гладкое отображение и что

$$L_{(k)} = \operatorname{im} j_k(L) \subset J^k(E,n)$$

является n-мерным гладким подмногообразием в $J^k(E,n)$. Кроме того, тождества

$$j_l(L) = \alpha_{k,l} \circ j_k(L), \quad k \geqslant l,$$

показывают, что $\alpha_{k,l}$ — гладкая сюръекция и что отображение

$$\alpha_{k,l}^*\colon C^\infty(J^l(E,n)) \to C^\infty(J^k(E,n))$$

является вложением. Прямой предел последовательности мономорфизмов

$$C^\infty(E) \xrightarrow{\alpha_{1,0}^*} C^\infty(J^1(E,n)) \xrightarrow{\alpha_{2,1}^*} \ldots \xrightarrow{\alpha_{k,k-1}^*} C^\infty(J^k(E,n)) \xrightarrow{\alpha_{k+1,k}^*} \ldots$$

будет считаться алгеброй гладких функций на $J^\infty(E,n)$. Мы используем для этой алгебры стандартное обозначение $C^\infty(J^\infty(E,n))$.

Удобно упростить обозначения следующим образом:

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(E,n) \stackrel{\text{def}}{=} C^\infty(J^k(E,n)), \quad 0 \leqslant k < \infty,$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,n) \stackrel{\text{def}}{=} C^\infty(J^\infty(E,n)).$$

Если отождествить алгебру $\mathcal{F}_k$ с её образом в $\mathcal{F}$ относительно мономорфизма $\alpha_{\infty,k}^*$, то получим фильтрацию

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_k \subset \ldots \subset \mathcal{F}$$

на алгебре $\mathcal{F}$. Дифференциальное исчисление на фильтрованной алгебре $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_k\}$ доставляет необходимы строгие основания для дальнейших конструкций (см. [71]). В частности, оно позволяет во многих случаях обращаться с $J^\infty(E,n)$ как с обычным конечномерным гладким многообразием.

Локальная карта на E называется *разделённой*, если образующие её координатные функции разделены на две части, состоящие из n и m функций соответственно. Первые n из них, скажем $x_1,\ldots,x_n$, принято называть «*независимыми*» переменными, а остальные m, скажем $u^1,\ldots,u^m$, — «*зависимыми*».

Разделённая карта на E индуцирует локальную карту на $J^k(E,n)$, $0\leqslant k\leqslant\infty$, состоящую из функций

$$x_1,\ldots,x_n,u^1,\ldots,u^m,\ldots,u^i_\sigma,\quad |\sigma|\leqslant k,$$

где σ — обозначение для мультииндекса, скажем $\sigma=(i_1,\ldots,i_n)$, и $|\sigma|=i_1+\ldots+i_n$. Функция u^i_σ определяется как

$$u^i_\sigma\circ j_k(L)=\frac{\partial^{|\sigma|}f^i}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_1^{i_1}}\quad\forall\, L\subset E,\ \dim L=n,$$

где

$$u^i=f^i(x_1,\ldots,x_n),\quad i=1,\ldots,m, \tag{0.5}$$

суть локальные уравнения для L. Теперь мы видим, что многообразия джетов $J^k(E,n)$ (или $J^k(\pi)$) обладают естественными системами координат, состоящими из независимых и зависимых переменных и производных последних.

Стандартный ярлык системы уравнений с частными производными имеет вид

$$F_j(x,u,\ldots,u^i,\ldots)=0,\quad j=1,\ldots,l, \tag{0.6}$$

где $x=(x_1\ldots,x_n)$, $u=(u^1,\ldots,u^m)$. Естественно проинтерпретировать соотношения (0.6) как локальные уравнения подмногообразия $\mathcal{Y}\subset J^k(E,n)$ для подходящего E. Например, уравнение $u_t=u_{xx}+uu_x$ задаёт гиперповерхность $u_{2,0}+uu_{1,0}-u_{0,1}=0$ в $J^3(\mathbb{R}^3,2)$, где $\mathbb{R}^3=\{(x,t,u)\}$ и $x_1=x$, $x_2=t$, $u^1=u$ — разделённая система координат.

Сказанное выше мотивирует следующую бескоординатную версию стандартного определения уравнения с частными производными.

Определение. Подмногообразие $\mathcal{Y}\subset J^k(E,n)$ называется *ярлыком системы уравнений с частными производными*, наложенной на n-мерные подмногообразия данного многообразия E.

Пусть подмногообразие $L\subset E$ задано с помощью равенства (0.5). Тогда функции $f^i(x)$, $i=1,\ldots,m$, удовлетворяют системе (0.6) в том и только том случае, если $L_{(k)}\subset\mathcal{Y}$. Стало быть, многообразие $L_{(k)}$ можно рассматривать как бескоординатную версию понятия решения.