

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
М64

Мирошин, Владимир Васильевич.
М64 ЕГЭ 2021. Математика. Профильный уровень : тренировочные варианты : 30 вариантов / В. В. Мирошин. — Москва : Эксмо, 2020. — 232 с. — (ЕГЭ. Тренировочные варианты).

ISBN 978-5-04-112793-0

Издание предназначено для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Пособие включает:

- 30 тренировочных вариантов, соответствующих демоверсии;
- подробные решения нескольких вариантов;
- ответы ко всем заданиям.

Кроме того, приводятся общие решения для наиболее сложных задач.

Издание будет полезно учителям математики, так как дает возможность эффективно организовать учебный процесс и подготовку к экзамену.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-112793-0

© Мирошин В.В., 2020
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2020

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые старшеклассники!

Уважаемые учителя!

Данное пособие предназначено для подготовки к ЕГЭ и ДВИ (дополнительным вступительным испытаниям) по математике.

Сборник содержит тренировочные варианты работ для экзамена профильного уровня, составленные в соответствии с демонстрационным вариантом и спецификацией.

Так как вы избрали экзамен профильного уровня, то ваша цель — поступление в высшее учебное заведение, требующее хорошей математической подготовки. Авторы, обладая большим опытом работы в общеобразовательных учреждениях и подготовки к экзаменам, постарались сделать так, чтобы предложенные варианты не только готовили к ЕГЭ, но и оказывали посильную помощь в подготовке к дополнительным вступительным испытаниям по математике.

В пособии приведено 30 экзаменационных вариантов, из которых несколько имеют подробное решение. Кроме того, авторы старались сделать так, чтобы даже самые простые задания несли информацию, пригодную для подготовки к ЕГЭ. Так как вы планируете продолжать математическое образование, вам потребуется высокий балл для того, чтобы подтвердить хорошее знание математики и свою конкурентоспособность.

Поэтому мы позволили себе, сохраняя форму и тематику заданий, кое-где отступить от привычного содержания, сделав его более разнообразным, и условно разбили содержание на два блока по пять вариантов. И если первые среди каждых десяти вариантов приближены к ЕГЭ, то последние пять вариантов несут в заданиях идеи задач ДВИ (дополнительного вступительного испытания) по математике.

Конечно, ваша цель — последние задания, приносящие наибольшее количество баллов. Они снабжены критериями выставления оценок по приведённым решениям. Но это не значит, что задачи 13—19 не могут иметь других решений. Не забывайте про задачи первой части. Очень часто наиболее сильные участники экзамена, стремясь как можно скорее заняться сложными и интересными задачами второй части, допускают обидные ошибки в простых задачах первой части.

Кроме того, для преподавателей школ в пособии приводятся общие решения для некоторых задач, размещённые в приложении.

Желаем успеха!

ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Из пункта A со скоростью 15 км/час выехал велосипедист. Через 1 час следом за ним со скоростью 30 км/час выехал мотоциклист. Найдите время, через которое мотоциклист догонит велосипедиста. Ответ укажите в часах.

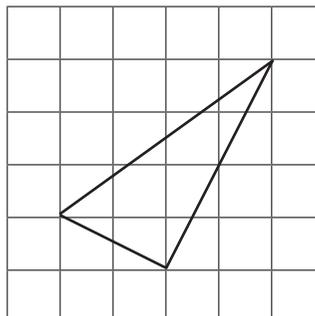
Ответ: _____ .

- 2 На диаграмме представлены результаты измерения температуры в Москве во второй декаде августа 2015 года. Используя приведённые данные, найдите среднюю температуру за данный период времени. Ответ укажите в градусах.



Ответ: _____ .

- 3 Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге, считая, что сторона клетки равна 1 см. Ответ укажите в см^2 .



Ответ: _____ .

4 На карточках выписаны двузначные числа. Найдите вероятность того, что на выбранной карточке окажется число, цифры которого различны.

Ответ: _____ .

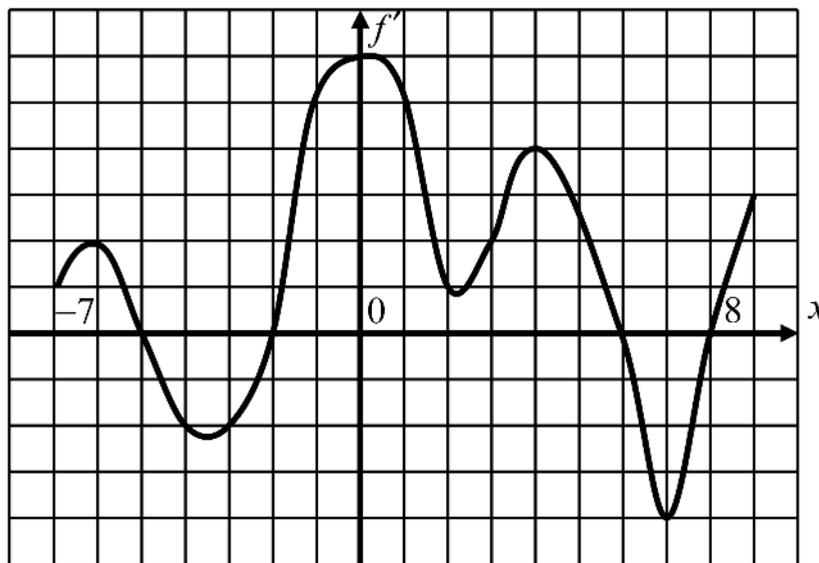
5 Решите уравнение $3^{\frac{x+2}{2x-1}} = 3^{\frac{7}{9}}$.

Ответ: _____ .

6 Хорда AB окружности делит её на две дуги, меры которых относятся как 5 : 7. Точка C расположена на большей дуге окружности. Чему равна мера угла ACB ? Ответ укажите в градусах.

Ответ: _____ .

7 На рисунке изображён график производной дифференцируемой функции $y = f(x)$. Найдите количество точек максимума функции, принадлежащих отрезку $[-7; 8]$.



Ответ: _____ .

8 Основанием призмы служит ромб, сторона которого равна 4, а острый угол равен 30° . Найдите объём призмы, если её высота равна 5.

Ответ: _____ .

Часть 2

9 Найдите значение $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: _____ .

- 10 При вычислении значения квадратного корня из числа, не являющегося полным квадратом, за неимением калькулятора или чего-либо подобного (например, на ЕГЭ по математике) для приближённого вычисления используют формулу:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \dots, -1 < x < 1.$$

Вычисление будет тем точнее, чем меньше число x . (Если исходное число большое, то его предварительно преобразуют в произведение квадрата числа, меньшего данного, на число, чуть большее или меньшее единицы.) Используя приведённую формулу, вычислите $\sqrt{5}$ с точностью до сотых.

Ответ: _____ .

- 11 Двое рабочих выполнили некоторую работу за 11 дней, причём последние три дня работал только первый рабочий. Известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80% работы. За сколько дней первый рабочий может выполнить всю работу, работая самостоятельно?

Ответ: _____ .

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (x-1) \cdot e^{2x}$.

Ответ: _____ .

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 Решите уравнение $\log_{\operatorname{ctg} x} (3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0$. Укажите решения уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

- 14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 2\sqrt{3}$, боковое ребро $SA = 4$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины основания и середины боковых рёбер.

- 15 Решите неравенство $(x^2 + x + 1)^{x^2 - 5x + 6} > (x + 2)^{x^2 - 5x + 6}$.

- 16 В треугольнике ABC AD — медиана, точка E лежит на медиане AD и делит AD пополам. Точка F лежит на отрезке BE и делит его пополам. Отрезок CF пересекает отрезок AD в точке G . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника FEG .

- 17 Заёмщиком была взята на 3 года в банке сумма, равная 641 000 рублей, под 10% годовых с условием, что вторая выплата будет вдвое больше первой, а третья — втрое больше первой, и выплаты производятся после начисления процентов на остаток займа. Какова была сумма первой выплаты?

18 Найдите все значения параметра, при каждом из которых прямая, заданная уравнением $y = ax$, делит пополам периметр и площадь фигуры, заданной неравенством $|y - 3x + 11| + |y + x - 9| \leq 8$.

- 19**
- а) Можно ли число 2016 разложить в сумму нескольких последовательных натуральных чисел? Если да, то приведите пример такой последовательности.
 - б) Укажите число таких последовательностей.
 - в) Укажите наименьшую длину последовательности.
 - г) Укажите наибольшую длину последовательности.

ВАРИАНТ 2

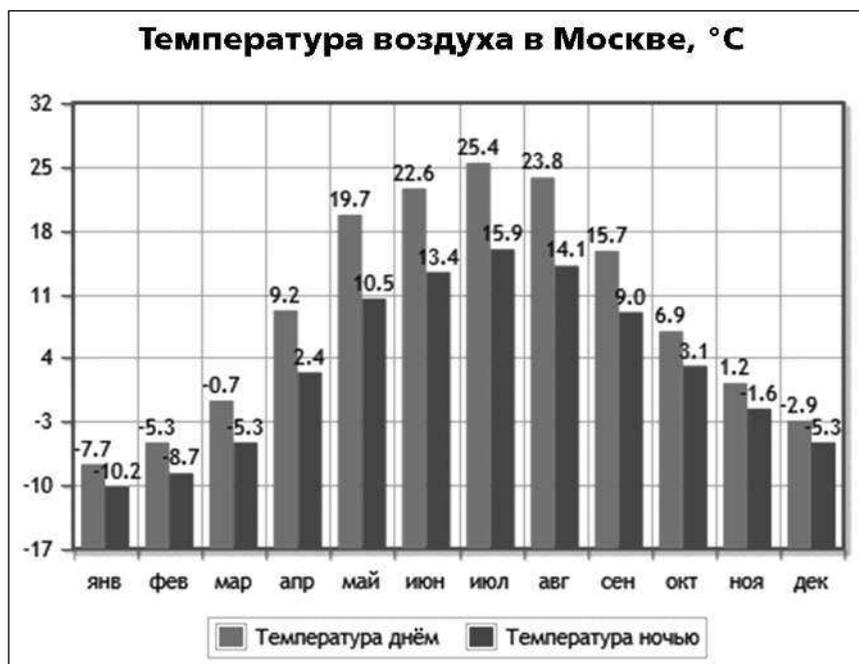
Часть 1

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Поезд проезжает расстояние от Москвы до Нижнего Новгорода за 6 часов 55 минут, а самолёт, вылетая из Москвы, приземляется в Нижнем Новгороде через 1 час 10 минут. На сколько часов меньше находится в пути самолёт? Ответ укажите в часах.

О т в е т : _____ .

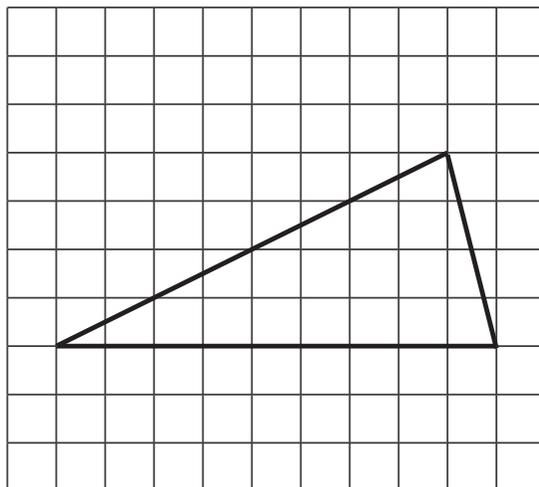
- 2 На диаграмме представлены среднемесячные температуры воздуха в Москве за прошедший календарный год.



Используя диаграмму и представленные на ней данные, найдите разность между самой высокой среднемесячной температурой и самой низкой среднемесячной температурой в дневное время. Ответ укажите в градусах.

О т в е т : _____ .

3 Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге, считая, что сторона клетки равна 1 см. Ответ укажите в см².



Ответ: _____ .

4 Из последовательных натуральных чисел от 1 до 200 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что наудачу выбранное число оканчивается на 7?

Ответ: _____ .

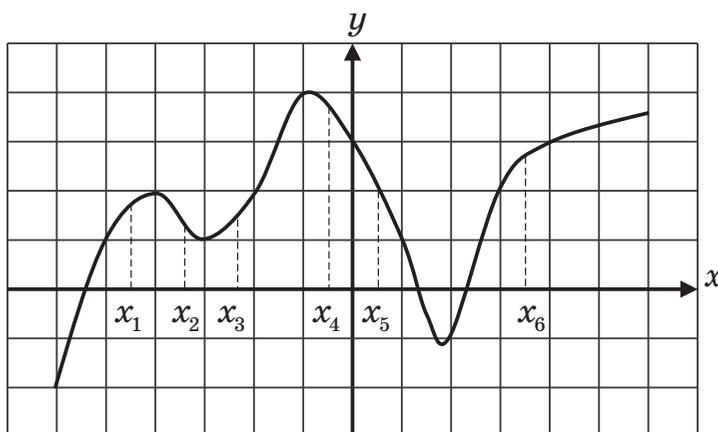
5 Найдите корень уравнения $(0,5)^{5x} = 8^3$. Если корней уравнения несколько, в ответе укажите их сумму.

Ответ: _____ .

6 Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 48° . Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ укажите в градусах.

Ответ: _____ .

7 На рисунке приведён график дифференцируемой функции $f(x)$.



На графике функции выбраны 6 точек с абсциссами $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Используя график функции $f(x)$, укажите количество точек с указанными абсциссами, в которых производная функции положительна.

Ответ: _____ .

8 Найдите объём куба, площадь полной поверхности которого равна 150 см^2 .

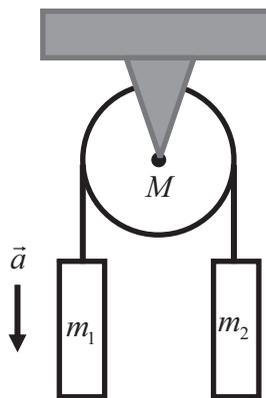
Ответ: _____ .

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\cos(3\pi - 2\alpha)$, если $\cos\alpha = -\sqrt{0,8}$.

Ответ: _____ .

10 Два груза массой $m_1 = 15 \text{ кг}$ и m_2 ($m_1 > m_2$) соединены между собой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. Если при этом масса блока $M = 3 \text{ кг}$ сосредоточена в его ободе, то ускорение, с которым движутся грузы, можно вычислить по формуле $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} \cdot g$, в которой $g = 10 \text{ м/сек}^2$ — ускорение свободного падения. Найдите массу меньшего груза m_2 , если грузы движутся с ускорением $a = 5 \text{ м/сек}^2$.



Ответ: _____ .

11 Первый рабочий может выполнить работу за 8 дней, а второй рабочий может выполнить ту же работу за 12 дней. За сколько дней рабочие выполнят её совместно?

Ответ: _____ .

12 Найдите точку максимума функции $y = \ln \frac{x+2}{x^2+5}$.

Ответ: _____ .

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(\cos 3x + \cos x)^2 + (\sin 3x + \sin x)^2 = 3$.

б) Найдите решения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

14 Сфера касается рёбер BS , CS , CA , AB пирамиды $SABC$ в точках K , L , M , N соответственно.

а) Докажите, что точки K , L , M , N лежат в одной плоскости.

б) Найдите LN , если $KL = 8$, $LM = 8$, $MN = 6$, $NK = 4$.

15 Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^x - 1}{3^x - 1} + \frac{2 \cdot 3^x - 6}{3^x - 3} \leq 3^x + 1$.

16 Биссектриса CL угла C треугольника ABC делит пополам угол между медианой CM и высотой CH , проведёнными из той же вершины.

1) Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

2) Найдите углы треугольника ABC , если $\frac{HL}{LM} = \frac{1}{2}$.

17 Между городами A и B летают самолёты трёх типов, для которых возможности перевоза пассажиров и грузовых контейнеров представлены в таблице:

	I тип	II тип	III тип
Максимальное количество перевозимых пассажиров	230	110	40
Максимальное количество перевозимых контейнеров	27	12	5

По условиям контракта должны быть перевезены 760 пассажиров и 88 грузовых контейнеров. Найдите, какое наименьшее количество самолётов потребуется.

18 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{x^3 - a}{12} = \sqrt[3]{12x + a}$ имеет ровно два различных решения.

19 Дано уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{75}$.

1) Докажите, что уравнение имеет решение в целых числах.

2) Докажите, что уравнение имеет решение в натуральных числах.

3) Сколько целочисленных решений имеет уравнение?

ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом к заданиям 1—12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Поезд Москва — Брянск выезжает из Москвы 8 декабря в 19 часов 57 минут, а прибывает в Брянск в 1 час 32 минуты 9 декабря. Сколько минут находится в пути поезд?

Ответ: _____ .

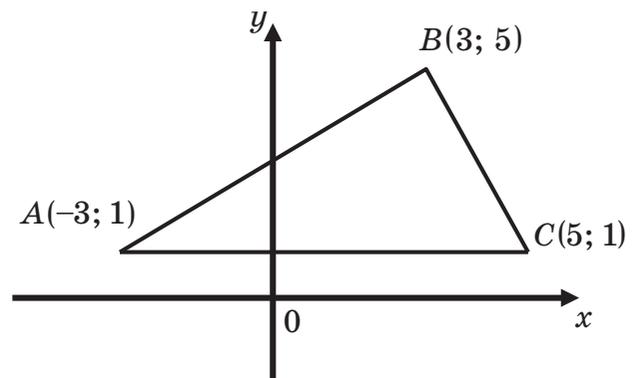
- 2 На графике представлены среднемесячные температуры воды в Чёрном море.



Используя график, укажите количество месяцев, в которых средняя температура воды была выше, чем $T = \frac{t_{\max} + t_{\min}}{2}$, где t_{\max} , t_{\min} — соответственно наибольшая и наименьшая среднемесячные температуры.

Ответ: _____ .

- 3 Найдите площадь фигуры, изображённой на координатной плоскости.



Ответ: _____ .

4 В урне 10 шаров: 2 красных, 3 синих и 5 белых. Из урны случайным образом достаётся один шар. Найдите вероятность того, что будет извлечён цветной, т. е. не белый шар.

Ответ: _____ .

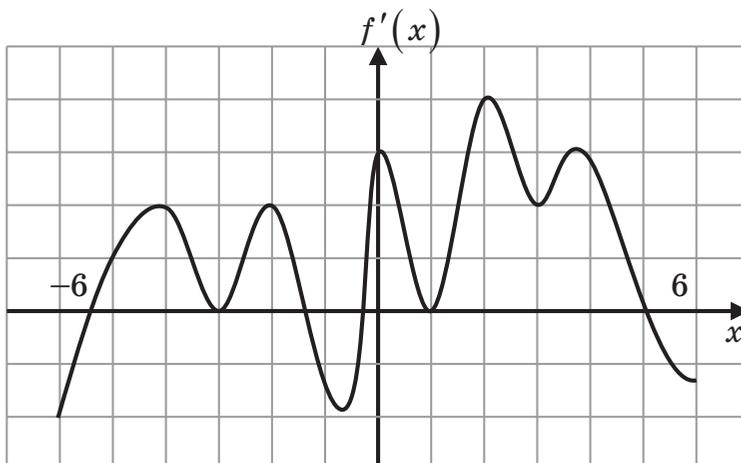
5 Найдите корень уравнения $\log_3(5x + 1) = 2$. Если корней уравнения несколько, в ответе укажите их сумму.

Ответ: _____ .

6 Точки A, B, C, D , расположенные на окружности, делят её четыре дуги AB, BC, CD, DA , меры которых относятся как $3 : 2 : 13 : 7$. Хорды AC и BD пересекаются в точке O . Найдите меру $\angle AOB$. Ответ укажите в градусах.

Ответ: _____ .

7 На рисунке приведён график производной дифференцируемой функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-6; 6]$.



Используя график производной, найдите количество точек максимума функции на отрезке $[-6; 6]$.

Ответ: _____ .

8 Площадь поверхности шара равна 43. Найдите площадь поверхности второго шара, объём которого в 27 раз больше объёма данного шара.

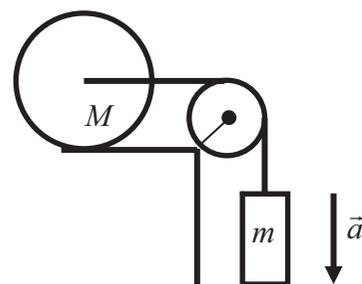
Ответ: _____ .

Часть 2

9 Найдите значение выражения $13\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3}$.

Ответ: _____ .

- 10 По горизонтальной поверхности под действием груза массой m катится без проскальзывания колесо радиуса R , вся масса которого M сосредоточена в его ободе. Если пренебречь массой нити и блока и трением на оси блока и между блоком и нитью, то сила натяжения нити определяется по формуле $T = \frac{2Mmg}{2M+m}$, в которой $g = 10 \text{ м/сек}^2$ — ускорение свободного падения. Найдите массу груза, если масса кольца $M = 2 \text{ кг}$, а сила натяжения нити $T = 30 \text{ н}$.



О т в е т : _____ .

- 11 Катер проходит расстояние от пункта A до пункта B , расположенных на берегу реки, за 6 дней, а расстояние от пункта B до пункта A — за 8 дней. Одновременно с катером из пункта A отплывает плот. Катер, достигнув пункта B , сразу поворачивает обратно и, двигаясь в пункт A , встречает плот. Какую часть пути от пункта B до пункта A прошёл катер до встречи с ним?

О т в е т : _____ .

- 12 Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, определённой на промежутке $[0; +\infty)$, если производная функции имеет вид: $f'(x) = (x^2 - 4x + 3)(\ln x)$.

О т в е т : _____ .

Для записи решений и ответов на задания 13—19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\cos^2 3x + \cos^2 5x = \cos^2 3x \cdot \cos^2 5x$.

б) Найдите решения уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 5\pi\right]$.

- 14 Четырёхугольная пирамида $SABCD$, основанием которой является прямоугольник $ABCD$, вписана в сферу. Известно, что $\angle SAC = \angle SBC = \angle SDC$.

- а) Докажите, что центр сферы принадлежит ребру SC пирамиды.
б) Найдите радиус сферы, если $SA = 4$, $SB = 8$, $SD = 7$.

- 15 Решите неравенство $\log_2(x^2 - 5x + 6) \leq \frac{1}{\log_{x-2} 2\sqrt{2}} + \frac{1}{\log_{x-3} 2} + 1$.

- 16 В треугольнике ABC H — точка пересечения высот треугольника, O — центр окружности, описанной около треугольника.

- а) Докажите, что отрезки длиной $a = AB$, $b = CH$ и $c = 2CO$ могут являться сторонами прямоугольного треугольника.
б) Найдите AB , если радиус окружности, описанной около треугольника, равен 10, а $CH = 12$.

17 Мальчики двух одиннадцатых классов к празднику 8 марта покупали девочкам цветы. Если каждой девочке первого класса подарить 3 цветка, а каждой девочке второго класса подарить 5 цветков, то потребуется больше 60 цветков. Если каждой девочке первого класса подарить 5 цветков, а каждой девочке второго класса 3 цветка, то потребуется меньше 60 цветков. Найдите число девочек, обучающихся в 11-х классах, если числа девочек в классах отличаются не больше чем на один.

18 Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x = \sqrt[3]{a\sqrt[3]{ax+2}+2}$ имеет ровно два различных решения.

19 Числа от 1 до 100 расположены в таблице.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
...	...								
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- а) Докажите, что суммы чисел, стоящих на диагоналях, идущих из верхнего левого угла в правый нижний угол и из верхнего правого угла таблицы в левый нижний угол таблицы, равны.
- б) Произвольное число таблицы выписывается, после чего из таблицы вычёркиваются строка и столбец, содержащий это число. Затем из оставшихся чисел выбирается второе число, после чего вычёркивается строка и столбец, его содержащий. Так проделывается 10 раз. Найдите сумму выписанных чисел.
- в) Докажите, что сумма выписанных чисел не зависит от способа выбора этих чисел.