Занятие 1

Задачи с шахматной доской

Тема первого занятия математического кружка должна быть доступной, познавательной и увлекательной. В то же время она должна иллюстрировать несколько важных идей, которые и отличают математические кружки. Нам бы хотелось, чтобы дети ощутили, что поиск решения сам по себе может быть захватывающим процессом.

Поэтому сегодня мы будем изучать, как при решении задач может помогать раскраска. Эта интересная и яркая тема определённо понравится ученикам. Здесь на лету появится множество элегантных и глубоких доказательств и будет где воскликнуть «Эврика!».

Сегодняшнее занятие организуется таким образом.

- Знакомство преподавателя с учащимися.
- Несколько слов о математических кружках.
- Короткая разминка.
- Обсуждение и решение задач.

Что принести на урок

- Распечатки головоломок с замком сэра Квадрата (одна на ученика; можно скопировать со с. 402).
- Распечатки головоломок с замком сэра Квадрата с подсказками (раскраска в шахматном порядке) (одна на ученика; можно скопировать со с. 402).
- Распечатки задач, которые разбираются в классе (одна на ученика).
- Распечатки задач для домашней работы (одна на ученика).
- Бумага в клетку (сегодняшний набор задач включается в более общий круг задач на квадратной сетке).

1.1. Введение

На первом занятии полезно потратить некоторое время, чтобы представиться ученикам и познакомиться с ними.

Если у вас есть в запасе 10 минут, в качестве первого шага можно сыграть в короткую игру — скажем, «Две правды, одна ложь». В этой игре каждый участник сообщает классу три факта о себе: два истинных и один ложный. Остальные должны угадать, какие факты истинны.

Например, учитель может представиться и сказать: «У меня есть рыжий кот по имени Медовик; каждый день я ем одну жевательную конфету; я умею жонглировать пятью предметами». Учащиеся пытаются догадаться, какие факты верны. Затем игру продолжают сами школьники.

После игры вы можете немного поговорить о своих планах для математического кружка: что вы собираетесь рассказывать, как будут организованы уроки, чем кружок отличается от школы и т. д.

1.2. Математическая разминка

Обычно мы начинаем занятие с короткой разминки.

Задача для разминки 1. В саду растут несколько деревьев. На грушевом дереве есть груши. После сильного порыва ветра ни на дереве, ни на земле груш нет. Как это могло произойти?

Задача для разминки 2. Две девочки родились у одной матери, в одно и то же время, в один день, в один месяц и в один год, но они не двойняшки. Как это может быть?

Для преподавателей. Перед разминкой напомните детям, что это шуточные задачи с подвохом, но с математической точки зрения они несложны. Поэтому учащимся нужно мыслить нестандартно и быть готовыми к необычным решениям.

Ответы для задач разминки, а также решения всех задач можно найти в разделе «Решения», который начинается на с. 287.

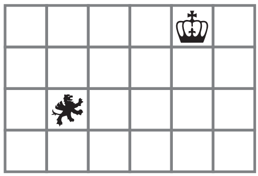
Перед тем как двигаться дальше, обратите внимание на то, что некоторые обсуждения в этой книге — это запись реальных обсуждений, происходивших в нашем кружке. Поэтому там могут быть вопросы учащихся, ответы преподавателей и т. д.

1.3. Тема занятия: «Задачи с шахматной доской»

Давайте начнём обсуждение с того, что предложим ученикам набор задач, похожих на головоломки. Все они похожи друг на друга; однако решения для некоторых из них найти легко, а для некоторых — невозможно. Почему? Правильные и неправильные попытки сформулировать ответ послужат превосходным знакомством с понятием доказательства и с темами чётности и чередования.

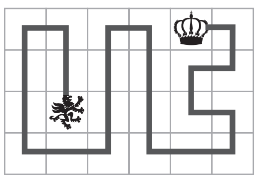
Давайте взглянем на первую задачу на доске.

Пример 1. В замке сэра Квадрата есть 24 комнаты в виде прямоугольника 6×4; в стене между любыми соседними комнатами есть дверь. (Схема замка изображена на рисунке ниже.)

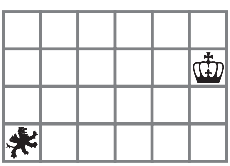


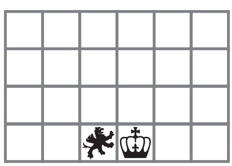
Можно ли пройти через замок следующим образом: начать в комнате, отмеченной гербом сэра Квадрата (крылатым львом), посетить каждую комнату замка ровно по одному разу и закончить в комнате, отмеченной короной?

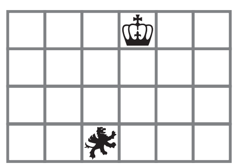
Разбор примера 1. Мы будем разбираться с этой головоломкой вместе: я рисую схему на доске, а пара добровольцев выходит и чертит возможные маршруты. Ниже показано одно из таких решений.

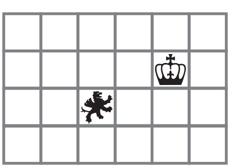


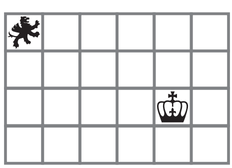
Пример 2. Теперь каждый учащийся получает лист с шестью другими задачами и начинает с ними работать.

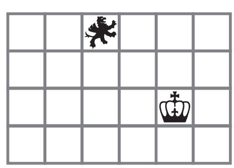
а) 

б) 

в) 

г) 

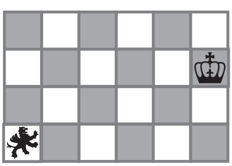
д) 

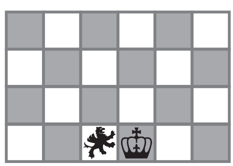
е) 

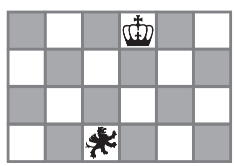
Разбор примера 2. Вскоре школьники начинают давать решения для случаев а), б) и г). Одновременно некоторые заявляют, что в), д) и е) решить невозможно. Несколько детей пытаются объяснить это. Вероятнее всего, аргументация будет такой: «Если мы начнём с этой комнаты и пойдём сюда, то застрянем вот тут; если мы пойдём туда, то застрянем там... Мы попробовали все возможные пути и не добились цели». К сожалению, такие рассуждения далеки от идеала. Во-первых, вдруг мы пропустили какое-то решение, поскольку не заметили какой-то хитроумный способ повернуть? Кроме того, такая аргументация зависит от рисунка: каждый раз, когда мы выбираем новую пару комнат, нам нужно заново анализировать все возможные маршруты. Нельзя ли придумать объяснение, которое было бы более универсальным?

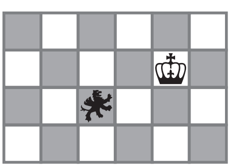
У кого-то появляется интересное наблюдение: если мы идём кратчайшим путём от первой до последней комнаты и проходим через чётное число пустых комнат, то головоломку решить можно; если же мы проходим через нечётное количество комнат, это сделать невозможно. Похоже, что это наблюдение работает: в случае а) мы проходим через 6 комнат, в случае б) — через 0, в случае в) — через 3, в случае д) — через 5. Однако это ещё не доказательство; пока это всего лишь наблюдение, которое оказывается верным для некоторых конкретных задач. Есть ли способ доказать, что это наблюдение справедливо всегда? Нам нужна идея. Как насчёт раскраски комнат в шахматном порядке?

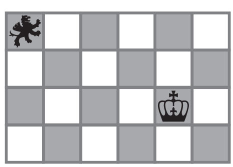
Я раздаю новые копии того же самого набора задач. Однако на этот раз все комнаты раскрашены в два цвета, подобно клеткам шахматной доски (см. рисунок ниже). Ученики копируют свои решения на эти раскрашенные схемы. Заметили ли они некую закономерность?

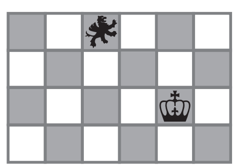
а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

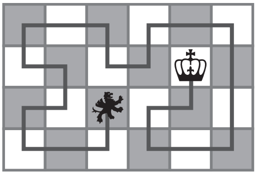
Вскоре у нас появляется целая куча новых наблюдений.

• Комнаты вдоль маршрута чередуются по цвету!

• Если первая и последняя комнаты имеют разные цвета, то задача имеет решение!

• Если первая и последняя комнаты имеют один цвет, то задачу решить нельзя!

Ура! Два последних утверждения выглядят весьма многообещающей гипотезой: «Нужный маршрут должен начинаться и заканчиваться в комнатах разных цветов». Давайте докажем это!



В самом деле, комнаты вдоль маршрута меняют свой цвет. Поэтому все комнаты с нечётными номерами должны быть одного цвета, а все комнаты с чётными номерами — другого. Всего в замке 24 комнаты; такова же и длина полного маршрута. Однако 24 — чётное число. Поэтому цвет последней комнаты всегда будет отличаться от цвета первой комнаты (см. рисунок справа). Это объясняет, почему нельзя решить задачу для случаев в), д) и е).

Завершим обсуждение, обобщив важный принцип, который мы только что открыли. Для нашей задачи мы нашли свойство, которое остаётся неизменным: путь чётной длины всегда начинается и заканчивается в комнатах разных цветов. Отсюда вывод: невозможно найти путь чётной длины, который соединяет комнаты одного цвета.

Идея величины или свойства, которые остаются неизменными, — очень мощное средство для решения задач. Такое свойство называется *инвариантом*[1]. В нашей задаче мы обнаружили инвариант, который использует идеи чередования и чётности.

Наше решение коротко и элегантно. Любое другое было бы более сложным. Например, если бы мы попробовали убирать все возможные маршруты методом проб и ошибок, такое решение отняло бы массу времени. Более того, наше решение универсально: мы можем применять тот же подход и к более крупным замкам!

Для преподавателей. Внимательный читатель, вероятно, заметил, что мы не ответили ещё на один важный вопрос. Мы доказали, что некоторые позиции невозможны; но мы не доказали, что все остальные позиции возможны. В самом деле, верно ли, что задача имеет решение для *любой*

[1] От лат. invarians — неизменный. — *Прим. пер.*

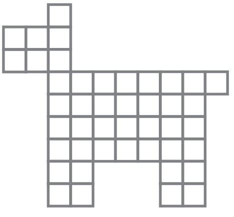
пары комнат разного цвета? Хотя ответ положителен, доказательство трудновато. Поэтому пока мы его пропустим.

Теперь, когда мы продемонстрировали полезность раскраски для решения задач, можно перейти к самостоятельной работе. Чтобы по-настоящему овладеть этим методом, школьники должны самостоятельно решить несколько задач.

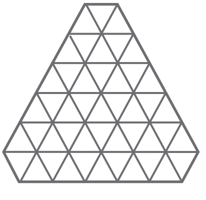
Для преподавателей. Пока школьники решают задачи урока, подходите к ним, проверяйте решения и при необходимости помогайте. Для всех этих задач раскраска является эффективным способом решения. Поэтому если кто-то собьётся в сторону проб и ошибок, то напомните о тех идеях, которые обсуждались в начале занятия. Закончите занятие обсуждением решений.

1.4. Задачи для решения в классе

Задача 1. Можно ли замостить доминошками эту собаку? (Доминошкой называется прямоугольник 2×1. «Замостить» означает накрыть полностью и без перекрытий.)

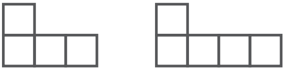


Задача 2. Можно ли разрезать эту шестиугольную фигуру на 23 одинаковые части? (Все разрезы должны идти по линиям сетки.)



Задача 3. Верблюд — это нестандартная шахматная фигура. Верблюд ходит как конь, но на одну клетку дальше. Иными словами,

если ход коня можно изобразить Г-образной фигурой 2×3, то ход верблюда — Г-образной фигурой 2×4.



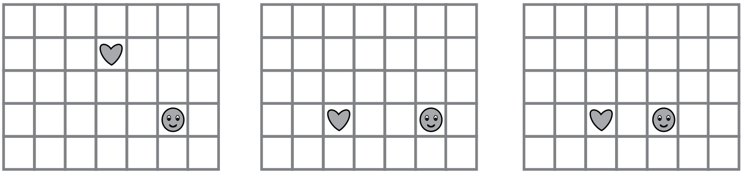
Конь Вебрлюд

Верблюд стоит в левом нижнем углу шахматной доски 8×8. Можете ли вы через несколько ходов попасть в правый нижний угол?

Задача 4. Летний замок леди Квадрат состоит из 35 комнат, расположенных в виде прямоугольника 7×5; в стене между любыми соседними комнатами есть дверь. Можно ли пройти по замку так, чтобы:

- начать в гостиной комнате леди Квадрат (отмечена улыбающимся лицом);
- пройти по всем комнатам ровно один раз;
- закончить свой путь в комнате, отмеченной сердечком.

Для каждой схемы либо начертите маршрут, либо докажите, что такой маршрут невозможен.



1.5. Несколько слов о наборах задач

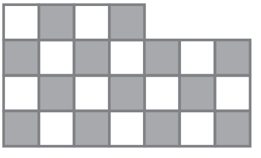
На каждом занятии кружка дети получают один или несколько наборов задач. Некоторые из этих наборов («задачи и упражнения для классной работы») предназначены для занятий в классе, чтобы помочь детям усвоить новые понятия и идеи. Другие, в среднем более сложные, предназначены для домашней работы. Если позволяет время, учащиеся могут начать работать над ними в классе. Нерешённые задачи будут домашними к следующему занятию.

Некоторые из этих задач могут оказаться сложными. Возможно, что не все ученики смогут справиться со всеми задачами. Однако даже попытка решить эти задания будет полезна.

Также мы не требуем, чтобы дети записывали решения подробно, так как некоторые из них могут быть довольно длинными. Достаточно указывать важные шаги, которые дают возможность воспроизвести решения в классе.

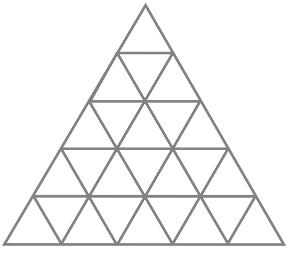
1.6. Подборка задач

Задача 1. Шахматная королева испекла пирог в виде шахматной доски 4×7. Король прокрался и съел кусочек размером 1×3. Королеве осталась часть пирога, изображённая на рисунке. Тем не менее она сумела разрезать пирог на три прямоугольных куска, из которых составила квадрат 5×5, и при этом шахматная раскраска сохранилась. Как она это сделала? (Все разрезы должны проходить по линиям сетки. Кусочки пирога можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)



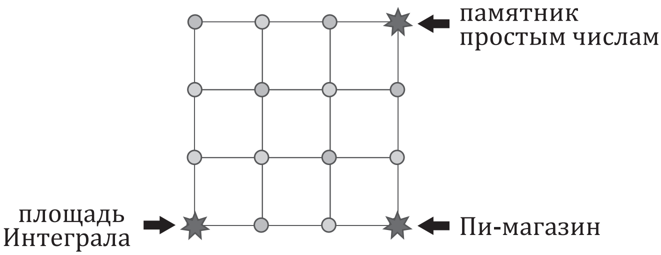
Задача 2. После успешного набега пираты Артур, Боря, Витя и Гриша разделили свою добычу в 70 золотых монет. Каждый пират получил хотя бы по одной монете. Артур получил больше всех. Боря и Витя вместе получили 45 монет. Какова доля Гриши?

Задача 3. В Треугольном замке (см. рисунок ниже) все комнаты треугольные, и в каждой из стен между ними есть дверь. Экскурсовод хочет пройти по замку, не заходя ни в одну комнату больше одного раза. Каково максимальное количество комнат, которое можно посетить при таком маршруте? (Маршрут может начинаться и заканчиваться в любых двух комнатах.)



Задача 4. Разность между двумя числами равна их полусумме. Каково отношение первого числа ко второму?

Задача 5. В районе Мат-Хэттен есть четыре улицы, идущие с запада на восток, и четыре авеню, идущие с севера на юг. На каждом перекрёстке есть небольшая площадь. По всем дорогам можно двигаться в обоих направлениях.



а) Можно ли пройти от площади Интеграла до Пи-магазина, посетив каждую площадь ровно один раз?

б) Можно ли пройти от площади Интеграла до памятника простым числам, посетив каждую площадь ровно один раз?

Для каждой части задачи либо начертите маршрут, либо объясните, почему он не существует.

Задача 6. Озорник Миша изменил две цифры в домашней задаче Маши, и теперь у неё получилось вот что:

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247.$$

Помогите Маше найти изменённые цифры и восстановить равенство.

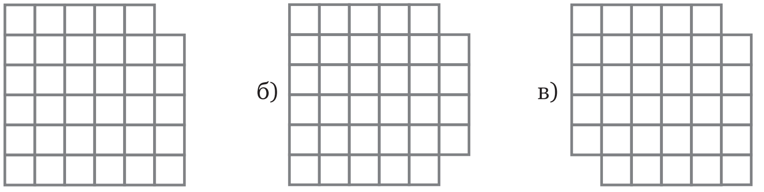
Задача 7. На склонах горы живут 10 радужных драконов; у каждого дракона свой цвет (красный, синий, жёлтый и т. д.). Известно, что если взять любых четырёх драконов, то два из них будут одного цвета. Докажите, что есть по крайней мере четыре дракона одного цвета.

Для преподавателей. Имейте в виду, что горизонтальная черта указывает на раздел с более сложными задачами. При работе с младшими школьниками эти задачи можно пропустить.

1.7. Дополнительные задачи

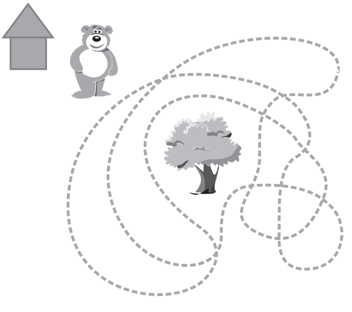
Задача 1. У вас есть доска 6×6. В п. а) отсутствует одна угловая клетка. В п. б) и в) отсутствуют по две угловые клетки. Какие из этих досок можно замостить доминошками? (Доминошкой называется прямоугольник 2×1. «Замостить» означает накрыть полностью и без перекрытий.)

а) б) в)



Задача 2. На каждой из 25 клеток доски 5×5 сидит по одному жуку. По свистку каждый из 25 жуков перемещается на любую из соседних клеток (т. е. клетку, примыкающую сверху, снизу, слева или справа). Докажите, что после этого хотя бы одна клетка останется пустой.

Задача 3. Медвежонок вышел из дома и обнаружил странные следы вокруг своего любимого дерева (см. рисунок). Он прошёлся несколько раз вокруг дерева, изучая следы и иногда перепрыгивая через них, чтобы было лучше видно. В конце он вернулся к своему дому. Мог ли Медвежонок перепрыгнуть через таинственные следы 7 раз? (Медвежонок не перепрыгивает следы в точке их пересечения.)



Задача 4. На столе лежит прямоугольная игральная карта рубашкой вверх. Вы можете переворачивать эту карту через одну из её сторон любое количество раз. Может ли в итоге карта оказаться на том же месте стола, но рубашкой вниз?