

МАТЕМАТИКА В ОГНЕ

ДЖЕЙСОН
УИЛКС

НЕСКУЧНЫЙ
НЕУЧЕБНИК

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 10

Профисловие 20

Акт I

Глава 1. Ex Nihilo 38

Интерлюдия 1. Замедление времени 92

Глава 2. Бесконечные возможности стекла с бесконечным увеличением 110

Интерлюдия 2. Как получить что-то из ничего 159

Глава 3. Словно вызванное из пустоты 166

Интерлюдия 3. Взгляд назад в будущее 211

Акт II

Глава 4. О кругах и методе сдачи 218

Интерлюдия 4. Ностальгическое устройство 259

Глава 5. Эстетика и недвижимый объект 274

Интерлюдия 5. Две тучки 319

Акт III

Глава 6. Два в одном 342

Интерлюдия 6. Убийство диеза 374

Глава N. Новое — это старое 397

*Интерлюдия N. Неправильное истолкование
и новое истолкование* 438

Глава №. Бесконечная красота бесконечного
дикого пространства 445

Главлюдия Ω. In Nihilo 485

Эта книга 493

Словарь 500

Указатель 507

Об авторе 510

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошая литература должна утешать расстроенных и беспокоить утешенных.*

Дэвид Фостер Уоллес, интервью с Ларри Маккефери

Художественную и научно-популярную литературу не так легко разделить.

Янн Мартел, «Беатриче и Вергилий»

Сожгите кабинет математики

Ладно, не сжигайте кабинет, на самом деле. И ничего другого тоже. Поджог — нехорошо и абсолютно противозаконно. Я... Неважно. Не хочу начинать книгу так.

(Автор ненадолго задумывается.)

Ладно, я думаю... в общем, ясно. Извините.

(Кхе-кхе.)

Все мы должны сильно негодовать. У нас украли кое-что прекрасное, а мы не ощущаем его отсутствия. Ведь кража произошла, когда мы еще не родились. Вообразите, что по какой-то грандиозной исторической причине все мы убеждены, будто музыка — тупое, скучное, нетворческое

* Перифраз слов Сезара Круза: «Искусство должно утешать расстроенных и беспокоить утешенных» (1997). В свою очередь, это вариация высказывания Финли Данна: «Дело газеты — утешать огорченных и огорчать утешенных» (1902). *Прим. перев.*

занятие, от которого нужно держаться подальше, за исключением самых необходимых случаев. Предположим, все мы в юности учились ей больше десяти лет и из-за неких проявлений яркого садизма со стороны преподавателей окончили этот курс с твердым убеждением, что музыка — не более чем средство для достижения цели. Мы можем согласиться, что каждому следует в общих чертах знать предмет, но только из соображений практичности: музыка вам нужна, поскольку она может — редко — помочь вам *в чем-то другом*. Все были бы убеждены, что музыка больше напоминает работу водопроводчика, а не вид искусства.

Мир был бы по-прежнему полон творческих людей. Так же, как и сейчас. Под творческими личностями я подразумеваю не обязательно учеников школы искусств, или профессиональных художников, или парня, который написал что-то на унитазе и выставил в музее. Я имею в виду людей, которые создают вещи, доставая их из небытия; тех, кто не отказывает себе в праве быть собой; у кого есть свой путь ломки реальности, настолько подлинный, что вы можете ощутить это своими нервными окончаниями; кто входит в мир горящим и слишком часто умирает молодым. «Музыка не для них, — соглашаемся мы. — Музыка для бухгалтеров среди нас, и лучше всего, если мы оставим ее им». Какой бы надуманной ни казалась ситуация, ровно это произошло с математикой. Ее у нас украли, и сейчас самое время вернуть ее обратно.

В этой книге я защищаю процесс концептуального поджога. Состояние преподавания математики во всем мире упало до уровня, когда уже бессмысленно что-то менять. Нужно все сжечь и начать заново. Приступим прямо сейчас. В этой книге к математике подходят не как к предмету, который был создан и существовал до вас, а теперь его нужно вам объяснить. Начиная с этой страницы ее не существует. Мы сами изобретем ее с основ, без старого багажа мудреных обозначений и напыщенной терминологии, которая бродит по всем учебникам. Традиционные термины будут упоминаться и использоваться, когда в этом есть смысл, но математическая Вселенная, которую мы создаем, наша собственная, и принятые обозначения туда не допускаются, пока мы открыто не пригласим их.

Мы применим подход, который не требует зазубривания, побуждает к экспериментам и неудачам, не просит читателя принять то, чего мы не создали сами, избегает вычурных названий, которые скрывают простоту идей, и представляет математику как приключение (а она такая и есть), в разговорной форме. Книгу легко читать, как будто это роман. Основная цель нашего путешествия — удовольствие, а не практичность, но мы рады констатировать, что между ними нет никакого конфликта. Вы действительно изучите предмет — многое из него, — причем хорошо.

Если пытаться создать изложение математики, которое не требует от читателя принять факты, установленные ранее, невозможно не вспомнить о том, что я считаю фундаментальной трагедией нынешней математической педагогики. И она никогда не упоминается, даже при самой жесткой критике традиционного образования: *мы преподаем предмет задом наперед*.

Расскажу историю, которая покажет, что я имею в виду. У меня была тройка по начальной алгебре. Все, чему я научился, — ненавидеть слово «полиномиальный». У меня была тройка по тригонометрии. Все, чему я научился, — ненавидеть слова «синус», «косинус» и «гипотенуза». Математика была исключительно запоминанием, скукой и деспотичной властью, а уж это-то я люблю меньше всего. К выпускному классу школы я прошел все необходимые курсы. Не могу даже описать, насколько я был счастлив, что теперь можно до конца жизни не заходить в математический кабинет. Наконец-то свободен.

Однажды вечером в последний год учебы я, как обычно, бродил по книжному магазину и увидел книгу по математическому анализу. Я всегда слышал, что он очень труден, но у меня не было курса по анализу и не должно было быть... какое облегчение. Отсутствие обязательства изучать предмет почему-то делало книгу более привлекательной, и я подумал, что стоит полистать ее несколько секунд. Я ожидал увидеть какие-то ужасные символы, подумать: «Ну, это действительно сложно», — а затем поставить книгу на полку и закончить с этим навсегда. Но когда я открыл ее, там не было

обычного мусора. Простым и незамысловатым языком автор говорил примерно так: с прямыми гораздо проще, чем с кривыми, но если вы достаточно увеличите масштаб, то любой маленький кусочек кривой выглядит почти как прямая. Поэтому каждый раз, когда у вас есть задача о кривой, мысленно увеличивайте ее до тех пор, пока она не станет выглядеть как прямая, решите проблему на микроскопическом уровне там, где это просто сделать, а затем вернитесь к первоначальному масштабу. Вы нашли ответ.

Это понятно любому и применимо не только к математике. Если у вас сложная задача, разбейте ее на несколько маленьких, решите их, а потом соберите вместе. Здесь есть изящество и необходимость, чего я никогда не чувствовал на уроках математики. Я еще немного полистал книгу и, когда увидел, что там есть раздел, где автор жалуется на то, как обычно преподают математику, я понял, что у нас с этим парнем много общего.

Я купил книгу и начинал читать ее всякий раз, когда мне было нечего делать. Мне нравилось, как пишет автор. У меня появилось лишнее оправдание тому, что мне никогда не нравилась математика в школе, и в то же время я убеждался, что ошибался по сути. Я не планировал изучать математический анализ и не помнил необходимых предварительных сведений из школы, так что я даже не знал, как решать «простые задачи» на микроскопическом уровне. Но это не проблема: у меня не было ограничений, накладываемых формальным образованием, и некому было наказывать меня, если я что-то делал неверно.

Так началось мое странное путешествие в анализ — до того, как я познакомился с алгеброй, тригонометрией, логарифмом и кучей всего, что вроде бы нужно изучить до анализа. Я купил тетрадь и стал разбираться. Каждый раз, когда я чего-то не понимал, я рисовал картинку и пытался убедить себя, что она правильная. Обычно я терпел фиаско.

Как ни странно, понятия анализа были самыми простыми частями этой книги. Намного труднее оказались так называемые необходимые предварительные области: алгебра, тригонометрия и прочий умозрительный упаковочный пенополистирол, которым набиты современные школьные

курсы. Мысль об увеличении масштаба приобрела для меня смысл: производные и интегралы было не только просто вычислять, но и легко понять исходя из основных принципов. Путь от их «доматематической» мотивировки к определениям и далее к методам вычисления казался логичным и обоснованным, он связывал все воедино. Но изредка приходилось обращаться к тому, что считалось «базой», — и это я не мог понять совсем, хотя и помнил смутно, что слышал от какого-то учителя на тихом скучном уроке. Я не мог додуматься, откуда взялись все эти, казалось бы, простые штуки вроде площади круга или необъясненных «тригонометрических тождеств».

К счастью, меня никто не заставлял запоминать все это, так что я изучал фрагменты анализа, не трогая алгебру и тригонометрию. Я читал что-нибудь в книге, неплохо понимал, а затем терялся, потому что не помнил, как складывать дроби. В случаях вроде этого достаточно было пялиться некоторое время на проблемное место, чтобы наконец понять: «О, да они просто дважды умножают на 1. Как будто *лгут*, чтобы сделать задачу проще, а потом *делают поправку на ложь*, чтобы не получить неверный ответ. Интересно...» Другие трюки были не так просты, чтобы их можно было легко раскусить, просто поглядев на них, и они ставили меня в тупик. Логарифмы, синус и косинус, «формула корней квадратного уравнения» и «дополнение до полного квадрата» не входили в мой лексикон, и сами термины ощущались как похмелье от моего отрицательного опыта с математикой в школе.

Немного продвинувшись в анализе, я по-прежнему не разбирался в «предварительных областях», но начал замечать занятное. Я понял, что производная объема сферы равна площади ее поверхности, а производная площади круга — длине окружности. У меня все еще не было идей, откуда взялись сами формулы площади и объема, но таинственная операция «увеличения масштаба» предполагала, что они как-то связаны. Так я впервые столкнулся со странным фактом о математике: мы можем быть в полном тупике по двум разным вопросам и не иметь прогресса по ним в отдельности, но умудриться четко продемонстрировать, что ответ *один и тот же*, даже не зная, каков он. Этот факт, который поначалу выглядит

как черная магия, — фундаментальная особенность абстрактной математики на всех уровнях. Это явно не та тупая авторитарность, которая действовала мне на нервы в школе.

Когда пришло время моего первого года в колледже, я совершил невозможное: решил пройти курс анализа. Я, всегда ненавидевший математику всеми фибрами, из-за случая в книжном магазине ради развлечения взял курс анализа 1. Потом курс анализа 2. Потом мой профессор предложил, чтобы я на второй год взял курс математики уровня выпускника. Я сказал ему, что ничего не знаю и что он сошел с ума. Но я прошел курс и получил высшую оценку. К окончанию колледжа кафедра математики вручила мне одну из тех памятных табличек, на которых пишут что-то вроде: «Поздравляем лучшего студента по математике в нашей истории». Подчеркну: у меня нет врожденного математического таланта и ничто за 13 лет изучения дисциплины до университета не наталкивало на мысль, что я найду удовольствие в этом предмете. В любой системе образования, в которой возможна описанная последовательность событий, что-то идет ужасно неправильно.

В итоге на уроке математике — моем заклятом враге в школе — я чувствовал себя как дома*. После колледжа я собрался поступать в аспирантуру по математической физике в Университете Альберты. Летом после первого курса, следуя своему жизненному принципу заниматься чем угодно, но не тем, что требуется, я увлекся психологией и нейробиологией. В итоге я подал заявление на программы в этой области, чудом оказался принятым, оставил программу по матфизике с магистерской степенью и сейчас живу в Санта-Барбаре, изучаю мозг и поведение с помощью математики. В первый год в магистратуре факультета психологии и наук о мозге я встречал много весьма умных студентов, которые испытывали тот же неоправданный страх перед математикой, что преследовал меня в школе. Каждый раз,

* Мне повезло, что в колледже были изумительные преподаватели, — особенно запомнились Рикки и Викки Клима, Эрик Марланд и Джефф Херст. Встречались и другие чудесные учителя, но эти четверо заслуживают особой благодарности за невероятную отзывчивость и за то, что терпели, когда я врвался к ним в кабинеты с диковинными вопросами, не связанными ни с каким курсом.

когда я вижу испуг в чьих-то глазах при упоминании высшей математики, мне хочется рассказать им, что весь их опыт с этим предметом ложен. Кажущаяся трудность предмета — целиком проблема того, как нам ее преподают, и я сам оценивал себя по этому стандарту. Если в этой книге найдется то, что вы систематически пытались понять, но не смогли, то это *моя* вина, а не ваша. Базовые идеи крайне просты. Абсолютно все. Гарантирую.

В первый мой год в Санта-Барбаре я невольно задумывался, что можно было бы существенно ускорить исследования в любых научных областях, если бы все специалисты этих отраслей лучше знали математику. Я не имею в виду «в их головах было бы больше математических фактов». Речь о том, что они «были бы хорошо обучены абстрактному мышлению». И, что еще хуже, я вполне уверен, что 9 человек из 10 имеют больше «врожденных способностей» к математике, чем я (что бы под этим ни подразумевалось). И я знаю о ней больше, чем мои сокурсники, только благодаря случайному происшествию в книжном магазине, привлечшему меня к предмету, симпатии к которому я до того времени не ощущал.

Сейчас лето, и я пишу эту книгу для всех, кто когда-нибудь ненавидел математику. Не только для молодых и разочарованных, а для всех ученых, которые втайне относятся к математике как к тошнотворному, но необходимому профессиональному требованию; они добросовестно терпят ее, но никогда не чувствовали огня, анархии и гедонистического удовольствия от предмета. Если я не провалюсь с треском, мы обнаружим много занятного*. Но я должен подчеркнуть, что это не очередная надоедливая попытка «сделать математику веселее», которая обычно означает размазывание тонкого слоя глупых лиц и плохих шуток поверх старого доброго подхода. Это слабенькое улучшение стандартных учебников, и такие книги никогда не преподносят предмет так, как он должен даваться

* Вышеуказанное предложение (разумеется) написано автором этой книги, весьма пристрастным источником, мнению которого по поводу его работы доверять не стоит. Но если применить тот же принцип к предыдущему предложению, мы получим, что следует не доверять самому недоверию. Похоже, мы в тупике. Думайте что хотите.

на мой взгляд: четкие указания на все, что субъективно и необоснованно; что выглядит так, как есть, поскольку кто-то пытался добиться причудливого звучания (осознанно или нет); отделение исторических случайностей от неподвластных времени процессов рассуждений; подтверждение оправданного презрения большинства студентов на уроках математики, где они, по сути, высмеивают способы преподавания предмета; и главное: *задом наперед*. Предмет в том виде, как он обычно представлен в нынешних образовательных учреждениях, не способен вынести ни один творческий самостоятельно мыслящий человек. Книги, которые пытаются исправить этот фундаментальный порок, с названиями вроде «Прикольные функции и их потрясающие графики», упускают большую часть причин, по которым так много учащихся считает предмет чужим*. Но сама математика, если ее очистить от лишнего, претенциозного и представить добросовестно и максимально по-человечески, несомненно, одно из самых красивых открытий нашего биологического вида. Это форма научного искусства, которую не нужно оправдывать тем, что она «полезная», хотя ее изучение — одно из самых плодотворных дел в мире.

В каждый момент нашего путешествия я буду сосредоточиваться на идеях, которые, на мой взгляд, имеют большую концептуальную важность, независимо от того, дают ли их обычно в одном курсе. Мы начнем с самых основ, но со временем приступим к изучению тем, которые преподают на последних курсах четырехлетней математической программы. Если и есть книга, которая ведет от сложения и умножения к анализу в бесконечномерных пространствах, я никогда ее не видел. И я надеюсь показать вам, что такой подход не настолько бредов, как кажется.

На каждой стадии, прежде чем демонстрировать вам какие-то идеи, я стараюсь пропускать их через мысленную центрифугу. Обычно в курсе любого предмета дается путаная смесь важного со случайным, которая скрывает простоту базовых идей даже от самых внимательных учащихся.

* Честно говоря, это название главы из очень хорошо написанной книги. Марк Райан, я был бы рад однажды встретиться лично. Вы невероятный преподаватель.

Я всегда хотел, чтобы преподаватели тратили намного больше времени на разделение этой смеси на составные части до написания учебников и чтения лекций. Я пытался сделать это в своей книге, для примера посмотрите первые несколько страниц главы 4. Также обратите внимание, что круги впервые появляются у нас намного позже того, как мы изобретем анализ. Так и должно быть; до этого они сбивают с толку.

Вот пример, как по-разному мы делаем дело. Одна из немногих штук, которые я помню со школы, — теорема Пифагора. Но я не знаю, почему она верна, не знаю, почему нас это должно волновать, и мне не нравится это вычурное название. Мы избежим всех трех проблем так: я буду использовать термин «кратчайший путь» вместо «гипотенуза», придумаю более описательный термин, чем «теорема Пифагора», предложу самое простое объяснение из тех, что знаю, почему она верна (все займет 30 секунд), и, как только мы изобретем ее для себя, я покажу простой вывод того факта, что время замедляется, когда вы двигаетесь*. Это следует из специальной теории относительности Эйнштейна, но объяснение не требует математических идей сложнее теоремы Пифагора, и вы сможете полностью понять рассуждение. При этом вывод выглядит удивительно. Причем для любого, и неважно, как долго вы всё это уже знаете! Учитывая, что рассуждение понятно, как только мы придумаем формулу для кратчайшего пути (ранее — теорема Пифагора), настоящей трагедией становится тот факт, что его не включают в обязательный школьный курс геометрии. Надо бы звонить в колокола, бросать конфетти и начинать объяснять это вам за пять секунд после изучения теоремы Пифагора. Но почему-то так не делают. А мы сделаем**.

Эта книга нарушает множество соглашений и кучу правил, вероятно, даже слишком много. Ни один метод обучения не подойдет всем сразу,

* Точнее, всякий раз, когда два объекта движутся в разных направлениях или с разными скоростями, их «часы» начинают идти по-разному. Но это не просто факт о часах. Это физическое свойство самого времени. Вселенная безумна. Подробности позже!

** Придется самим поискать колокола и конфетти. Не скажу, что не рад бы вам помочь; но, вероятно, я сейчас не там же, где и вы.

и я точно не претендую ни на то, что эта книга станет *универсальным* лекарством от болезней математического образования, ни на то, что она *гарантированно* подойдет любому. Если ее подход неэффективен для вас, пожалуйста, отложите ее и найдите то, что будет работать. Ваше время ценно, и вам не стоит тратить его на попытки продраться сквозь книгу, которая вам не по вкусу. Она была написана для души, целиком ради развлечения, а не как часть работы. В идеале ее и читать следует из тех же соображений.

И не важно, вносит ли этот эксперимент свой вклад в вечные ценности или нет. В образовании необходимы радикальные перемены. Пока все выглядит так, будто наши учебные заведения на всех уровнях — от начальной школы до докторантуры и даже стиливых требований академических журналов — призваны вызывать что-то вроде обратного стокгольмского синдрома, заставляя нас ругать то, что мы вполне могли бы любить. Учащиеся, оканчивающие школы и вузы, утомлены самыми умопомрачительными вещами, которые были открыты человечеством. Если они думают, что математика, физика, эволюционная биология, молекулярная биология, нейробиология, информатика, психология, экономика и другие области исследований скучны и неинтересны, это не их вина. Это вина системы образования, которая блестяще подходит для того, чтобы наказывать творческие способности; системы, в которой учат, как правильно писать слова, а не как думать, не одурачивая себя, что мы все неизбежно делаем; системы, в которой уравниваются законы природы и произвольные правила вроде запрета предлогов в конце предложения — как если бы и то и другое было равно обоснованным описанием Метода Устройства Мира; системы, в которой люди обязаны проводить большую часть своей молодости. Для них и для всех вас, у кого был такой опыт, эта книга — мое извинение.

ИНТЕРЛЮДИЯ 1

ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ

[Я не храню] такую информацию в своей голове, потому что ее легко найти в книгах... Ценность образования в колледже не в том, чтобы узнать много фактов, а в том, чтобы научить ум думать.

Альберт Эйнштейн по поводу того, почему он не знает скорости звука — одного из вопросов, включенных в «Тест Эдисона».

Опубликовано в New York Times 18 мая 1921 года*

Есть много вещей, которых вы никогда не видели, и вы не знаете об этом, потому что вы не видели их. Вам нужно сначала что-то увидеть, чтобы узнать, что вы этого не видели, а потом вы видите это и говорите: «Эй, я никогда такого не видел». Поздно, вы только что это увидели!

Джордж Карлин, «Снова за старое» (фильм)

Вещи, которых вы не видели

Есть многое, чего вы никогда не видели, и эта интерлюдия посвящена кое-чему из этого. Все слышали об Эйнштейне. Здесь мы увидим, как изобрести для себя одну из многих вещей, которыми он прославился: математическое описание того, как *фактически* работает время, используя такие простые рассуждения, что вы удивитесь, почему вам этого не рассказали давным-давно. На мой взгляд, тот факт, что такое короткое рассуждение существует, но не дается всем на каком-то этапе обучения, одна из самых

* 24 февраля 1921 года Эдисон опубликовал в New York Times объявление о приеме на работу, в котором было 140 вопросов для кандидатов. Вопросы касались истории, географии, физики, химии и т. д. Это список известен как «Тест Эдисона». 18 мая 1921 года New York Times писала, что Эйнштейн не прошел бы тест: «Его спросили через секретаря: „Какова скорость звука?“. Он сказал, что не может ответить сразу. Он не хранит такую информацию в голове, но ее легко можно найти в справочниках». *Прим. перев.*

ярких иллюстраций того, что формальное образование в нынешнем виде перепутало все приоритеты. Простой вывод в последней части этой интерлюдии показывает странность Вселенной и воодушевление науки, и вы можете найти его на кафедрах математики и физики, им можно поделиться с друзьями — как народной песней или эпической поэмой. Но он никогда не входит в стандартную программу обучения. Мы десятилетиями даем людям все, что нужно для понимания этого рассуждения, но само его не показываем. Почему? Потому что специальная теория относительности — «углубленная» тема, которая не внесена во вводные курсы физики и евклидовой геометрии, где получают математические сведения, нужные для понимания этого рассуждения. В итоге оно остается бездомным. Не имея подходящего дома для этого красивого и разрывающего интуицию рассуждения в обязательном курсе обучения, мы попробуем увлечь учеников тайнами физического мира, сосредоточившись на математическом описании маятников, снарядов и того, как шар скатывается по холму. Но хватит разглагольствовать. Пора веселиться!

Во-первых, прежде чем увидеть, как работает время, мы изучим краткое рассуждение, которое покажет очевидную справедливость формулы для кратчайшего пути, обычно именуемой теоремой Пифагора. Во-вторых, мы поймем, что это — самая сложная математическая идея, которая нужна для понимания одной из главных идей специальной теории относительности Эйнштейна: факта, что время замедляется, когда вы движетесь. Мы используем эту фразу как сокращенное описание, но она не совсем точна. На деле всякий раз, когда два объекта (включая людей) не движутся с одной скоростью или в одном направлении, они отмечают, что «время» другого объекта идет с иной скоростью*. Как бы странно это ни звучало, это не просто теория или факт о людях и часах. Это фундаментальное знание о структуре пространства и времени, которое получило больше экспериментальных подтвержде-

* Трудно оценить по достоинству такую идею с помощью столь короткого словесного описания, и если для вас в этом мало смысла, не беспокойтесь. Скоро его станет больше, когда мы приобретем немного предварительных сведений.

ний, чем любая другая научная идея. К концу интерлюдии вы поймете математическое рассуждение, показывающее, что «замедление времени» реально. Но вы можете убрать ощущение, что не понимаете этого, ведь вывод тут всегда удивителен, независимо от того, как хорошо вы поняли само рассуждение. И даже если нашему мозгу примата сложно что-то представить, математика должна иметь смысл, а если не имеет, то это моя вина. Готовы? Поехали.

Кратчайшие пути

Не всё в мире вертикально или горизонтально. Объекты могут быть наклонены в любом направлении. Это не очень удобно: часто информация, которую мы обрабатываем, поступает как факты о двух перпендикулярных направлениях. Их мы (абстрактно) воспринимаем как вертикальное и горизонтальное. Например, «до этого места три квартала на восток и четыре на север» или «то-то и то-то имеет 100 м в высоту и находится в 200 м». Предположим, у нас есть только информация о таких двух расстояниях: одно мы называем горизонтальным, а второе — вертикальным. Мы можем обсудить вопрос, нарисовав треугольник, у которого одна сторона вертикальна, а другая горизонтальна. Заметьте: дело вовсе не в треугольниках. Обсудим вопрос абстрактно, забыв о неважных деталях. Обозначим стороны треугольника a , b и c (рис. 1.9) и предположим, что мы знаем значения a и b . Можем мы с помощью только этой информации узнать длину «кратчайшего пути», c ?

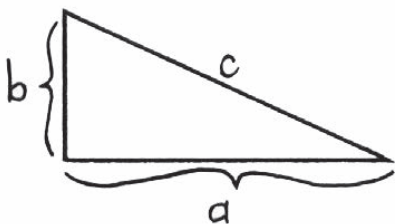


Рис. 1.9. Это не подпись к рисунку*

* Видимо, отсылка к картине Рене Магритта «Вероломство образов», на которой изображена курительная трубка с подписью «Это не трубка». *Прим. перев.*

Пока не совсем понятно, как найти длину c , если мы знаем a и b . Поскольку у нас нет идей, куда двигаться, наша единственная надежда — посмотреть, не можем ли мы превратить эту трудную задачу в такую, которая содержит только уже знакомое нам. Мы изобрели не так много математики, и у нас маловато знакомого, но мы знаем площадь прямоугольника. Поэтому хороший вариант — посмотреть, нельзя ли построить прямоугольник из нескольких копий изображенного выше треугольника. Возможно, потом мы сможем продвинуться в решении (или не сможем, но стоит попытаться). Тогда первое, что придумал бы лично я, — взять две копии треугольника с картинки и сложить их вместе в прямоугольник шириной a и высотой b . К сожалению, после изучения получившейся картинки мы по-прежнему сбиты с толку: не похоже, что такой простейший способ составления прямоугольника скажет нам что-то о кратчайшем пути. К счастью, второй по простоте способ оказывается полезнее (рис. 1.10).

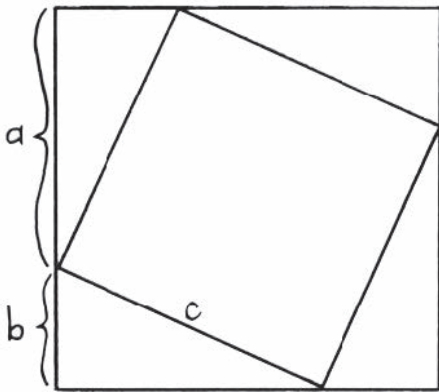


Рис. 1.10. Построение квадрата внутри квадрата с помощью четырех копий треугольника и пустого пространства. Теперь мы можем говорить о чем-то, с чем незнакомы (кратчайший путь), в терминах того, что мы знаем (площадь квадрата)

Мы построили большой квадрат из четырех копий исходного треугольника, у которых кратчайшие пути образуют квадратную область

пустого пространства посередине. Как и в главе 1, когда мы изобрели очевидный закон разрывания, из простого факта, что рисование картинки на «чем-то» не меняет площади этого «чего-то», можно выжать много сведений. Мы, по сути, нарисовали наклонный квадрат внутри большого. Мы уже знакомы с площадью квадрата, и этот трюк позволяет нам сформулировать предложения о кратчайшем пути, используя наш пока ограниченный словарь. Мы можем написать такие предложения, выразив общую площадь двумя способами. Результаты показаны на рис. 1.11.

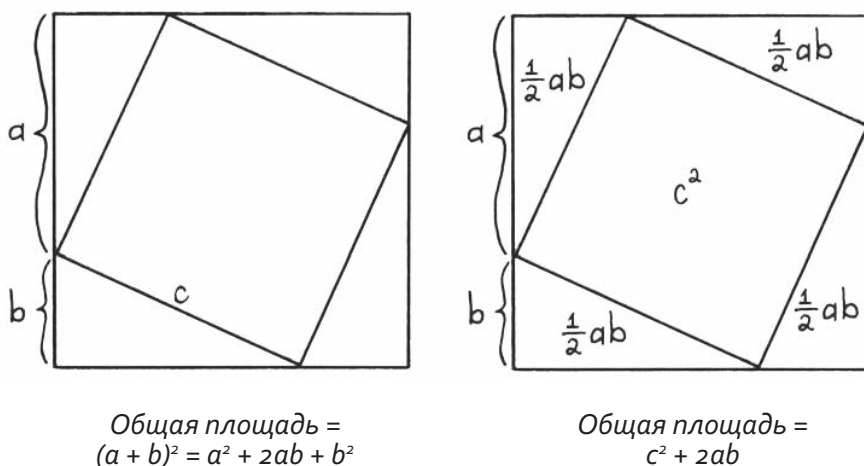


Рис. 1.11. Записав общую площадь двумя разными способами, мы можем изобрести формулу кратчайшего пути, именуемую в учебниках теоремой Пифагора

С одной стороны, мы нарисовали большой квадрат, длина стороны которого равна $a + b$, а площадь — $(a + b)^2$. В главе 1 мы убедились, что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, нарисовав картинку, которая сделала это очевидным. Это один способ описать наш рисунок, но есть и другой. Общая площадь равна сумме площади пустого пространства посередине (c^2) и площади всех треугольников. Мы не знаем площади треугольника, но если приложить любые два треугольника друг к другу (как в первой неудачной попытке подступиться к задаче), у нас получится прямоугольник

площадью ab . Всего у нас четыре треугольника, и из них можно построить два прямоугольника. Мы видим, что общая площадь составляет $c^2 + 2ab$. Мы описали одно и то же двумя способами, поэтому можем поставить знак равенства между описаниями и получить: $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$.

Следующая часть крайне важна, читайте внимательно. Вышеприведенное математическое предложение говорит, что одно равно другому. Если две вещи действительно равны (одинаковы), мы можем изменять обе одинаковым способом, и они (хотя и менялись по отдельности) *после таких преобразований по-прежнему будут равны*. Два ящика с одинаковым, хотя и неизвестным содержимым будут по-прежнему иметь одинаковое наполнение, если мы произведем с каждым из них одно и то же действие. Это верно независимо от действия (например, «вынуть все камешки», или «добавить семь шариков», или «сосчитать количество шляп в каждом и удвоить его»), пока мы соглашаемся, что все они одинаковы. Вот почему мы можем сказать (на стандартном жаргоне): «Вычтите слагаемое $2ab$ из обеих частей вышеприведенного уравнения». Убедитесь, что вы поняли это. Это не свойство математики или уравнений и не какой-то загадочный «закон алгебры». Это простой факт о нашем обиходном представлении о двух одинаковых вещах: одинаковые изменения одинаковых объектов должны давать одинаковые результаты*. Если это не так, мы не можем использовать термин «одинаковый». Итак, сделав указанное изменение, мы приходим к предложению:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Это позволяет нам говорить о кратчайшем пути в терминах горизонтальных и вертикальных отрезков; назовем это равенство «формулой кратчайшего пути». Учебники обычно именуют его теоремой Пифагора, что звучит как название волшебного меча или болезни, которую вы подхватываете, выпив некипяченой воды.

* Понимание этого простого факта и его следствий позволит нам пропустить значительную часть типичного вводного курса алгебры.

Фикция абсолютного времени

Такие события, как... коперниканская революция... оказались возможными лишь потому, что некоторые мыслители либо сознательно решили разорвать путы «очевидных» методологических правил, либо произвольно нарушали их.

Пол Фейерабенд, «Против метода»

Всего несколько выверенных рассуждений могут изменить способ нашего восприятия мира.

Стивен Ландсбург, «Экономист на диване»*

Запаситесь попкорном, дорогой Читатель, и приготовьтесь: сейчас вы увидите одно из самых красивых рассуждений в науке. Такой вывод не легко принять человеческим мозгом, поэтому вы не сможете понять его внутренне. Никто не может. Но даже та простая математика, которую мы уже изучили, предлагает способ обмануть некоторые внутренние ограничения нашего мозга и выйти за их рамки. Этот раздел мы пройдем быстрее, чем раньше, но не беспокойтесь. Вывод ниже логически независим от оставшейся части книги, и даже если вы не поняли ничего из нижеследующего, вы не отстанете, когда мы начнем изобретать анализ в главе 2. Поэтому наслаждайтесь. Вам понадобится три вещи, чтобы понимать то, что мы будем делать.

1. (Пройденное вами расстояние) = (Скорость, с которой вы движетесь) · (Время движения), если ваша скорость не меняется в течение всего пути. Все мы знаем это интуитивно, но можем легко позабыть, когда это выражено в абстрактной форме. Просто скажем: а) если вы двигаетесь 3 часа со скоростью 50 км/ч, то вы проедете 150 км; б) не важно, какие именно числа мы использовали в пункте а). Напишем, что $d = st$ обозначает «(расстояние) равно (скорости), умноженной на (время)».

* Издана на русском языке: Ландсбург С. Экономист на диване. Экономическая наука и повседневная жизнь. М.: Издательство Института Гайдара, 2012. *Прим. ред.*

2. Формула для кратчайшего пути, которую мы изобрели выше (теорема Пифагора).

3. Станный факт о свете.

Станный факт о свете — не математический, а физический, и он настолько абсурден, что не удивляйтесь, если не понимаете его. Его абсурдность лучше всего выражается тем, насколько он отличается от всего, что все мы знаем. Мы знаем вот что: если вы бросите теннисный мяч со скоростью 100 км/ч, а потом немедленно (с помощью каких-то сверхспособностей) помчитесь за ним со скоростью 99 км/ч, то все будет выглядеть так, будто мяч удаляется от вас со скоростью 1 км/ч (по крайней мере, пока не упадет). Тут нет ничего загадочного.

А вот кажущийся невозможным факт о свете: если вы «бросите» его (например, выпустите несколько световых частиц-фотонов из фонарика, стоя неподвижно), а потом тут же помчитесь за ними со скоростью 99 процентов световой, то ситуация *не* будет выглядеть так, что свет удаляется от вас со скоростью один процент световой! Он будет удаляться от вас со световой скоростью — той же, с которой убегал бы, если бы вы не стали догонять его.

Если это кажется невозможным, прекрасно! Значит, вы внимательны. Вместо того чтобы пытаться понять это, думая, как такое вообще может быть верно, попробуем сыграть в игру, аналогичную той, в которую играл Эйнштейн в 1905 году. Мы скажем: «Хорошо, это выглядит невозможным, но есть доказательства, что это верно, почему бы нам не спросить себя: *если это истина, то что еще должно быть истинным?*».

Для начала вообразим странное устройство, которое я называю световыми часами. Чтобы сконструировать его, вообразите, что вы держите два зеркала на небольшом расстоянии друг от друга. Поскольку свет отражается от них, воображаемое устройство держит его в ловушке: он носится между зеркалами туда и сюда. Как мы знаем, можно измерять время в секундах, часах, днях или как нам захочется, поэтому выберем такую единицу времени: время, которое нужно свету, чтобы добраться от одного

зеркала до другого. Мы можем придумать для нее название, например «шмекунда» или еще что-нибудь, но нам это не нужно.

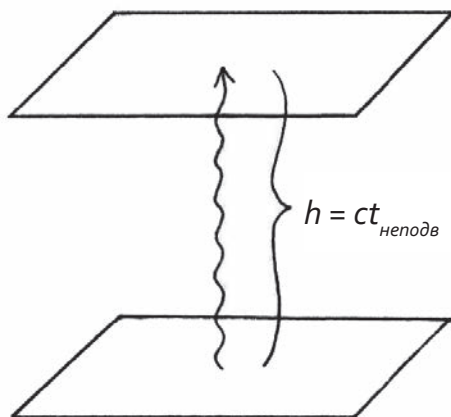


Рис. 1.12. Наши воображаемые световые часы состоят из двух зеркал, одно из которых находится на высоте h относительно другого, и частицы света, которая отражается между ними

Введем некоторые обозначения. По историческим причинам для скорости света обычно используется буква c . Собственно, это первая буква латинского слова, означающего «быстрота» (*celeritas*), и скорость света, без преувеличения, максимально достижимая в нашей Вселенной. Если оставить в стороне латынь, такое обозначение имеет смысл.

Итак, пусть c — скорость света. Обозначим буквой h расстояние по высоте между зеркалами и будем использовать $t_{\text{неподв}}$ для времени, которое нужно свету, чтобы добраться от одного зеркала к другому (скоро поймете, почему $t_{\text{неподв}}$, а не просто t). Я изобразил наши световые часы на рис. 1.12.

В начале раздела мы убедились, что (пройденное вами расстояние) = (скорость, с которой вы двигаетесь) · (время движения), если скорость не меняется. Поэтому с помощью введенных нами обозначений мы можем написать $h = ct_{\text{неподв}}$ или сказать то же иначе:

$$t_{\text{неподв.}} = \frac{h}{c}. \quad (1.10)$$

Теперь представим, что на часы смотрят два человека. Один из них находится в ракете, которая движется горизонтально, и держит эти часы в руках. Другой на Земле и смотрит на ракету и часы, пролетающие с какой-то скоростью, которую обозначим s . Это показано на рис. 1.13.

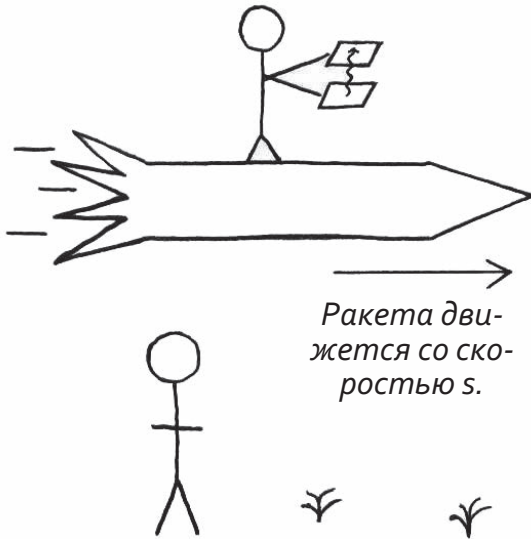


Рис. 1.13. Наши световые часы на ракете, которая движется со скоростью s мимо наблюдателя, стоящего на Земле

Итак, рассуждение выше, $h = ct_{\text{неподв}}$, должно описывать то, что видит человек в ракете. Возможно, вас смутит, что мы используем слово «неподвижное», хотя человек в ракете «движется». Но дело в том, что он не движется *относительно световых часов*: раз он их держит, то они «неподвижны» относительно его.

Как мы обсудим ниже, «движется» по сути не означает ничего, если не уточнить «движется относительно того-то». Так, а что сейчас увидит наблюдатель на Земле? Для него свет, пойманный в часах, будет по-прежнему двигаться вверх и вниз. Но часы движутся еще и по горизонтали, и ему покажется, что частица света будет отражаться по диагонали, вроде зуба пилы, как показано на рис. 1.14.

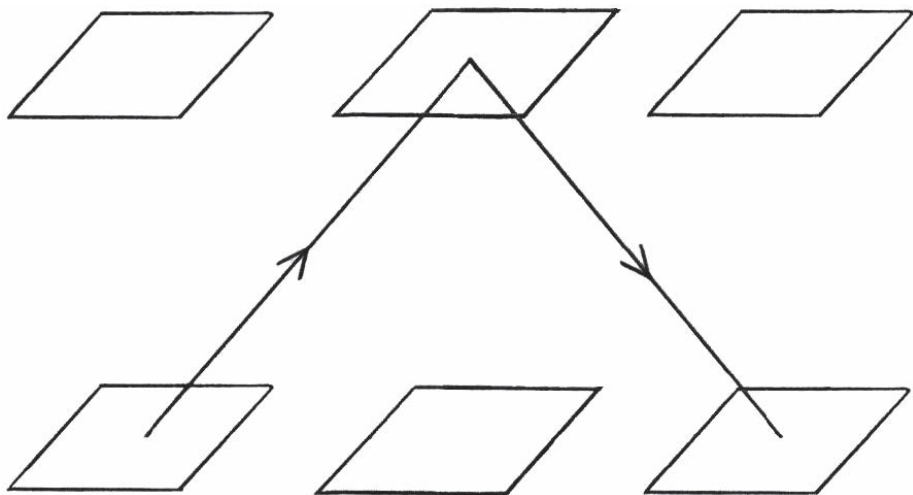


Рис. 1.14. Три моментальных снимка световых часов, показывающие, как наблюдатель на Земле видит движения света вверх и вниз. С его точки зрения свет идет по диагонали, поскольку перемещается вверх и вниз между зеркалами, когда сами они движутся мимо него слева направо. Пока человек видит пролетающую мимо ракету, частицы света рисуют что-то вроде зуба пилы

Вспомним, что в рассуждении выше (когда мы пришли к выводу $h = ct_{\text{неподв}}$) мы говорили о времени, которое нужно свету, чтобы пройти от одного зеркала к другому. Сделаем это снова, но теперь с точки зрения человека на Земле. Мы можем использовать сокращение $t_{\text{движ}}$ для времени, которое нужно свету, чтобы пройти между зеркалами, как это видит наблюдатель на Земле. Нижний индекс напоминает нам, что этот парень видит перемещающиеся световые часы. Возможно, вас удивит, зачем давать два разных названия одному промежутку времени. В конце концов, очевидно, что это одно и то же. Но не спешите! Мы уже видели, что свет ведет себя очень странно, и Эйнштейн всерьез рассматривал возможность, что эти два промежутка времени неодинаковы. Так что дадим им разные названия на всякий случай. Если они окажутся одинаковыми, мы обнаружим это позже. Если нет — мы тоже это выясним.

Теперь, сосредоточившись на пути света с рис. 1.14, мы можем определить расстояние, которое проходит свет за одно «тикание часов» с точки

зрения наблюдателя на Земле. Это показано на рис. 1.15. Вертикальное расстояние между зеркалами по-прежнему составляет h , а расстояние, которое свет проходит по горизонтали, — $st_{\text{движ}}$, поскольку ракета движется со скоростью s и мы считаем, что это происходит за время $t_{\text{движ}}$.

Здесь мы используем странный факт о свете: как бы быстро вы ни перемещались, кажется, что он двигается с одной и той же скоростью. Поэтому оба наших персонажа увидят, что свет движется с одной и той же скоростью c . Но человек на Земле наблюдает, как свет перемещается по диагонали в течение времени $t_{\text{движ}}$ и проходит расстояние, равное произведению скорости на время, то есть $ct_{\text{движ}}$. Это странно. Например, если бы свет был обычным мячом, который прыгал туда и сюда между зеркалами, его диагональная скорость, видимая с Земли, была бы *больше*, чем вертикальная с точки зрения парня с ракеты. Так мы «рассказали всю математику» факта о свете, который сочли странным. Сейчас мы можем увидеть, что еще в результате должно оказаться истинным.

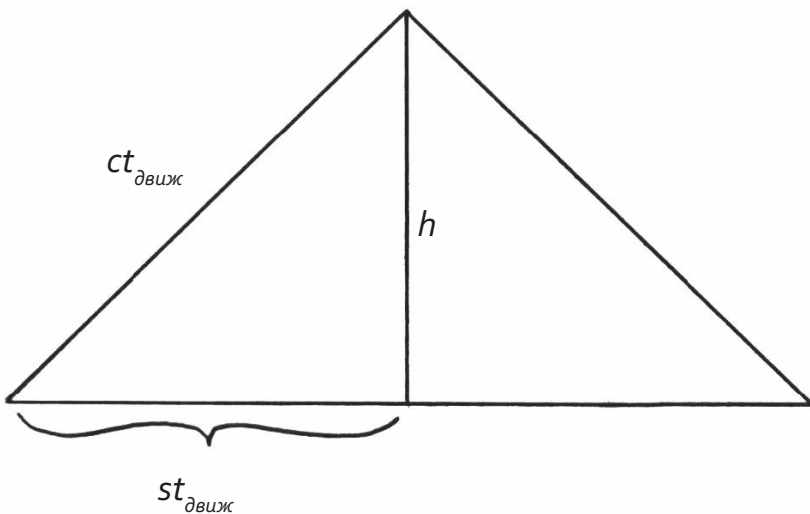


Рис. 1.15. Изображаем все расстояния. Подумаем, какое время нужно свету, чтобы добраться от низа до верха, с точки зрения наблюдателя на Земле. Расстояние между зеркалами по вертикали по-прежнему равно h . Пройденное расстояние по горизонтали — $st_{\text{движ}}$ а по диагонали — $ct_{\text{движ}}$ благодаря вышеупомянутому странному свойству света

Теперь мы используем формулу для кратчайшего пути. Поскольку «вертикаль» и «горизонталь» перпендикулярны друг другу, изображение на рис. 1.15 подскажет:

$$h^2 + (st_{\text{движ}})^2 = (ct_{\text{движ}})^2.$$

Мы хотим сравнить время $t_{\text{неподв}}$ и $t_{\text{движ}}$, и у нас уже есть выражение для $t_{\text{неподв}}$, так что найдем $t_{\text{движ}}$ из предыдущего уравнения. Тогда, возможно, нам удастся увидеть, одинаковые ли это промежутки времени. Чтобы найти $t_{\text{движ}}$, перенесем все, что включает его, в одну часть уравнения и получим:

$$h^2 = (ct_{\text{движ}})^2 - (st_{\text{движ}})^2.$$

Однако порядок умножения не важен, то есть $(ab)^2 \equiv abab = aabb \equiv a^2b^2$ для любых a и b . Перепишем предыдущее уравнение так:

$$h^2 = c^2 t_{\text{движ}}^2 - s^2 t_{\text{движ}}^2.$$

Поскольку обе части выражения справа содержат $t_{\text{движ}}$, мы можем преобразовать это так:

$$h^2 = (c^2 - s^2) (t_{\text{движ}})^2.$$

Иначе говоря,

$$\frac{h^2}{(c^2 - s^2)} = (t_{\text{движ}})^2. \quad (1.11)$$

Мы установили, что $t_{\text{неподв}} = h/c$, а в левой части предыдущего уравнения *почти* есть нечто, выглядящее как h/c . Проблема в том, что есть и вредное $-s^2$. Если бы его не было, то слева было бы $\frac{h^2}{c^2}$, то есть $t_{\text{неподв}}^2$, а это значит, что оба промежутка времени были бы равны. Но есть s^2 . Поэтому выполним ловкий математический фокус: солжем, а потом сделаем поправку на ложь. Идея такова. Мы хотим сравнить промежутки времени $t_{\text{неподв}}$ и $t_{\text{движ}}$, поскольку убеждены, что они должны быть одинаковыми. Иначе времени в обиходном смысле не существует — нервирующая мысль! Мы могли бы сравнить эти два промежутка, если бы там не было $-s^2$. Мы не можем убрать его, потому что это будет ложь, и тогда наш вывод тоже неверен. Но мы можем солгать, а затем сделать поправку, и тогда

у нас будет правильный ответ. Так и поступим. Мы хотим переписать уравнение 1.11, чтобы оно выглядело так:

$$\frac{h^2}{(c^2 - s^2)} = \frac{h^2}{c^2 (\clubsuit - \spadesuit)} = (t_{\text{движ}})^2.$$

Сейчас мы не в курсе, что такое $\clubsuit$ и $\spadesuit$. Наша задача — выяснить, чем они должны быть, чтобы сделать предложение истинным. Зачем? Ну, если нам удастся придумать какие-то значения для $\clubsuit$ и $\spadesuit$, которые сделают предложение истинным, то мы сможем заменить выражение $\frac{h^2}{c^2}$ в предыдущем уравнении выражением $t_{\text{неподв}}^2$, используя уравнение 1.10, и сравнить два промежутка времени, чтобы увидеть, как на самом деле работает время. Наша цель — сделать истинным такое предложение:

$$c^2(\clubsuit - \spadesuit) = c^2 - s^2.$$

Теперь, когда мы поставили задачу таким образом, все уже не так сложно. Мы хотим, чтобы символ $\clubsuit$ превратился в c^2 при умножении на c^2 , и мы можем считать, что $\clubsuit$ равен 1. Мы хотим, чтобы символ $\spadesuit$ превратился в s^2 при умножении на c^2 , и мы можем считать, что $\spadesuit$ равен s^2/c^2 , чтобы c^2 внизу уничтожило c^2 сверху.

Большинство математических книжек обходятся без трюков с $\clubsuit$ и $\spadesuit$, а вместо этого пишут: вынесем за скобки общий множитель c^2 . Мы тоже будем так делать, когда освоимся с этой идеей. Но говорить, что на этой стадии нужно делать что-то под названием «вынесение общего множителя», означало бы, что нам надо тратить время на изучение этого. Мы не будем. Результат процесса можно назвать «вынесением общего множителя», но это плохое описание процесса мышления, выбранного нами. На деле произошло следующее: мы *хотели*, чтобы нечто было истинно (а именно чтобы внизу было c^2), поэтому *солгали*, чтобы это было истинно (просто добавили c^2 там, где хотели), затем *сделали поправку на ложь*, чтобы по-прежнему получить верный ответ.

Еще важнее то, что фраза «вынести общий множитель c^2 » звучит так, будто в скобках он уже есть. Его там нет! Если мы игнорируем понятие

о «вынесении общего множителя» и рассуждаем с точки зрения лжи и поправки, то очевидно, что мы можем вынуть что угодно из чего угодно; мы можем вынуть c из $(a + b)$, хотя в этом выражении вообще нет c . Как? Ровно так же, как и в случае с ♣ и ♠ выше. Если вы хотите, чтобы c оказалось снаружи $(a + b)$, просто следуйте той же логике, и вы получите в итоге $c \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right)$. Что ж, извините за поучение, но это была не просто смена темы разговора. Этот материал крайне важен, и я не мог найти лучшего времени, чтобы упомянуть его. В любом случае мы выяснили, что

$$\frac{h^2}{c^2 \left(1 - \frac{s^2}{c^2} \right)} = (t_{\text{движ}})^2.$$

Извлекая квадратный корень* из обеих частей и используя тот факт, что $t_{\text{неподв}} = \frac{h}{c}$, мы получаем:

$$t_{\text{движ}} = \frac{t_{\text{неподвиж}}}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{c^2}}}. \quad (1.12)$$

Уравнение 1.12 выглядит сложновато, но проигнорируем сложность и посмотрим на самую важную его часть: если s не равна 0, промежутки времени $t_{\text{движ}}$ и $t_{\text{неподв}}$ не одинаковы! Получается, всякий раз, когда два объекта движутся с разными скоростями, их световые часы рассинхронизируются и начинают «тикать» на разных скоростях. Мы можем переписать уравнение 1.12, собрав все объекты, касающиеся времени, в одной его части (поделив обе части на $t_{\text{неподв}}$). Единственная причина, по которой у нас может возникнуть желание сделать это, состоит в том, что правая часть

* Мы еще не говорили подробно о квадратных корнях, хотя позже увидим, что они возникают как часть странного процесса, благодаря которому ранее бессодержательное сокращение получает новую жизнь и становится хорошей идеей. Если вы не поняли шага, когда мы извлекли квадратный корень из обеих частей, не беспокойтесь. Скоро мы поговорим об этом. А сейчас просто используем символ $\sqrt{\text{нечто}}$ для обозначения (положительного) числа, которое превращается в *нечто*, когда вы умножаете его на себя. Иными словами, $\sqrt{\text{нечто}}$ обозначает любое число (?), которое делает истинным предложение $(?)^2 = \text{нечто}$. От вас не ожидают, что вы умеете вычислять квадратные корни из каких-то конкретных чисел. Вы получили общее представление, и этого пока достаточно.

зависит только от скорости s . Конечно, она также зависит и от скорости света c , но это просто число, которое никогда не меняется (тот самый исходный странный факт о свете). Однако мы можем менять скорость s . Это позволяет нам чуть лучше представлять наглядно это странное явление замедления времени (рис. 1.16). На нем показано изменение величины $t_{\text{движ}} / t_{\text{неподв}}$ в зависимости от изменения скорости ракеты s . Мы можем представлять эту величину так: во сколько раз $t_{\text{движ}}$ больше, чем $t_{\text{неподв}}$. Чем больше эта величина, тем сильнее нарушается наше повседневное представление о времени.

Оказывается, уравнение 1.12 — не просто факт о световых часах или даже часах в целом. Это факт о фундаментальной структуре пространства и времени, и он был проверен много раз с тех пор, как Эйнштейн открыл его в 1905 году*. Почему мы не замечаем его в обычной жизни? Если вы и я гуляем вместе, а потом я поеду в магазин и вернусь обратно, мы не подумаем, что на самом деле прожили разное количество времени. Однако, как показывает рис. 1.16, промежутки времени, которые мы проживаем, равны, когда мы движемся с одной скоростью друг относительно друга, и почти равны, когда мы движемся со скоростями, которые малы по сравнению со световой.

Даже эта крошечная количественная разница, какой бы незначимой она ни была для повседневной жизни, требует больших качественных изменений в нашем представлении о Вселенной. Привычный нам мир, в котором есть единственное абсолютное представление о времени, просто полезное приближение: ложь, которая полезна, пока мы не движемся слишком быстро относительно окружающих объектов. Но, будучи полезным как обычное представление о времени, это на редкость плохое описание фундаментальной природы реальности.

Еще хуже другое: выясняется, что у нас нет оправданий использованию индексов $_{\text{движ}}$ и $_{\text{неподв}}$ в выражениях $t_{\text{движ}}$ и $t_{\text{неподв}}$. Более тщательное рассмотрение проблемы показывает, что, пока два человека двигаются с некой определенной скоростью и в каком-то направлении (ни один

* Джозеф Лармор и Хендрик Лоренц указали на это явление несколькими годами раньше Эйнштейна. *Прим. перев.*

не ускоряется, не замедляется и не меняет направления), у нас нет оснований сказать, что кто-то из них «неподвижен».

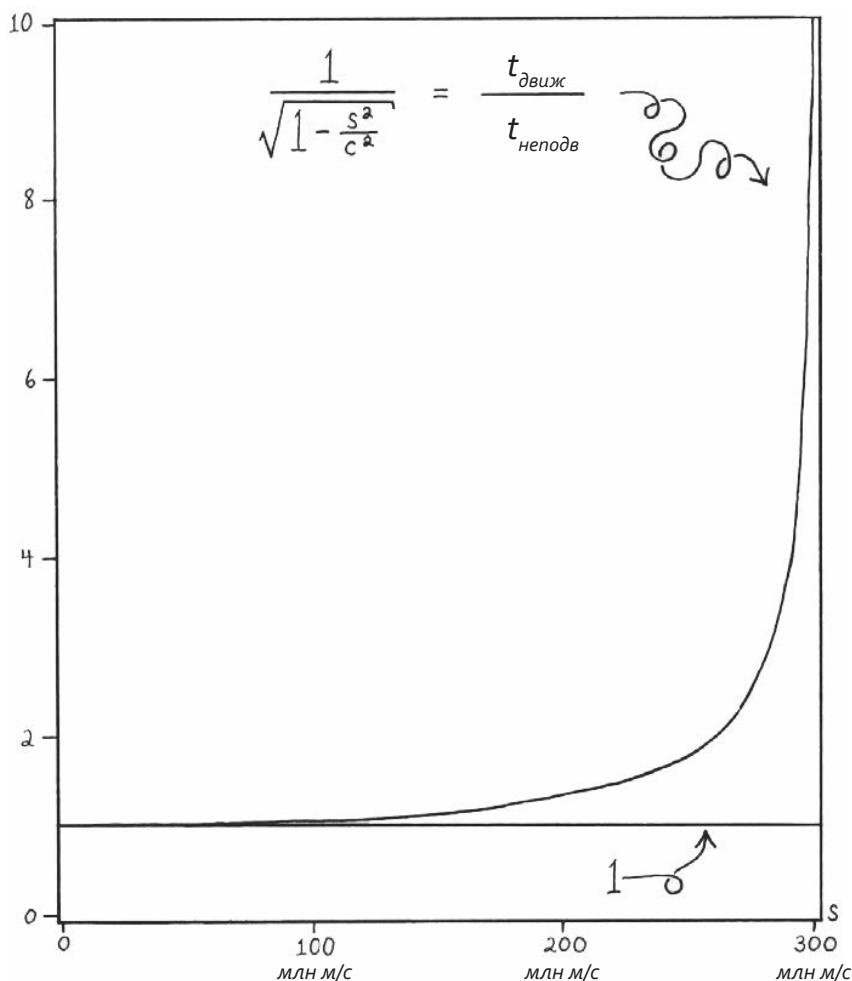


Рис. 1.16. Наглядное представление замедления времени. По горизонтальной оси — скорость, по вертикальной — величина $t_{\text{движ}} / t_{\text{неподв}}$, которая говорит нам, во сколько раз $t_{\text{движ}}$ больше, чем $t_{\text{неподв}}$ (насколько сильно нарушается наше повседневное представление о времени). В обычной жизни мы воспринимаем время как константу, то есть $t_{\text{движ}} = t_{\text{неподв}}$, или, что то же самое, $t_{\text{движ}} / t_{\text{неподв}} = 1$. Это горизонтальная линия на рисунке. Кривая — реальность: когда вы движетесь относительно кого-то, то время течет медленнее. Если скорости малы по сравнению со световой, наше повседневное представление о времени практически соответствует истине. Но оно все сильнее нарушается, когда скорость приближается к световой (примерно 300 млн м/с)

Мы привыкли использовать слова «движущийся» и «неподвижный», поскольку живем на гигантском камне, окутанном воздухом, и в любое время, когда мы на поверхности Земли или рядом с ней (то есть практически всегда), есть система координат, которая *выглядит* «неподвижной»: система, неподвижная относительно Земли. Но она не «неподвижна» в универсальном смысле. Для ясности рассмотрим двух людей в открытом космосе. Каждый из них может считать, что сам он движется, а другой на самом деле неподвижен. Или он может считать, что сам он неподвижен, а другой движется. Или он может считать, что оба двигаются. Все эти мысли будут одинаково истинны и одинаково ложны.

Чем больше мы изучаем рассуждения такого рода, тем проще нам понять, как бессмысленно «определять» свою фактическую скорость. Имеет смысл определять ее относительно произвольного другого объекта, который мы считаем «неподвижным». Поэтому вывод из нашего рассуждения намного удивительнее, чем может показаться на первый взгляд. Ведь в нашем примере со световыми часами ситуация вовсе не такая, что человек А видит, что у человека В время замедляется, а человек В видит, что у человека А оно ускоряется, и они могут прийти к соглашению. Действительность намного причудливее. Каждый видит, что у другого время замедляется, и — пока они не меняли скорости и направления — оба правы! Вас интересует, кто из близнецов будет старше, если один из них покинет Землю на ракете, летящей с околосветовой скоростью, а второй останется дома, когда они в итоге встретятся и сравнят показания часов? Отлично! Исследуйте парадокс близнецов. Вселенная безумна. Давай еще немного поучимся.