

Глава 1

Введение

§ 1.1. Что такое математика страхования?

Актuarная математика и теория риска являются ключевыми направлениями математики страхования и областью активных исследований, начавшихся во времена Эдмунда Галлея (Edmund Halley, 1656—1742) и до сих пор не завершенных. Можно сказать, что в последние годы эта область науки достигла значительной зрелости, в частности, к ней уже неприменима стандартная критика, состоящая в том, что существующие методы позволяют рассматривать только очень простые модели и давать ответы только на очень простые вопросы.

Эта книга написана на основе магистерского курса по математике страхования и отражает современное состояние актуарной теории: наряду с классическими темами, изложение которых сопоставимо с общепринятыми стандартами актуарного обучения в Великобритании и других странах, включается материал, подводющий к недавним достижениям актуарной науки. Сюда относятся разбор многочисленных модельных задач, возникающих в актуарной практике, например принципы формирования премии, анализ уравнений Тъеле с марковскими переходами, применения центральной предельной теоремы для порядковых статистик в демографии, анализ связанных с рынком акций страховых полисов, теория доверия, сравнение рисков в общих моделях страхования, моделирование зависимостей, использование обобщенных линейных моделей, а также широкое использование распределений фазового типа в задачах страхования жизни и общих моделях страхования. Согласно общепринятой в Великобритании традиции изложение актуарной статистики включает введение в теорию игр и простые примеры временных рядов. В заключительной главе дается небольшая подборка задач по теории управления и стохастическому анализу.

Ключевую роль в математическом инструментарии занимают методы теории разорения. Простейшей моделью подобного типа

является классическая модель Крамера—Лундберга, она допускает обобщения на случаи рекуррентных потоков и спектрально-отрицательных процессов Леви; оба эти обобщения изучаются в этой книге. Во многих приложениях естественно считать, что расходы страховой компании включают наряду с выплатами по страховым требованиям большое число небольших выплат, связанных с накладными расходами. Такие модели удобно рассматривать в рамках теории процессов Леви. Отметим, что теория разорения имеет многочисленные связи и точки пересечения с другими разделами теории вероятностей и случайных процессов, например теорией запасов и теорией очередей, а также финансовой математикой (вычисление цен барьерных опционов, займов и кредитов и т. д.). Хотя в практике страхования обычно используются более простые и грубые меры риска, например VaR (Value-at-Risk), общепринято мнение, что подход с позиций теории разорения критически важен для контроля рисков. В наше время повсеместного распространения согласованных с моделями рынка (market-consistent) принципов назначения премии роль временной изменчивости страховых портфелей, которая детально изучается в теории разорения, не должна быть недооценена.

Начисление премий в зависимости от кредитной истории (experience based rating) — это одна из важнейших методик в практике страхования. Страховые компании устанавливают премии в зависимости от кредитной истории клиентов, для того чтобы предложить различные контракты различным группам клиентов и, например, в случае автострахования удержать опытных и аккуратных водителей. На современном конкурентном рынке страховщики стремятся определить индивидуальные премии как можно точнее. Для страхового бизнеса становится критически важной способность предложить оптимальную цену: если эта цена слишком низкая, будет поставлена под вопрос кредитоспособность (solvency) этого направления бизнеса; если же цена слишком высокая, под вопросом окажется конкурентоспособность. Поэтому в процессе заключения контракта клиенты обычно разделяются на несколько групп в соответствии с тем, как оцениваются связанные с ними риски по имеющимся данным. Далее ценовая политика для каждой группы рисков учитывает как специфические данные по этому классу рисков, так и большой объем данных, накопленный страховым бизнесом по данному типу рисков в целом. При этом актуарии неявно допускают, что риски одинаковы для всех членов группы,

что формализуется как предположение об однородности группы. Строго говоря, однородных классов рисков в страховании не существует. Эмпирические исследования показывают, что индивидуальный опыт может значительно различаться в пределах той же самой группы рисков, поскольку никакие два риска не являются полностью идентичными. Поэтому при страховых вычислениях необходимо учитывать уникальные индивидуальные особенности каждого клиента. Теория доверия (*credibility theory*) предоставляет дополнительные технические возможности корректировать премии за страхование рисков, комбинируя кредитную историю клиентов с широким набором статистических данных. Она дает возможность количественно оценить различия между уникальным «индивидуальным риском» и более общим «коллективным риском». Премия клиента корректируется в соответствии с его кредитной историей. Например, клиент с благоприятной кредитной историей может получить дисконт, а для клиента, подавшего значительное количество крупных страховых требований в прошлом, премия может быть увеличена. Теория доверия изучает, «насколько можно доверять» кредитной истории клиентов. Она помогает страховщикам понять, можно ли рассматривать хорошую кредитную историю клиента как случайную флуктуацию индивидуального опыта или она действительно говорит, что риски, связанные с этим клиентом, в некотором смысле уменьшаются.

При изучении индивидуальной и коллективной моделей, а также в теории разорения мы предполагаем, что размеры требований являются стохастически независимыми неотрицательными случайными величинами. Это условие не всегда выполнено, например, имеется очевидная зависимость между смертностями в супружеской паре, между рисками землетрясений в близко расположенных населенных пунктах, а также между последовательными выплатами в рамках одного и того же полиса и т.д. Эта зависимость может быть связана как с условиями контракта, например болезнью или смертью владельца страхового полиса, так и случайными флуктуациями интенсивности интереса. Различные версии стохастического порядка могут применяться к подобным случаям. В частности, называется, стоп-лосс премия для суммы случайных величин с фиксированными маргинальными распределениями, но неизвестным совместным распределением максимальна, когда эти случайные величины настолько зависимы, насколько это допускают их маргинальные распределения. Таким образом, исключается возможность

того, что один случайный исход компенсируется (хеджируется) другим.

В заключение отметим, что многие ведущие университеты придерживаются точки зрения, что актуарная и финансовая математика являются различными аспектами единой дисциплины, которую обычно называют «финансовой инженерией». При этом часто подчеркиваются актуарные основы финансовой инженерии, что в корпоративном мире служит гарантией профессионализма и качества. В этом смысле нужно понимать популярную в Лондонском Сити фразу: «We are all actuaries».

§ 1.2. История актуарной математики

Актуарная наука — это древняя наука, и ее корни можно проследить вплоть до Древнего мира, например, в Вавилоне были разработаны законы, собранные в знаменитом кодексе Хаммурапи приблизительно 1750 лет до нашей эры, которые регулировали морскую торговлю в Средиземном море. Если купец получал заем, чтобы профинансировать морскую экспедицию, он платил дополнительную сумму в обмен на гарантию, что заем не придется выплачивать, если судно и/или груз погибнет в море. Актуарная наука сформировалась как математическая дисциплина в конце XVII века по мере возрастания потребностей в расчетах долговременных страховых полисов, таких как страхование жизни, морских перевозок и расчеты различных рент. Великий пожар Лондона в 1666 году привлек всеобщее внимание к жизненной необходимости страхования имущества.

Интересно отметить, что примерно до 1830 года в Великобритании не существовало муниципальных пожарных бригад. Однако страховые компании имели собственные пожарные бригады. Для того чтобы выделить застрахованные в данной компании здания, которые должны были тушить эти пожарные бригады, на домах устанавливали специальные знаки (fire insurance marks). Например, в музее города Сwonси, Южный Уэльс, можно увидеть знаки, устанавливаемые на зданиях страховой компанией «Sun Fire Insurance», датированные 1709 годом. Знаки страховых компаний можно найти на старых зданиях Филадельфии (США) и Сиднея (Австралия).

Переломным моментом в истории актуарной науки было создание первых таблиц продолжительности жизни сэром Эдмундом

Галлеем в 1693 году. Интересно отметить, что Эдмунд Галлей был выбран членом Королевского общества (Fellow of the Royal Society) в возрасте 22 лет. Вторая половина XIX века в Великобритании была периодом неразберихи в индустрии страхования жизни. Например, в 1845 году было зарегистрировано не менее 47 компаний в области страхования жизни, ни одна из которых не дожила до 1887 года. Широко обсуждавшиеся в то время материалы специальной парламентской комиссии по изучению теневых операций в страховом бизнесе оказали свое влияние и на литературу. Эти события, очевидно, повлияли на Чарльза Диккенса, когда он писал роман «The Life and Adventures of Martin Chuzzlewit». Русский перевод под названием «Жизнь и приключения Мартина Чодзльвита» появился параллельно с английским изданием в журнале «Отечественные записки» в 1843—1844 гг. Когда Диккенсу для сюжета понадобилась мошенническая компания, обслуживающая интересы негодяя в его романе, он придумал Англо-Бенгальскую компанию «Disinterested Loan and Life Assurance Company». Для того чтобы регулировать страховой бизнес, в 1848 году в Великобритании был создан Институт актуариев (the Institute of Actuaries). В Шотландии Факультет актуариев (the Faculty of Actuaries) был основан в 1856 году. Однако длинная история совсем не означает, что актуарная наука является старомодной.

Язык теории вероятностей был постепенно принят в страховании в период между 1940-ми и 1970-ми годами. При этом возможности компьютеров начали использоваться практически с первых дней их появления. Все возрастающее значение и сложность финансовых рынков на глазах меняет характер профессии актуария. По существу, профессия актуария — это анализ всевозможных рисков. Традиционно это было страхование жизни, затем общее страхование (здоровье, дом, имущество, автострахование и т. д.). В настоящее время деятельность актуариев затрагивает все аспекты операций на финансовых рынках, включая анализ инвестиционных проектов, пенсионные схемы, флуктуации цен на основные товары и т. д. Не всегда легко сказать, где кончается работа актуария и начинается работа финансового аналитика широкого профиля. Поскольку обычно необходимо одновременно анализировать огромное количество финансовых обязательств, резервов, инвестиционных проектов, актуарию приходится учитывать все виды рисков на финансовых рынках. В настоящее время профессия актуария заключается в анализе всевозможных рисков,

для того чтобы «make financial sense of the future»¹⁾, как Факультет и Институт актуариев и утверждают в своем лозунге. Хотелось бы, чтобы молодой человек, интересующийся любыми аспектами применений математики к финансовым рынкам, мог найти что-то полезное в этой книге.

§ 1.3. Определение свободной профессии

К классическим профессиям относят закон, медицину и теологию. Корни этих профессий восходят к Средним векам, когда все европейские университеты имели отдельные факультеты, посвященные этим профессиям. Они послужили моделями для других профессиональных групп, формирующихся вокруг областей знаний, полезных для общества: бухгалтерский учет, актуарная наука, архитектура, стоматология, акушерское/медсестринское дело и фармакология.

Прежде всего формирование определенной профессии должно основываться на систематических знаниях, обладании существенным интеллектуальным багажом, а также наборе профессиональных приемов, которые требуются для применения этих знаний в практических ситуациях. Во-вторых, должны существовать стандарты профессионального поведения, которые имеют приоритет над любыми персональными мотивами и определяют формы профессиональных отношений как с клиентами, так и с коллегами по профессии. Эти два основных критерия на практике приводят и к другим профессиональным особенностям, в частности к возникновению профессиональных ассоциаций, функциями которых являются контроль стандартов профессионального поведения, распространение знаний и, в какой-то степени, контроль за допуском новых членов в профессиональное сообщество. Таким образом, формируется контролируемая система допуска к профессиональной деятельности, обеспечивающая гарантированный уровень подготовки, знаний и компетенций. Как правило, для получения доступа к профессиональной практике претендент должен сдать серию квалификационных экзаменов.

В наше время математические знания являются ключом к получению наиболее престижных профессий, доступных в развитых странах. Согласно сайту CareerCast's 2015 Jobs Rated report, четыре

¹⁾Придать будущему финансовый смысл.

из десяти наиболее престижных профессий основаны на математике. Актуарий, использующий математику, статистику и финансовую теорию для оценки рисков, характерных для теории страхования, стоит в этом списке под номером 1, выше, чем математик (№ 3), статистик (№ 4) и специалист по анализу данных (№ 6). В 2018 году этот сайт оценил медианную зарплату для актуария в США в \$100 610, для статистика — в \$84 160, для математика — в \$81 950. Однако профессии статистика и математика имеют более высокий рейтинг, так как уровень стресса, связанный с работой актуария, считается более высоким. В Великобритании, для того чтобы стать актуарием, нужно сдать девять экзаменов первой ступени по математике, статистике, экономике и финансам (серия 100, Core Technical¹⁾), экзамен по мастерству коммуникации (201), экзамен по одной из пяти специализированных дисциплин (серия 300), а для актуариев, работающих в Великобритании, — дополнительный экзамен по специфике страхового бизнеса в Великобритании по одной из пяти специализированных дисциплин. Вся эта программа обычно занимает не менее трех или четырех лет после получения университетского диплома по математике и, как правило, совмещается с работой в одной из страховых компаний.

§ 1.4. Разрешение конфликта между корпоративной и публичной ответственностью

Стандарты профессионального поведения актуариев подразумевались, но редко формулировались явно на протяжении большей части истории актуарной профессии. Например, в 1853 году в ответе на запрос Parliamentary Select Committee on Assurance Associations²⁾ о достоверности финансовых отчетов эксперт сказал: «I think the best security is the character of the parties giving them». Выступая перед той же комиссией, еще один эксперт заверял парламентариев, что «actuaries are gentlemen»³⁾.

К началу XXI столетия колоссальное расширение масштабов и сложности актуарной практики, а также значительное увеличение числа актуариев создали совершенно другую ситуацию. Эти масштабы не позволяют полностью полагаться на личную порядочность

¹⁾ Ключевая техническая.

²⁾ Специальной комиссии парламента по страховому бизнесу.

³⁾ Я полагаю, что наилучшей гарантией является репутация представляющих их компаний.

индивидуальных актуариев, для того чтобы обеспечить общественные интересы в безопасности и устойчивости финансовых систем. Это потребовало развития и поддержки кода профессионального поведения и стандартов актуарной практики, хотя, к сожалению, они еще очень далеки от того, чтобы быть сопоставимыми в разных странах. Например, International Accounting Standard (IAS) действует в странах EU с 2005 г., однако страховые контракты не попадают под его действие.

Нередко на актуариев, работающих в частных компаниях, как часть их профессиональной деятельности возлагается ответственность за соблюдение норм и достижение целей, формулируемых внешним регулятором. Например, актуарий, анализирующий устойчивость частного пенсионного фонда, несет ответственность не только перед дирекцией компании-учредителя. В этой ситуации необходимы механизмы контроля неизбежно возникающего конфликта в попытке служить двум хозяевам одновременно. Такими механизмами выступают профессиональные стандарты, руководства и дисциплинарные процедуры, основанные на этических принципах; они заставляют наемного работника, каким обычно бывает актуарий, выполнять регулирующие функции внутри частной компании. Например, кризис в стандартах бухгалтерского учета в США в начале 2000-х годов, проявившийся в сомнительной финансовой документации многих ведущих корпораций, иллюстрирует, насколько чувствителен вопрос о поддержании профессиональных стандартов. Весьма вероятно, что само выживание и процветание актуарной профессии будет зависеть от уровня общественного доверия к той информации об устойчивости и безопасности финансовых систем, которую актуарии сообщают регуляторам, менеджерам и широкой публике.

§ 1.5. Как пользоваться этой книгой

В основу этой книги положен курс лекций и семинаров для магистерской программы «Статистическое моделирование и актуарные расчеты» в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики». Большинство студентов, поступающих на эту программу, достаточно свободно ориентируются в элементарной теории вероятностей, статистике и основах актуарной математики, хотя некоторые студенты, закончившие бакалавриат в других вузах, сталкиваются с актуарной и финансовой математикой

впервые. Поэтому в книгу включены достаточно простые и традиционные задачи актуарной математики, требующие некоторой изобретательности, но минимальных предварительных знаний. Интересы студентов также достаточно разнородны: некоторые из них хотят стать актуариями или финансовыми аналитиками в широком смысле, другие хотят работать в вычислительных секторах ведущих банков или индустриальных корпораций. Значительная группа студентов, получивших базовое образование в физико-математических вузах, прежде всего хотели бы видеть достаточно нетривиальные задачи прикладной математики, которые не только интересно, но и «полезно» решать. Для этой группы пользователей в книгу включены подборки задач по процессам Леви, оптимальному управлению и стохастическому анализу. Чтобы удовлетворить все эти запросы, основное внимание в этой книге уделено примерам и задачам, которые достаточно разнообразны, и для большинства из них приводятся полные решения. Таким образом, студенты, обучающиеся по специальностям «Прикладная математика и статистика» и интересующиеся стохастическими аспектами страхования, также могут обучаться по этой книге. Если использовать язык фигурного катания или гимнастики, этот курс включает две компоненты: короткую обязательную программу и произвольную программу в свободном стиле. Например, обязательная программа в теории разорения состоит в анализе модели Крамера—Лундберга (CL), а программа в свободном стиле — различные задачи для спектрально-отрицательных процессов Леви. Не нужно удивляться или пугаться, если какая-то задача содержит неизвестный вам термин или сложное вычисление. При всеобщей доступности интернета большинство этих проблем решается в течение нескольких минут. Если же проблема не решается, просто пропустите эту задачу и вернитесь к ней при втором чтении. Для решения многих классических актуарных задач неизбежно приходится использовать актуарные таблицы, они приводятся в конце книги.