# Предисловие

Настоящее пособие предназначено тем учителям математики, которые в своей практической работе опираются на УМК, созданный авторским коллективом под руководством А. Г. Мордковича:

- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева*. Алгебра. 8 класс. **Учебник** для общеобразовательных организаций;
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова*. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы. **Примерные рабочие программы;**
- *А. Г. Мордкович, П. В. Семенов*. Алгебра. 8 класс. **Методическое пособие для учителя;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра. 8 класс. **Контрольные работы;**
- *М. В. Шуркова*. Алгебра. 8 класс. **Рабочая тетрадь.**

В первом разделе пособия представлено примерное тематическое планирование материала в 8-м классе; второй раздел посвящен методическим рекомендациям ко всем главам учебника «Алгебра. 8 класс». В третьей части рассмотрены решения некоторых упражнений повышенной сложности и дополнительных упражнений.

# Примерное тематическое планирование

## 8 класс

*(из расчета 3 ч в неделю, всего 102 ч)*

| Параграф | Тема | Кол-во часов |
|---|---|---|
| | **Глава 1. Множество действительных чисел (16 ч)** | |
| 1 | Множества, их элементы и подмножества | 1 |
| 2 | Операции над множествами | 2 |
| 3 | Рациональные числа | 1 |
| 4 | Познакомимся с квадратными корнями | 2 |
| 5 | Иррациональные числа | 1 |
| 6 | Действительные числа и числовая прямая | 1 |
| 7 | Свойства числовых неравенств | 2 |
| 8 | Линейные неравенства | 2 |
| 9 | Модуль действительного числа. Функция $y = \|x\|$ | 2 |
| 10 | Приближенные значения действительных чисел | 1 |
| | *Контрольная работа № 1* | 1 |
| | **Глава 2. Алгебраические дроби (17 ч)** | |
| 11 | Определение алгебраической дроби | 1 |
| 12 | Основное свойство алгебраической дроби | 2 |
| 13 | Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями | 1 |
| 14 | Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями | 3 |
| | *Контрольная работа № 2* | 1 |
| 15 | Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень | 2 |
| 16 | Преобразование рациональных выражений | 3 |
| 17 | Понятие степени с любым целочисленным показателем | 2 |

*Продолжение таблицы*

| Параграф | Тема | Кол-во часов |
|---|---|---|
| 18 | Стандартный вид положительного числа | 1 |
| | *Контрольная работа № 3* | 1 |
| **Глава 3. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратных корней (12 ч)** | | |
| 19 | Функция $y = \sqrt{x}$, ее график и свойства | 2 |
| 20 | Свойства квадратных корней | 2 |
| 21 | Тождество $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ | 1 |
| 22 | Вынесение множителя из-под знака квадратного корня. Внесение множителя под знак квадратного корня | 2 |
| 23 | Преобразование иррациональных выражений | 4 |
| | *Контрольная работа № 4* | 1 |
| **Глава 4. Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$ (15 ч)** | | |
| 24 | Функция $y = kx^2$, $k > 0$ | 2 |
| 25 | Функция $y = kx^2$, $k < 0$ | 1 |
| 26 | Как построить график функции $y = f(x + l)$, если известен график функции $y = f(x)$ | 2 |
| 27 | Как построить график функции $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$ | 1 |
| 28 | Как построить график функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$ | 2 |
| 29 | Функция $y = ax^2 + bx + c$ | 3 |
| 30 | Функция $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$ | 2 |
| 31 | Функция $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$ | 1 |
| | *Контрольная работа № 5* | 1 |
| **Глава 5. Квадратные уравнения (19 ч)** | | |
| 32 | Основные понятия, связанные с квадратными уравнениями | 2 |
| 33 | Формула корней квадратных уравнений | 3 |

*Окончание таблицы*

| Параграф | Тема | Кол-во часов |
|---|---|---|
| 34 | Частный случай формулы корней квадратных уравнений | 1 |
| 35* | Квадратные уравнения с параметром | 2 |
| | *Контрольная работа № 6* | 1 |
| 36 | Рациональные уравнения | 2 |
| 37 | Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций | 3 |
| 38 | Теорема Виета | 2 |
| 39 | Разложение квадратного трехчлена на линейные множители | 2 |
| | *Контрольная работа № 7* | 1 |
| **Глава 6. Вероятности случайных событий (13 ч)** | | |
| 40 | Испытания с равновозможными исходами | 3 |
| 41 | Случайные события. Вероятность противоположного события | 3 |
| 42 | Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий | 3 |
| 43 | Испытания с конечным числом исходов. Последовательные независимые испытания и повторения испытаний | 3 |
| | *Контрольная работа № 8* | 1 |
| | **Итоговое повторение** | 10 |

# Методические рекомендации по работе с учебником «Алгебра. 8 класс»

## Глава 1. Множество действительных чисел

Глава 1 начинается с параграфа, который называется «Множества, их элементы и подмножества». Ясно, что никакая теория множеств здесь не рассматривается. Основной акцент делается на тех понятиях, которые непосредственно нужны для курса алгебры, для записи ответов при решении различных уравнений и неравенств. Поэтому отрабатываются в первую очередь понятие принадлежности элемента множеству, способы перечисления элементов множества, разные способы описания множеств. В следующем параграфе речь идет об объединении и пересечении множеств.

Основной результат § 3 «Рациональные числа»: рациональные числа и бесконечные десятичные периодические дроби — одно и то же. Сделаем несколько замечаний по поводу того приема обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную, который показан в учебнике (см. пример на с. 22 в § 3).

**1.** Учитель должен понимать, что в этой процедуре есть скользкий (с формально-математической точки зрения) момент: ниоткуда не следует, что при умножении *бесконечной* десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д. запятая передвигается вправо соответственно на один, два, три знака и т. д.; этот вывод был получен в курсе математики 5—6-го классов лишь для *конечных* десятичных дробей. Сказать об этом школьникам или нет — дело учителя. Прийти к указанному выводу можно на примерах: скажем, дополнить некоторыми рассуждениями пример, рассмотренный в § 3 на с. 20. Его результат $\frac{11}{6} = 1{,}83333...$ . Выполнив деление углом для дроби $\frac{110}{6}$, т. е. $\frac{55}{3}$, получим 18,3333...; выполнив деление углом для дроби $\frac{11\,000}{6}$, получим 1833,3333... . Отмечаем, что в первом случае запятая сдвигается на один знак вправо, а во втором — на три знака.

**2.** Не всегда различные по записи бесконечные периодические десятичные дроби приводят к разным обыкновенным дробям. Это относится к дробям с девяткой в периоде. Например, для дроби 1,2(9) имеем:

$$x = 1{,}2999...;\ 10x = 12{,}999...;$$
$$100x = 129{,}999...;\ 90x = 129 - 12 = 117;$$
$$x = \frac{117}{90} = 1{,}3 = 1{,}3000... .$$

Итак, 1,2(9) = 1,3(0). Аналогично можно показать, что 2,35(9) = 2,36(0); 3,(9) = 4,(0) и т. д. Короче говоря, дробь с девяткой в периоде — это конечная десятичная дробь (или бесконечная с нулем в периоде); для ее записи достаточно отбросить всю периодическую часть бесконечной дроби, увеличив при этом на единицу цифру, предшествующую периодической части.

**3.** Известен формально более корректный способ обращения бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь: с помощью формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$. Например, для дроби 1,5(23) соответствующие вычисления выглядят следующим образом:

$$1{,}5(23) = 1{,}5 + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100\,000} + \frac{23}{100\,000\,000} + ... =$$
$$= 1{,}5 + \frac{23}{1000} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{3}{2} + \frac{23}{990} = \frac{754}{495}$$

(результат, естественно, тот же, что получен в примере из § 3).

Определенные трудности могут возникнуть у учащихся при изучении **§ 4**, где не только вводится новый термин (квадратный корень), новое обозначение, но и имеется несколько достаточно серьезных моментов методологического плана. Это и первый пример доказательства методом от противного, это и технически трудное для соответствующего возраста доказательство иррациональности числа $\sqrt{5}$

(сам термин «иррациональное число» пока не вводится, это будет сделано в следующем параграфе). Вероятно, в большинстве случаев требовать от учащихся самостоятельного проведения доказательств иррациональности таких чисел, как $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$, не следует, но показать им серьезное математическое рассуждение полезно.

В конце **§ 4** с опережением учащимся сообщаются формулы корней квадратного уравнения. Дело в том, что в геометрии раньше, чем в алгебре, начинают применять теорему Пифагора. Конечно, у учащихся в активе есть приемы решения квадратных уравнений, известные им еще из курса алгебры 7-го класса (графические приемы, разложение на множители), и в принципе этим и можно было бы пока ограничиться. Однако хотелось бы побыстрее сообщить им практическое значение нового понятия — квадратного корня, т. е. усилить мотивационный фон изучения нового материала.

В учебнике понятие арифметического корня упомянуто лишь вскользь, поскольку для квадратных корней оно, по сути дела, лишено смысла: в курсе алгебры 7—9-го классов нет «неарифметического» квадратного корня. Всюду в дальнейшем мы говорим просто «квадратный корень», а не «арифметический квадратный корень». Не следует перегружать учащихся терминами, тем более если они не работают.

Изучая **§ 5** («Иррациональные числа»), обращаем внимание учащихся на общий вывод: если $n$ — натуральное число, то $\sqrt{n}$ либо натуральное, либо иррациональное число. Этот вывод послужит им источником придумывания иррациональных чисел.

Разговор в **§ 6** о свойствах арифметических операций, об отношении порядка ($<$, $>$) — не повторение старого, ведь до сих пор все это применялось лишь по отношению к рациональным числам; теперь же перешли в более широкую числовую область: мы имеем дело с действительными числами.

Очень емким по количеству информации является **§ 9**: определение, свойства, геометрический смысл модуля действительного числа, уравнения типа $|x - a| = b$, решение которых основано на геометрическом смысле выражения $|x - a|$, график функции $y = |x|$.

В учебнике функция $y = |x|$ рассматривается как существенный элемент в ряду основных школьных функций. Поэтому в системе упражнений в соответствующем параграфе предусмотрена работа по традиционным для нашей концепции изучения функций направлениям (*инвариантное ядро*), о которых мы говорили в методическом пособии для 7-го класса. Напомним, что в наших учебниках для 7—11-го классов такое ядро, инвариантное относительно класса функций, состоит из шести направлений (компонентов):

- графическое решение уравнений (неравенств);
- отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке;
- преобразование графиков;
- функциональная символика;
- кусочно-заданные функции;
- чтение графика.

## Глава 2. Алгебраические дроби

В главе 2, где изучаются алгебраические дроби, содержится достаточно традиционный с методической точки зрения материал. Обратим внимание лишь на последние два параграфа главы: мы сочли целесообразным именно здесь ввести понятие степени с любым целочисленным показателем и присовокупить к этому разговор о стандартном виде положительного числа, что имеет практическое значение.

## Глава 3. Функция $y = \sqrt{x}$. Свойства квадратных корней

Напомним, что линия, связанная с изучением функций, в нашем курсе приоритетная — об этом мы подробно говорили в методическом пособии для 7-го класса. Изучение квадратичной функции (глава 4) предшествует изучению квадратных уравнений (им посвящена глава 5). Точно так же будет обстоять дело и во всех других случаях, например, изучение тригонометрии в 10-м классе будет начинаться с тригонометрических функций, а тригонометрические формулы появятся позднее. Та же методическая линия обнаруживается и в главе 3: изучению свойств квадратных корней предшествует изучение функции $y = \sqrt{x}$.

В **§ 20** при работе с квадратными корнями действует договоренность: все переменные принимают только неотрицательные значения. Мы посчитали нецелесообразным сразу вводить формулу $\sqrt{a^2} = |a|$: пусть школьники сначала научатся вычислять квадратные корни, привыкнут к их свойствам. Упомянутая же, трудно усваиваемая учащимися формула появится в следующем параграфе.

## Глава 4. Квадратичная функция. Функция $y = \dfrac{k}{x}$

Эта глава является непосредственным продолжением и развитием тем «Линейная функция», «Функция $y = x^2$», «Функция $y = \sqrt{x}$». Построение графиков функций $y = kx^2$, $y = ax^2 + bx + c$ особых методических комментариев не требует, мы на этом здесь не останавливаемся; поговорим лишь о том, что принципиально отличает наш учебник от других в изложении указанного материала.

В **§ 24** введено нетрадиционное для общеобразовательной школы понятие ограниченности функции (снизу, сверху). Это сделано не ради самого понятия ограниченности (по большому счету в школе без него можно обойтись), а скорее по причинам психолого-педагогического характера. Чем больше свойств функций знает ученик (хотя бы на наглядно-интуитивном уровне), тем любопытнее для него процесс чтения графика, процесс перевода графической модели на обычный язык. Образно выражаясь, при изучении математики имеется то, что можно назвать «черным хлебом», и то, что можно назвать «пирожными». «Черный хлеб» — это то, без чего нельзя обойтись (область определения, область значений функции, четность, монотонность и иные традиционные «школьные» свойства функций). Без «пирожных» (ограниченность, выпуклость и различные «изюминки» в других разделах школьного курса алгебры) обойтись можно, но они украшают повседневную рутинную реальность. Ограниченность, выпуклость, непрерывность функции введены для развития речи, для поддержания интереса к математике, для создания приятного эмоционального фона при ее изучении. Однако существует и более существенная причина появления в нашем курсе понятия ограниченной функции.

Уровень трудности восприятия того или иного математического понятия часто зависит, говоря языком математики, от числа «навешанных» кванторов, явно или неявно фигурирующих в определении понятия (без кванторов нет практически ни одного математического определения). Речь идет о кванторе существования $\exists$ и кванторе общности $\forall$. Так, в определении четной или нечетной функции присутствует лишь один квантор: функция $y = f(x)$ называется четной, если $(\forall\, x \in D(f))\ f(-x) = f(x)$; функция называется нечетной, если $(\forall\, x \in D(f))\ f(-x) = -f(x)$. Это, так сказать, «одноканторное» определение, определение первого уровня трудности, с ним особых проблем у учащихся не возникает. В традиционной программе школьного курса алгебры имеются три свойства функций, связанные с двумя кванторами: периодичность, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения. Как правило, все они без всякой предварительной подготовки вводятся в курсе алгебры и начал математического анализа (10—11-й классы), причем первым появляется наиболее трудное — определение периодичности. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если *существует* такое отличное от нуля число $T$, что *для всех* $x$ из области определения функции выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. В кванторах:

$$(\exists\, T \neq 0)(\forall\, x \in D(f))\ f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Чуть проще (хотя бы потому, что имеет понятную геометрическую иллюстрацию) выглядит двухкванторное определение наибольшего или наименьшего значений функции на промежутке $X$: $(\exists\, x_0 \in X)(\forall\, x \in X)\ \ f(x_0) \geqslant f(x)$ (здесь $f(x_0) = y_{\text{наиб}}$). Понятия наибольшего и наименьшего значений функции используются в нашем курсе начиная с 7-го класса: учащиеся, сами того не подозревая, постепенно приучаются к восприятию двухкванторных (а значит, достаточно сложных) определений математических понятий (опираясь на геометрическую наглядность).

Примерно так же обстоит дело с ограниченностью функции: функция ограничена снизу (сверху), если *весь* ее график расположен выше (ниже) *некоторой* горизонтальной прямой $y = m$; курсивом дано то, что связано с кванторами. Формальное определение функции, ограниченной, например, снизу, выглядит так: $(\exists\ m \in \boldsymbol{R})(\forall\ x \in D(f))\ f(x) > m$. Таким образом, в нашем курсе определение ограниченности функции, кроме информационной значимости, имеет и существенную логико-методическую окраску (осознание учащимися структуры математических определений), т. е. имеет воспитательную ценность.

В **§ 28** приведены два алгоритма построения графика функции $y = f(x + l) + m$, если известен график функции $y = f(x)$.

### *Первый алгоритм построения графика функции $y = f(x + l) + m$*

**1.** Построить график функции $y = f(x)$.
**2.** Осуществить параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси $Ox$ на $|l|$ единиц масштаба влево, если $l > 0$, и вправо, если $l < 0$.
**3.** Осуществить параллельный перенос полученного на втором шаге графика вдоль оси $Oy$ на $|m|$ единиц масштаба вверх, если $m > 0$, и вниз, если $m < 0$.

### *Второй алгоритм построения графика функции $y = f(x + l) + m$*

**1.** Перейти к вспомогательной системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -l$, $y = m$, т. е. выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l;\ m)$.
**2.** К новой системе координат «привязать» график функции $y = f(x)$.

Более удачным, на наш взгляд, является второй алгоритм, но это не означает, что все ученики должны применять его на практике; пусть некоторые пользуются первым алгоритмом. Более того, если и первый алгоритм вызывает затруднения (в основном из-за наличия в нем символов $|l|$ и $|m|$), то есть смысл заменить первый алгоритм совокупностью двух правил, выделенных в § 26 и § 27.

В **§ 29**, где речь идет о построении графика квадратичной функции, делается акцент не на отыскании координат вершины параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, а на отыскании уравнения оси симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$. Во-первых, построение оси параболы само по себе значимо с геометрической точки зрения: наличие оси параболы дает учащемуся возможность найти одну-две пары симметричных относительно оси точек параболы, которые используются как контрольные точки для более точного изображения эскиза графика. Во-вторых, зная уравнение оси $x = x_0$, ученик сможет найти ординату вершины параболы по формуле $y_0 = f(x_0)$, более важной, на наш взгляд, для понимания сути дела, чем требующая специального запоминания формула $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

В последних двух параграфах главы 4 речь идет о функции $y = \frac{k}{x}$ (в одном параграфе для случая $k > 0$, в другом — для случая $k < 0$). Эта функция обладает специфическими свойствами, требующими особого осмысления, — наличие асимптот, наличие двух ветвей, наличие центра симметрии и двух осей симметрии.

## Глава 5. Квадратные уравнения

Предполагается, что к началу систематического изучения этой главы учащиеся уже имеют представление о том, что такое квадратное уравнение (этот термин был введен в учебнике для 7-го класса), имеют представление о графическом методе их решения, который в простейших случаях применялся уже в 7-м классе, в более сложных случаях — в теме «Квадратичная функция» (см. пример 4 в § 29). Далее, учащимся знаком метод разложения на множители, который в ряде случаев также дает возможность решить квадратное уравнение (о чем не раз шла речь в курсе алгебры 7-го класса). С этого «смотра достижений» естественно начать **§ 33**. Самое главное — осознать вместе с учащимися проблемную ситуацию, связанную с решением квадратных уравнений. Для этого надо выявить недостатки метода разложения на множители и графического метода.

Метод разложения на множители применим не всегда, а графический метод в большинстве случаев может дать представление лишь о приближенных значениях корней. Таким образом, появляется необходимость найти алгоритм решения квадратных уравнений, не зависящий от эвристик метода разложения на множители и от ненадежности, приблизительности графического метода. После этого учащимся и будет сообщена (и обоснована) формула корней квадратного уравнения, которую они при правильной подаче материала воспримут как «подарок судьбы».

В **§ 33** выводится общая формула корней квадратного уравнения, а в **§ 34** выводится упрощенная формула корней квадратного уравнения (для случая четного коэффициента при $x$). Почему в учебнике общая и частная формулы разведены по разным параграфам? Опыт показывает, что если эти формулы дать одновременно, то учащиеся, как правило, вторую формулу игнорируют, они не хотят запоминать две формулы, понимая, что в принципе всегда можно обойтись одной (общей формулой), к которой еще нужно привыкать. Поэтому мы и даем им возможность сначала привыкнуть к общей формуле корней квадратного уравнения. Если они накопят достаточный опыт в работе с общей формулой, то смогут оценить те преимущества, которые дают им возможность использовать «четную» формулу (для чего, кстати, в § 34 в качестве примера фигурирует уравнение, решенное в предыдущем параграфе по общей формуле). Таким образом, частная формула не навязывается школьникам, а рекомендуется им как более «интеллигентная».

Обратим внимание на **§ 35**, где рассматриваются квадратные уравнения с параметром. Такие уравнения (а в 9-м классе и неравенства с параметром) естественным образом вплетаются в общую ткань изложения в учебнике и имеются в системе упражнений, начиная с 7-го класса, но достаточно мягко и ненавязчиво. Учащиеся не должны воспринимать задачи с параметрами как нечто «чересчур страшное».

**§ 36** посвящен решению рациональных уравнений. В конце этого параграфа осуществлено первое в нашем курсе достаточно робкое вхождение в теорию равносильности уравнений. Пусть школьники постепенно привыкают к двум случаям возможного появления посторонних корней: когда в уравнении содержатся алгебраические дроби или когда применяется метод возведения в квадрат обеих частей уравнения. Пусть они постепенно начнут понимать, в каких случаях нужно делать проверку найденных корней, начнут осознавать, что принципиальная проверка корней — необходимый этап решения уравнения (в двух упомянутых случаях). Что же касается технической проверки (т. е. столь любимой многими учителями проверки правильности вычислений и преобразований), то в нашем курсе она не приветствуется, поскольку, по сути дела, является бессмысленной.

На наш взгляд, восьмиклассники должны иметь представление о том, что при решении уравнений выполняют разные преобразования: член уравнения переносят из одной части уравнения в другую с противоположным знаком; обе части уравнения умножают или делят на одно и то же отличное от нуля число; освобождаются от знаменателя, т. е. заменяют уравнение $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ уравнением $p(x) = 0$; обе части уравнения возводят в квадрат. Учащиеся должны обратить внимание на то, что первые два из указанных выше преобразований оставляют корни уравнения в целости и сохранности (равносильные преобразования), а в результате двух других преобразований могут появиться посторонние корни (неравносильные преобразования), поэтому все найденные корни надо проверять.

О важности **§ 37**, где речь идет о текстовых задачах, говорить не приходится. В очередной раз отметим, что в нашей концепции реализуется идея математического моделирования, и решение всех текстовых задач оформляется в виде трех этапов математического моделирования. Приступая к первому этапу — этапу составления математической модели, мы как бы осуществляем синхронный перевод текста задачи с обычного языка на математический. На втором этапе решается математическая модель, которая составлена на первом этапе. Эта модель в данный период времени представляет собой рациональное уравнение. Для рационального уравнения имеется свой алгоритм решения, который в качестве последнего шага включает в себя проверку найденных корней (с целью отбросить те из них, которые обращают в нуль знаменатель дроби). На третьем этапе, где формулируется ответ на вопрос задачи, фактически также приходится делать проверку, но уже смысловую. Например, число –3 может быть корнем рационального уравнения, но не удовлетворять условиям, если за $x$ принималось, скажем, время. Таким образом, есть два вида проверки, но ученики часто путают *принципиальную проверку* (проверку того, не является ли найденный корень посторонним для уравнения) и *смысловую проверку* (по условиям задачи), а если и не путают, то часто смешивают все в одну кучу. Явное выделение трех этапов математического моделирования позволит избежать указанных неприятностей: на втором этапе осуществляется принципиальная проверка, а на третьем — смысловая. В разобранных в этом параграфе примерах показано, как проверка по модели отделяется от смысловой проверки.

## Глава 6. Вероятности случайных событий

В 7-м классе было начато знакомство учеников со статистической составляющей всей стохастической линии курса алгебры основной школы. В 8-м классе начинается систематическое знакомство с вероятностной составляющей. Мы намеренно избегаем в названии главы термина «Теория вероятностей», так как ни о какой *теории* на этом этапе речи быть не может. Для начала достаточно простейших правил и приемов подсчета вероятностей и знакомства с несколькими первоначальными терминами. В целом изложение начинается с классического определения вероятности, а заканчивается подсчетом вероятностей случайных событий в испытаниях с произвольным конечным числом (не обязательно равновозможных) исходов. Глава состоит из четырех параграфов:

§ 40 «Испытания с равновозможными исходами»;

§ 41 «Случайные события. Вероятность противоположного события»;

§ 42 «Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий»;

§ 43 «Испытания с конечным числом исходов. Последовательные независимые испытания и повторения испытаний».

Объем параграфов невелик. Без учета текста упражнений это, соответственно, 4, 5, 7 и 9 страниц. В последнем случае увеличение связано с тем, что § 43 состоит, как это следует из его названия, из двух частей, из которых во второй представлены примеры, подтверждающие содержательность материала первой части (общее определение вероятности). Лаконичность соответствует второму принципу развивающего обучения — изложению материала в довольно быстром темпе. Как во всем УМК, выдержаны третий и четвертый принципы — определения и формулировки теоретических положений подготавливаются в результате разбора конкретных примеров. Дифференцированность обучения (пятый принцип развивающего обучения) реализуется через систему упражнений: в каждом параграфе по 12 упражнений, состоящих из заданий «а»—«е», т. е. по 72 разнообразных вопроса по учебному материалу, к тому же задачи разделены на базовые, повышенного (синее подчеркивание) и высокого (красное подчеркивание) уровня сложности.

Первый параграф главы, **§ 40**, хотя и тривиален по «научно-теоретическому» содержанию, но представляется нам чрезвычайно важным. В нем на вероятностном материале систематически развивается и поддерживается общая концепция построения курса алгебры: подчеркнутое разделение и взаимосвязь между реальными ситуациями и их теоретическими (математическими) моделями. А именно вопрос о статистической обработке уже полученных данных — это вопрос, относящийся к (в той или иной мере) реальному событию, здесь глагол в условии стоит в прошедшем времени и относится к уже произошедшему событию. Например, «...*получены* такие данные... Найдите частоту...». А вот вопрос и ответ о вероятности случайного события носят характер прогноза, они относятся к оценке предполагаемого, условного, действия. В этом случае глаголы в тексте или будущего времени («...монета *выпадет*...»), или относящиеся к действию, условно совершаемому в настоящем времени («...монету *бросают*...»). Задача об отыскании вероятности — это всегда задача, решаемая для какой-то *математической модели* реальной ситуации, а не для самой реальной ситуации. В частности, равновозможность выпадения «орла» или «решки» при бросании монеты (выпадения 1, 2, 3, 4, 5, 6 при бросании игрального кубика) не следует на этом этапе никак обосновывать. Равновозможность исходов здесь предполагается заранее: это свойство моделей, в которых решаются эти задачи. Точно так же постоянство скорости пешехода в задачах на движение есть априорное свойство той простейшей (линейной) модели, в которой решается эта задача.

Разумеется, эти тонкости — не предмет подробного обсуждения в 8-м классе. На трех уроках, отводящихся на **§ 40** по тематическому планированию, речь идет об очень простых вещах: подсчет числа исходов испытания, подсчет числа исходов, благоприятствующих наступлению события, вычисление вероятности события. Основной технический момент, на который следует обратить внимание и хорошо отработать при решении упражнений, — чисто комбинаторный. Это *дерево вариантов* как один из самых наглядных способов организованного перебора вариантов. Отметим, к этому моменту не предполагается, что основное комбинаторное *правило умножения* известно. Оно появится позже, в § 42, а здесь ученики должны накопить опыт общения с перебором и отбором вариантов.

Упражнения разбиты на группы по 2—3, относящиеся к одной и той же ситуации. В каждом упражнении 6 заданий «а»—«е», первые из которых совсем легкие. Но затем сложность (монотонно) увеличивается, и в пункте «е» может уже стоять вопрос, ответ на который без предварительного «разгона» может оказаться непростым делом. Например, рассмотрим последний из номеров серии заданий 40.3—40.5.

**40.5.** Наудачу выбирают целое неотрицательное число, которое меньше ста. Какова вероятность того, что выбранное число окажется:

а) четным;

б) нечетным;

в) кратным пяти;

г) кратным семи;

д) нечетным и кратным семи;

е) или четным, или кратным пяти?

Ясно, что задания «а» и «б» — простой устный счет, «в» — устный счет; в пункте «г», наверное, надежнее всего выписать все 15 чисел, в «д» — оставить из них нечетные, а вот в «е» потребуется уже некоторое рассуждение. Содержательно это упражнение, разумеется, есть пропедевтика изучения формул вероятностей произведения и суммы событий.

Следующий параграф **(§ 41)** в основном «лингвистический». В нем вводятся термины *случайное, элементарное, достоверное, невозможное, противоположное* события и доказана самая простая вероятностная формула $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Пожалуй, самый тонкий момент в нем — это переход от слов «исход испытания» к термину «элементарное событие». Для людей, привыкших к теоретико-множественному пониманию математики, такой переход не составляет особых трудностей. Но вряд ли к ним можно причислить восьмиклассников: у них элементы теории множеств только начались в 8-м классе. Мы не рекомендуем резко «рубить концы» и после § 41 вовсе забыть о термине «исход испытания»: во многих текстовых формах условий задач этот термин уместнее, чем некое «э.с.». В то же время при формулировках определений и доказательствах многих теоретических утверждений удобнее говорить именно об элементарных событиях. Кроме того, и нормативные требования к результатам обучения предполагают знакомство с термином «элементарное событие».

Название **§ 42** «Правило умножения. Правило сложения вероятностей несовместных событий» состоит из двух позиций. Первая из них чисто комбинаторная и по значению своему — ключевая для всей стохастической линии в целом. Вторая — вероятностная, тоже важная, («...конечная аддитивность вероятностной меры...»), но носит куда более служебный характер. Грубо говоря, ученик, не почувствовавший здесь, как правило умножения «работает» в конкретных примерах, с большой вероятностью не поймет в дальнейшем ничего про повторения, перестановки, сочетания, сложные вероятности и т. п. В то же время привыкнуть к использованию правила сложения при подсчете вероятностей у него будет еще много возможностей. Более того, правило сложения будет сформулировано еще и в § 43, а в терминах «сумма событий» — в 9-м классе. А в 8-м классе мы вообще обходимся без *алгебры событий* — их произведений и сумм. Так что при обучении основной акцент в этом параграфе делаем именно на правило умножения.

В заключительном **§ 43** дано общее определение вероятности события как суммы вероятностей составляющих его элементарных событий и на этом уровне повторены уже известные факты. Для дальнейшего все же основное значение имеет вторая часть § 43 о независимых повторениях испытаний с двумя исходами. Эта долгая содержательная линия, «вырастающая» из правила умножения. Она только намечается в 8-м классе, здесь же появляются «успех» и «неудача», но испытаний Бернулли пока нет. Они отложены до 9-го класса, где появится формула Бернулли, до 10-го класса, где она будет доказана, и до 11-го класса, где будет рассказано о нормальных распределениях и теореме Бернулли — простейшей форме *закона больших чисел.* На уровне 8-го класса основные учебные моменты:

— по таблице (по описанию) распределения вероятностей подсчитать вероятность события;

— для двукратных и трехкратных повторений конкретного испытания с двумя исходами составить дерево вариантов и подсчитать вероятность события.